Václav Jeřábek

Příspěvek ke kuželosečkám konfokálním

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 3, 109--112

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122868

Příspěvek ke kuželosečkám konfokálním.

Podává

V. Jeřábek.

Buďtež ellipsa $\breve{E}$ a hyperbola $\breve{H}$ kuželosečky konfokální určené ohnisky f_1, f_2 a jakýmkoliv bodem p. (Obr. 4.) Kuželosečky tyto mají svůj střed s v bodu délku $\overline{f_1, f_2}$ rozpolujícím a protínají se pravoúhelně ve čtyrech bodech p, p_1, p_2, p_3, t. j. tečny $T_p\,T'_p$, $T_{p1}\,T'_{p1}$.. v bodech p, p_1,.. stojí na sobě kolmo. Společné osy řečených kuželoseček označme O', O''.

Naší úlohou budiž poukázati k tomu, kterak lze určiti délky os ellipsy, známe-li asymptoty hyperboly $\breve{H}$ a bod p.

Asymptoty hyperboly, jak známo, jsou dvojné paprsky involuce paprskové, určené dvěma páry průměrů sdružených. Ve svém případu můžeme involuci sdružených průměrů určiti osami O', O'' a průměry $P' \equiv \overline{sp}$ a $P'' \,||\, T'_p$. Protíná-li tečna T_p osy O', O'' v bodech o', o, můžeme sestrojujíce dvojné paprsky involuce $(O'\,O''\,P'\,P'')$ užití kružnice $\breve{K}$, kterou sestrojíme nad délkou $\overline{o's}$ považujíce tuto za průměr.

Involuce $(O'\,O''\,P'\,P'')$ určuje na kružnici $\breve{K}$ involuci bodovou $(o'\,o''\,p'\,p'')$, která má za osu Σ přímku spojující body $(\overline{o'p''}, \overline{o''p'}) \equiv p$, $(\overline{o'p'}, \overline{o''p''}) \equiv n$. Průsečné body osy Σ s kružnicí $\breve{K}$ jsou dvojné body e, f involuce $(o'\,o''\,p'\,p'')$. Uvážíme-li však, že osa Σ prochází průsekem výšek t. j. bodem $(\overline{o'p''}, \overline{o''p'}) \equiv p$ a vrcholem n trojúhelníku $\Delta\, o'\,o''\,n$, snadno uznáme, že involuční osa Σ musí býti kolmá ku ose O' a že tedy osa Σ jest již napřed určena bodem p a směrem osy O'' Podobně průsečík p paprsků $\overline{o'p''}$, $\overline{o''p'}$ značíme $(\overline{o'p''}, \overline{o''p'}) \equiv p$. určí involuce paprsková $(O'\,O''\,P'\,P'')$ na kružnici $\breve{K}'$, která má za průměr délku $\overline{so}$, involuci bodovou, jejíž osou Σ' jest rovnoběžka $\overline{pe'}$ vedená bodem p k ose O'. Dvojné body e', f' involuce bodové na $\breve{K}'$ jsou opět body, ve kterých osa Σ' kružnici $\breve{K}'$ seče. Jelikož v involuci paprskové $(O'\,O''\,P'\,P'')$ vyskytuje se pouze jediný pár dvojných paprsků E, F, musí asymptoty, které sestrojíme buď pomocí bodů e, f aneb bodů e', f', býti totožny t. j. body e, e' nalézají se na asymptotě E a body f, f' na asymptotě F.

Máme-li na zřeteli, že trojúhelníky $\Delta seo'$, $\Delta se'o$ mají při vrcholech e, e' pravé úhly a že body m, m' jsou paty kolmic spuštěných s bodu p na přepony $\overline{so'}$, $\overline{so}$ těchto trojúhelníků obdržíme

$$\overline{se}^2 = sm \,.\, so' \,;\ \overline{se'}^2 = sm' \,.\, so.$$

Jelikož s jest středem a m, o (neb m', o) jsou příslušné body involuce s družených polů na O' (neb O''), obdržíme délky os, je-li α poloosou větší a β poloosou menší, jak známo z rovnic

$$\alpha^2 = sm \,.\, so' ;\ \beta^2 = sm' \,.\, so.\text{*)}$$

Srovnáme-li relace hořejší s relacemi dolejšími, shledáme, že délky $\overline{se}$, $\overline{se'}$ rovnají se poloosám α a β ellipsy $\check{E}$. Sestrojíme-lí kružnice $\check{K}_\alpha$, $\check{K}_\beta$ ze středu s tak, aby skrze body e, e' procházely a určíme-le průsečné body kružnic $\check{K}_\alpha$, $\check{K}_\beta$ s osami $O' O''$, obdržíme vrcholy a, a_1, b, b_1 ellipsy $\check{E}$.

