

B. Macků

Srovnávání kapacit kvadrantním elektrometrem

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 413--423

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122947>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1912

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Srovnávání kapacit kvadrantním elektrometrem.

Napsal Dr. B. Macků.

Srovnávání i dosti značných kapacit s chybou nepřesahující několik málo setin procenta patří jistě již k obtížnějším úlohám fyzikálního měření aneb aspoň vyžaduje buď značně komplikované a drahé apparatusy aneb výtečné izolace srovnávaných kondensátorů. Obtíže vyskytující se při užití jednodušších prostředků souvisí s tím, že kapacitou proudová intenzita se příliš snižuje. Obtíž tato odpadá však úplně, použijeme-li za měřící stroj elektrometru. Poněvadž pak kvadrantní elektrometr střední citlivosti dává při náboji jehly na 100 volt několik set dílců úchylky při potenciálním rozdílu kvadrantů o 1 volt, jest možno na kvadrantech zjistiti potenciální rozdíl několika tisícín volt a tedy z celkové potenciální difference 50*) volt setiny procenta.

Nezvyklost užívání elektrometru pro srovnávání kapacit má pravděpodobně svůj důvod v tom, že při obvyklém spojení (jehla nabíta na vysoký potenciál, kvadranty na nízký**) vznikají příliš veliké chyby z nedostatečné izolace.

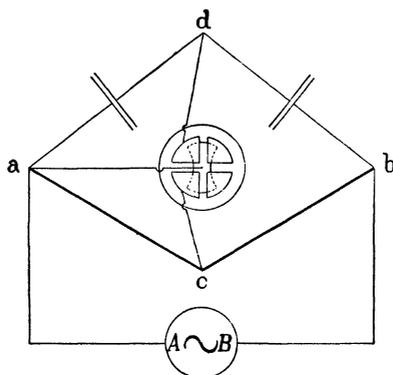
Představme si obvyklé rozvětvení Wheatstoneovo. Pak je při užití elektrometru nutno voliti spojení tak, jak je znázorňuje výkres 1., při čemž by při obvyklém spojení elektrometru bylo s obalem jeho a zemí spojeno místo buď *c* neb *d*.

Dejme tomu, že izolace zdroje od země není úplně dokonalou blíže pólu *B*. Výsledek v prvním případě (*c* se zemí) je týž, jako bychom paralelně k odporu *bc* připojili odpor ekvivalentní chybě izolace. Poněvadž pak za odpor *ab* nutno užití praecisního rheostatu, bude odpor *cb* nutno voliti řádu $10^4 \Omega$, aby tedy nedostatečná izolace nezpůsobila chyb jdoucích do 0.01% , nesměl by odpor její dosahovati hodnoty řádu $10^8 \Omega$, čehož se na stroji pro střídavý proud dosíci nedá. Případ druhý (*d* se zemí) je ještě nepříznivější, poněvadž kapacita řádu 10^{-9}

*) Předpokládá se, že se užije za zdroj městského střídavého proudu. Kapacity nutno spojití za sebou, připadá tedy na každou asi 50 volt.

***) Obvyklé spojení druhé: jehla spojena s jedním párem kvadrantů, obalem a s jedním pólem měření potenciální difference, druhý pár kvadrantů s pólem druhým nehodí se pro malou citlivost.

Farad repraesentuje pro obvyklý střídavý proud odpor řádu $10^{-7} \Omega$. (Také nestejnorné rozdělení kapacity vinutí stroje a vedení mohlo by způsobovati chyby (jmenovitě v případě druhém), chyba tato by se však dala vyloučiti kommutováním připojení jehly na a resp. b .)



Obr. 1.

I.

Rušivé vlivy tyto však zmizí, spojíme-li se zemí bod a , neboť v tomto případě vadná izolace má též účinek, jako bychom připojili vedlejší větev k bodům a , b , což ovšem na rozdělení potenciálu po paralelních větvích pranic nemění.

Jest tedy nyní spojení elektrometru takové, že jehla je na potenciálu nullovém a oba kvadranty na potenciálu vysokém a měří se rozdíl tohoto vysokého potenciálu. Pro úchylku elektrometru platí pak:

$$n = -\frac{1}{2} K(P_1 + P_2)(P_1 - P_2). \quad (1)^*$$

Pro měření užito bylo elektrometru Hallwachsova (od firmy H. Stieberitz, Drážďany), na němž horní vztah splněn byl až do

*) Vyjdeme-li od obvyklého vzorce

$$n = K(P_1 - P_2) \left(P_0 - \frac{P_1 + P_2}{2} \right),$$

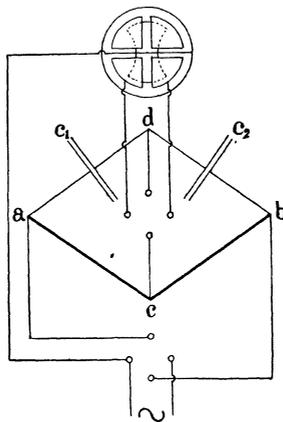
keďž značí P_0 potenciál jehly, P_1 a P_2 potenciály jednotlivých kvadrantů.

oboustranné úchylky 3000 desetin mm při vzdálenosti skály 180 cm . Konstanta K měla hodnotu

$$K = 8.46.$$

Zdrojem při této kontrole byly akumulátory o 113.5 volt. Justování elektrometru tak, aby při stejném potenciálu obou kvadrantů nepovstávala žádná úchylka, nečinilo zvláštních obtíží.

Bylo by tedy při udaném spojení možno interpolovati dle vzorce (1) až z úchylek jdoucích do 3000 $\frac{1}{10}$ mm , předpokládaje, že by napětí zůstávalo dostatečně konstantním.



Obr. 2.

Pro srovnání kapacit užito bylo spojení naznačeného na obr 2. Od spojení na obr. 1. liší se pouze tím, že před kvadranty zapnut kommutátor, aby mohly býti vespolek vyměněny, a mimo to jiný kommutátor připojen hned ku zdroji proudu, aby bylo možno snadno vyměňovati připojení jehly a obalu k místu a neb b . Za zdroj proudu užito městského střídavého proudu (110 volt, 50 obrátek).

Theorie metody je jednoduchá. Nenastane-li úchylka, když poměr odporů $\overline{cb} : \overline{ca}$ při připojení jehly k místu a je roven p_a , pak platí, máme-li též zřetel ke kapacitě elektrometru (γ)*

$$\frac{c_1 + \gamma}{c_2} = p_a.$$

*) Případná změna γ při výměně kvadrantů vyloučí se právě vyměňováním kvadrantů.

Podobně pro připojení jehly k místu b platí

$$\frac{c_1}{c_2 + \gamma} = p_b.$$

Z rovnic těchto vychází:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{1 + p_a}{1 + p_b} p_b \quad (2)$$

a pro korekční kapacitu elektrometru

$$\gamma = \frac{p_a - p_b}{1 + p_b} c_2. \quad (3)$$

Citlivost a přesnost metody. Označíme-li (při spojení a s jehlou) potenciál na kapacitě $c_1 \dots P_1$ a celý potenciál na $ab \dots P$, pak platí s dostatečnou nyní přesností

$$P_1 = \frac{1}{1 + \frac{c_1}{c_2}} P.$$

Dosazením do rovnice (1) vyjde:

$$n = -\frac{1}{2} KP^2 \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{c_1}{c_2}\right)^2} - \left(\frac{P_1}{P}\right)^2 \right\}$$

a odpovídá tedy změně měřeného poměru $\Delta \frac{c_1}{c_2}$ změna úchyly

$$\Delta n = KP^2 \frac{\Delta \frac{c_1}{c_2}}{\left(1 + \frac{c_1}{c_2}\right)^3}. \quad (4)$$

Pro $c_1 = c_2$ jevila by se tedy při změně poměru kapacit o 0·01%, t. j. pro $\Delta \frac{c_1}{c_2} = 10^{-4}$ — pro udaný elektrometr $K \doteq 8\cdot5$ a při užití městského proudu, $P = 110$ volt — úchyly $\Delta n = 8\cdot5 \cdot 110^2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{8} \doteq 1\cdot3$ desetín mm oboustranné úchyly. Poněvadž pak musíme čítati s chybou asi 0·1 mm jednostranné úchyly, je citlivostí omezena přesnost asi na 0·02%.

Jako *příklad* je sestaveno v tabulce I. srovnání tří leydských lahví označených čísly 1, 2, 6. Láhve ty měřeny byly

před delší dobou (r. 1908) methodou Maxwellovou a nalezeno bylo tehdy:

$$L_1 = 309 \cdot 10^{-9} F, L_2 = 266 \cdot 10^{-9} F, L_6 = 248 \cdot 5 \cdot 10^{-9} F. *)$$

Tab. I.

Měřený poměr	p_a	p_b	Výsledek
$\frac{L_6}{L_1}$	0·8110 ₀	0·7991 ₀	$\frac{L_6}{L_1} = 0\cdot8043_9$
$\frac{L_2}{L_1}$	0·8682 ₄	0·8556 ₉	$\frac{L_2}{L_1} = 0\cdot8614_8$
$\frac{L_6}{L_2}$	0·9415 ₈	0·9264 ₃	$\frac{L_6}{L_2} = 0\cdot9337_2$

Kontrolu možno provést tím způsobem, že druhé dva poměry znásobíme a výsledkem dělíme poměr první. Má vyjít přesně 1.