Ať bod p na pevné ellipse $\check{E}$ vytkneme kdekoliv, pokaždé prochází jím jedna hyperbola $\check{H}$ s ellipsou konfokální, tak že vyslovené úvahy platí všeobecně, i obdržíme tedy věty:

1. Každým bodem p ellipsy E prochází jedna s ellipsou konfokální hyperbola $\check{H}$, a rovnoběžky bodem p k osám O', O'' ellipsy vedené určují na asymptotě E hyperboly $\check{H}$ body e, e', jejichž vzdálenosti od středu s rovnají se poloosám ellipsy.

2. Veškeré asymptoty (E)**) hyperbol $(\check{H})$ s ellipsou $\check{E}$ konfokálních určují na kružnicích $\check{K}_\alpha$, $\check{K}_\beta$ páry bodů (e, e'), kterými vedené rovnoběžky k osám O', O'' protínají se v určitých bodech (p) ellipsy $\check{E}$. Toť známá konstrukce ellipsy.

Obdržených výsledků lze též upotřebiti k určení směrů i délek os ellipsy, jsou-li dány průměry sdružené $\overline{mn}$, $\overline{pq}$ (obr. 5) co do směru i délek.

Jak známo, určuje involuce sdružených průměrů ellipsy E na tečně $T_p \,||\, \overline{mn}$ involuci bodovou, jejíž středem jest bod p, který involutorně přísluší nekonečně vzdálenému bodu přímky T_p, t. j. bodu, ve kterémžto T_p a $\overline{mn}$ se protínají. Veškeré kružnice, které příslušnými body involuce na T_p si sestrojeny

*) Dr. Em. a Ed. Weyr, Vyšší geometrie díl II., pag. 135.

**) Symbolem (E) značíme souhrn asymptot, které mají podobný význam jako asymptota E.

myslíme a které mají za průměry délky sdruženými body omezené, procházejí dvěma pevnými body g a h kolmice T'_p vztýčené v bodu p ku T_p. Vzdálenosti bodů g a h od bodu p rovnají se polovině průměru $\overline{mn}$.*) Kružnice určená středem s a body g a h bude protínati přímku T_p ve dvou sdružených bodech o, o' známé involuce bodové na T_p. Přímky O', O'' spojující body o', o se středem s jsou kolmé sdružené průměry ellipsy a tedy její osy. Nyní dokážeme, že body g a h nalézají se na asymptotách E, F hyperboly $\check{H}$, která jest s ellipsou $\check{E}$ konfokální a jíž bod p náleží. K tomu cíli protněme involuci sdružených průměrů (obr. 5) $(O'\,O''\,P'\,P'')$ kružnicí $\check{K}''$ v involuci bodové $(o'\,o''\,p'\,p'')$, jejíž osou Σ'' jest přímka spojující body $(\overline{o'p''}, \overline{o''p'}) \equiv u$, $(\overline{o'p'}, \overline{o''p''}) \equiv v$. Poněvadž Σ'' spojuje průsek výšek $\overline{o'p''}$, $\overline{o''p'}$ t. j. bod $(\overline{o'p''}, \overline{o''p'}) \equiv u$ v trojúhelníku $\Delta\, o'\,o''\,v$ s vrcholem v, musí státi kolmo na základně $o'\,o''$. Zbývá nám ještě dokázati, že osa Σ'' prochází bodem p, čili že splývá s tečnou T'_p. Určíme-li bod p''_1 průsekem přímky $\overline{p''p}$ s kružnicí $\check{K}''$, shledáme, že v šestiúhelníku $o''\,p'\,s\,o'\,p''\,p''_1$ čili 1 2 3 4 5 6, který jest kružnici $\check{K}''$ vepsán, nacházejí se dle věty Pascalovy tři body $(\overline{12}, \overline{45}) \equiv u$, $(\overline{23}, \overline{56}) \equiv p$, $(\overline{34}, \overline{61}) \equiv u'$ na téže přímce $\overline{u\,u'}$. Z trojúhelníků $\Delta\, o'\,u\,u'$, $\Delta\, o''\,u\,u'$, o nichž se snadno dokázati může, že jsou rovnoramenné, plyne dále, že $\overline{uu'}$ stojí kolmo na $o'\,o''$. Bod u nachází se tedy na kolmici vztýčené v bodu p ku $\overline{o'\,o''}$, a poněvadž osa Σ'' také bodem u prochází a kolmá jest ku $\overline{o'\,o''}$, musí osa Σ'' sloučiti se s kolmicí $\overline{u\,u'} \equiv T'_p$. Z toho pak, že Σ'' stotožňuje se s T'_p, vysvítá dále, že i body e'', f'', ve kterýchžto osa Σ'' seče kružnici $\check{K}''$, — kterou jsme dříve určili body g, h a s —, splynouti musí s body g a h. Poznáváme opět, že i v tom případě, když jsou dány směry i délky dvou sdružených průměrů ellipsy, můžeme na T'_p určiti body g a h asymptot E, F učiníce $\overline{pg} = \overline{ph} = \overline{sm}$. Přímky E, F určené body g, s a h, s jsou asymptoty hyperboly $\check{H}$, a směry os O', O'' obdržíme, když rozpůlíme úhly $\sphericalangle\, g\,s\,h$ $(180 - \sphericalangle\, g\,s\,h)$. Protneme-li asymptotu E přímkami $\overline{pe} \parallel O''$, $pe' \parallel O'$ v bodech e, e', budou pak úsečky se, se' rovnati se poloosám α a β ellipsy. Vrcholy ellipsy lze opět určiti jako dříve pomocí kružnic $\check{K}_\alpha$, K_β.