Ve skutečnosti vychází

$$\frac{L_6}{L_1} \cdot \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{L_2}{L_6} = 1\cdot00005.$$

Souhlas je dokonce lepší, než se dá z citlivosti metody očekávat.

Označíme-li součet kapacit všech tří lahví L , pak je

$$L_1 = \frac{L}{1 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_6}{L_1}}.$$

Užitím nalezených poměrů vychází

$$L_1 = 0\cdot3751_2 L$$

$$L_2 = 0\cdot3231_4 L$$

$$L_6 = 0\cdot3017_2 L$$

$$L_1 + L_2 + L_6 = 0\cdot9999_8 L,$$

tedy souhlas opět velmi dobrý.

*) Přesnost metody odhadována byla tehdy na 0·2%. Poněvadž poměry z čísel těchto vycházející jsou 0·8042, 0·8608, 0·9342, je srovnáním s tab. II. patrné, že byla dokonce přesnost větší.

Počítáme-li dle vzorce (3) korekční kapacitu elektrometru $\frac{\gamma}{L}$, pak vychází

$$0\cdot0024_8 \quad 0\cdot0025_4 \quad 0\cdot0025_4,$$

t. j. největší rozdíl je 6 na místě pátém, což je z měřených hodnot (L_1 , L_2 , L_6) asi 0·02%. Potvrzuje se tedy při této metodě důsledně, že chyba měření zůstává v mezích daných citlivostí metody.

Pozn. Z výrazu pro citlivost (4) vychází, že citlivost roste s ubývajícím poměrem $\frac{c_1}{c_2}$ při spojení a s obalem, ovšem zase přiměřeně klesá při spojení b s obalem. Proto je výhodno v tom případě, kdy se jedná o srovnání kapacit značně různých, spojit se zemí onen pól, kam připojena je kapacita menší (pak jsou totiž kvadranty na vyšším potenciálu než v případě opačném). Korekční kapacitu γ jest pak však nutno ustanovit zvlášť pomocí kapacit přibližně stejných.

II.

Elektrometrem jest však možno srovnávat kapacity metodou ještě jednodušší, než byla předešlá. Zjednodušenou metodu tuto znázorňuje obraz 3. K obalu připojeno je místo buď a neb b . Theoreticky možným bylo by ovšem též připojení místa c k obalu, prakticky však spojení toto se neosvědčuje z těchž důvodů, z nichž nebylo možným při metodě I.

Jest tedy nynější spojení takové. Jeden pár kvadrantů s obalem ($P_2 = 0$), druhý na vysoký potenciál (P_1) a jehla na potenciál nižší (P_0). Platí tedy pro úchylku nyní vztah:

$$n = KP_1 \left(P_0 - \frac{P_1}{2} \right). \quad (5)$$

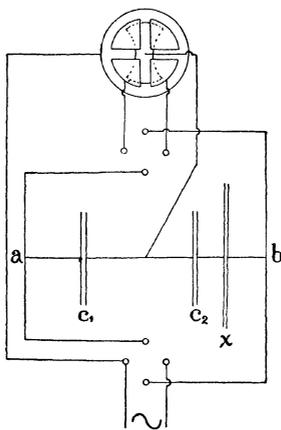
Kontrola provedena proudem střídavým (městským). Značí-li P celé napětí, odpor na místě kapacity $c_1 \dots r_1$, na místě kapacit c_2 a $x \dots r_2$, pak platí pro úchylku

$$n = \frac{1}{2} KP^2 \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$$

a má tedy pro různé hodnoty odporů zůstatvati výraz

$$n \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} = \frac{1}{2} KP^2$$

konstantním. Ve skutečnosti nalezeny hodnoty differující nepravidelně až o 2^o/_o. Variace tyto mají původ svůj v nestálosti napjetí městského proudu. Užívá-li se tedy vzorce (4) k interpolaci, pak nutno, při užití městského proudu, čítati s chybou jdoucí do 2^o/_o interpolací nalezené hodnoty.



Obr. 3.

Při příkladu dále uvedeném bylo užito za vyrovnávací kapacitu x slídového kondensátoru kolíčkového (od 0·001 — 1·111 Mf), jenž byl srovnán s kapacitou L všech tří dříve uvedených lahví předešlou methodou, čímž stanoveny poměry $\frac{L}{x}$ a potřebné poměry $\frac{L_1}{x}$ resp. $\frac{L_2}{x}$ ustanoveny pak násobením prvou methodou nalezenými poměry $\frac{L_1}{L}$ resp. $\frac{L_2}{L}$. Poněvadž však užitou slídovou kapacitou nebylo možno vyrovnati poměr kapacit úplně, zbývaly úchytky, z nichž bylo nutno interpolovati, až přes 200 dílců jdoucí. Souvisí tedy s nestálostí napjetí městského proudu chyby ekvivalentní chybnému odečtení až 5 dílců.

Theorie metody. Označíme-li kapacitu systému: pár kvadrantů na vysoký potenciál nabitých a jehly γ , a kapacitu systému: jehla a druhý pár kvadrantů s obalem γ' , pak vychází, že elektrometr nejví úchyly, když platí: je-li s obalem spojeno místo a :

$$c_1 + \gamma' = \frac{c_2 x_a}{c_2 + x_a} + \gamma,$$

aneb je-li spojeno s obalem místo b :

$$c_1 + \gamma = \frac{c_2 x_b}{c_2 + x_b} + \gamma'.$$

Z rovnic těchto vychází:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{c_2}{x_a}} + \frac{1}{1 + \frac{c_2}{x_b}} \right\} \quad (5)$$

$$\frac{\gamma' - \gamma}{c_1} = \frac{\frac{c_2}{x_b} - \frac{c_2}{x_a}}{2 + \frac{c_2}{x_b} + \frac{c_2}{x_a}}. \quad (6)$$

Citlivost a přesnost. Označíme-li celé napětí P (t. j. $P_1 = P$), pak je potenciál jehly při spojení a se zemí (nebere-li zřetele ke korekčním kapacitám elektrometru) a označíme-li mimo to výslednou kapacitu na straně pravé

$$c'_2 = \frac{c_2 x}{c_2 + x}$$

$$P_0 = \frac{c'_2}{c'_2 + c_1} P$$

a dosazením do rovnice (4) obdržíme:

$$n = \frac{1}{2} KP^2 \frac{1 - \frac{c_1}{c'_2}}{1 + \frac{c_1}{c'_2}},$$

a připadá tedy na změnu měřeného poměru $\Delta \frac{c_1}{c'_2}$ změna úchyly

$$\Delta n = - KP^2 \frac{\Delta \frac{c_1}{c'_2}}{\left(1 + \frac{c_1}{c'_2}\right)^2}$$

Z výrazu tohoto je patrné, že pro $c_1 \doteq c'_2$ je metoda tato dvakrát citlivější předešlé, čili že nyní na změnu poměru kapacit o 0·01% připadá oboustranná úchylnka 2·6 desetin mm. Může tedy z nepřesnosti odečtení vznikati chyba asi 0·01%. Poněvadž však následkem nestálosti městského proudu vzniká chyba ekvivalentní nepřesnému odečtení asi na 5 dílců, vzniká tím opět možná chyba asi 0·02%. Dohromady tedy dá se čekati přesnost naměřených hodnot do 0·03%.

Jako *příklad* sestaveno je v tabulce II. srovnání týchž leydských lahví, jež srovnány byly již methodou prvou. V sloupci posledním vyznačeny jsou procentuální rozdíly hodnot nyní nalezených proti oněm vyšším methodou I.

Tab. II.

Měřený poměr	a s obalem	b s obalem	Výsledek	Rozdíl
$\frac{L_6}{L_1}$	$\frac{L_1}{x_a} = 0\cdot2520$	$\frac{L_1}{x_b} = 0\cdot2335$	$\frac{L_6}{L_1} = 0\cdot8047_3$	- 0·04%
$\frac{L_2}{L_1}$	$\frac{L_1}{x_a} = 0\cdot1690$	$\frac{L_1}{x_b} = 0\cdot1525$	$\frac{L_2}{L_1} = 0\cdot8615_6$	- 0·01%
$\frac{L_6}{L_2}$	$\frac{L_2}{x_a} = 0\cdot0798$	$\frac{L_2}{x_b} = 0\cdot0635$	$\frac{L_6}{L_2} = 0\cdot9332_3$	+ 0·05%

Ačkoliv rozdíl dvou hodnot s chybou 0·02% a 0·03% může dosahovati i 0·05%, přece se zdá, že chyby při methodě druhé přesahují očekávanou míru 0·03%. Utvoříme-li totiž součin poměrů jako dříve, pak vyjde

$$\frac{L_6}{L_1} \cdot \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{L_2}{L_6} = 1\cdot0008_8,$$

t. j. hodnota tato liší se od 1 o 0·09%. Vypočteme-li pak dle vzorce 6. hodnoty $\frac{\gamma' - \gamma}{L}$, pak obdržíme čísla

$$0\cdot0027, \quad 0\cdot0026, \quad 0\cdot0024_6$$

čísla patrně vespolek hůře souhlasící než korekce při methodě I., neboť differují vespolek až o 0·1% měřených hodnot (L_1 , L_2 ,

L_0). Poněvadž tedy korekce tato od měření k měření se měnila, není vyloučena změna její i během jednoho měření, čímž snadno může vznikati chyba jdoucí do setin procenta. *)

III.