*) Dr. Em. a Ed. Weyr, Vyšší geometrie díl. II. pag. 104.

Kdybychom si myslili (obr. 5.) všecky kružnice $\check{K}, \check{K}', K''$ sestrojeny, pak bychom mohli snadno dokázati, což laskavému čtenáři ponechávám, že na jakémkoliv paprsku vrcholem s trojúhelníku pravoúhelného $\Delta oso''$ vedeném určují kružnice $\check{K}$, $\check{K}'$, $\check{K}''$ body x, y, z, tak že $\overline{sy} = \overline{sy}$, $\overline{xz} = \overline{xz}$. Poněvadž asymptota E též středem $s$prochází a kružnice $\check{K}$, $\check{K}'$, $\check{K}''$ v bodech e, e', e'' seče, musí tětiva se' kruhu $\check{K}$ rovnati se úsečce $\overline{ee''}$, kterou určují ostatní dvě kružnice $\check{K}$, $\check{K}''$ na E. I jest tedy $\overline{se''} = \alpha + \beta$ t. j. součet obou poloos ellipsy E. Též se ponechává laskavému čtenáři dokázati, že $\overline{sh} = \overline{ee'}$ jest rozdílem obou poloos.*)

Dějiny všeobecné gravitace.

Od

Dr. **A. Seydlera.**

(Pokračov.)

III. Gravitace světová.

Projevy tíže na zemi prozkoumal až do jisté míry Galilei, projevy tíže v pohybech oběžnic Keppler; Newton však stal se tvůrcem nauky o gravitaci světové, objeviv v zákonu svém společný kořen obou skupin zjevů od sebe tak velice se různících a vyvodiv z něho všechny důležitější výsledky, jichž podrobný rozbor zanechal budoucím pokolením co bohatý odkaz vědecké práce.

Isak Newton (1643—1727, dle Gregorianského kalendáře) počal, dle náhledu nejvíce rozšířeného, r. 1666 obírati se úkazy tíže, tedy v době, v které byl ještě nevystoupil se žádným z četných slavných svých vynálezů. Legenda, která každou vynikající osobnosť obestírá pestrým závojem charakteristických anekdot, vypravuje o něm, že jednoho dne, sedě ve Woolsthorpu v zahradě pod jabloní, jablkem padnuvším před ním k zemi přiveden byl na myšlenku, obírati se záhadami tíže. Postup

---

*) Tytéž výsledky, kterých jsme se nyní dodělali, dokázány jsou jiným spůsobem ve „Vyšší geometrii“ Dr. Em. a Ed. Weyra díl II. str. 111.