Srovnáme-li uvedené metody, pak vychází sice druhá jako citlivější, nevýhoda její však vězí v tom, že spíše se v ní vyskytují rušivé vlivy a mimo to nutno při ní vyrovnávati na stejnou kapacitu a tedy míti k dispozici proměnnou kapacitu. Z důvodů těchto je přec jen výhodnější a pohodlnější metoda I., jež připouští srovnávání i značně různých kapacit a vyžaduje jen praecisního rheostatu.

Vzniká ještě otázka, jak daleko by šla přesnost měření jednotlivými metodami stupňovati. Otázka tato souvisí těsně se závislostí konstanty K od užitých potenciálů. Dle *Orlicha* **) platí pro hodnotu K

$$K = \frac{D}{1 + A(P_0 - P_1)(P_0 - P_2) + B(P_1 - P_2)^2}$$

a tedy při metodě I ($P_0 = 0$; $P_1 = P_2$)

$$K_I = \frac{D}{1 + AP_1^2},$$

při metodě II ($P_2 = 0$, $P_0 = \frac{P_1}{2}$)

$$K_{II} = \frac{D}{1 + (B - \frac{1}{4}A)P_1^2}.$$

Poněvadž však konstanta B je značně větší než A (pro užitý stroj bylo asi $A \doteq 7 \cdot 10^{-7}$, $B \doteq 8 \cdot 10^{-6}$), je patrno, že hodnoty K_I ubývá s rostoucím potenciálem značně pomaleji než

*) Změna korekce ($\gamma' - \gamma$) souvisela pravděpodobně s proměnným nábojem vodovodu a tím celého okolí elektrometru a s tou okolností, že obal elektrometru nechrání dokonale kvadranty. O správnosti úsudku tohoto svědčí ta okolnost, že připojení obalu k vodovodu mělo za následek zvětšení korekce až na hodnotu dvojnásobnou a variace její byly pak ještě mnohem větší než v udaném příkladě.

**) E. Orlich: Ztschft. f. Instr. 23, pg. 97. 1903.

hodnoty K_{II} , čili že citlivost metody I dá se více stupňovati než metody II. Poněvadž prostředky, jež jsem měl k dispozici, nedovolovaly mi dalšího stupňování method těchto, zůstává experimentální rozhodnutí této otázky zatím nerozřešeno. *)

Budiž ještě podotknuto, že udaného zde spojení elektrometru je možno užití nejen ku srovnávání kapacit, nýbrž že stejně dobře dalo by se ho použítí pro srovnávání velikých odporů (jmenovitě elektrolytických) i velikých samoindukcí. Též stojí za povšimnutí, že měření nejsou tu omezena pouze na střídavý proud nízké frequence, nýbrž že stejně by se jich dalo užití i pro frequence vysoké. Jediná podmínka, jež pro užití tohoto způsobu měření musí býti splněna, je ta, aby měřená kapacita, samoindukce neb odpor snesly na svých pólech značnou potenciálnou diferencii.

Výsledek.

Popsány jsou dvě jednoduché metody, proveditelné skromnými prostředky, pro srovnání kapacit s chybou pouze několika málo setin procenta užitím elektrometru ve spojení, jež liší se od užívaného kvadrantového nebo jehlového pouze přepnutím obalu na jiné místo.

Brno, fysikální ústav české techniky.

O vlivu dopružování na kmity pružných těles.

Napsal dr. **Frant. Nachtikal.**

1. *Definice dopružování.* Zjev dopružování prvý pozoroval Weber. Když bylo nezkroucené hedvábné vlákno po delší dobu napiato a pak náhle puštěno, nevrátí se úplně do původní délky. O jistou část zkrátí se ihned (zjev *pružnosti*), ale pak se dále ještě po několik hodin zkracuje s ubývající rychlostí (zjev *dopružování*); konečná jeho délka je však o něco větší než délka

*) Dle informativního měření jež mi bylo možno provéstí pro metodu druhou, vycházelo, že citlivosti ubývá ještě rychleji, než by dle udané hodnoty B (určené akumulátory) vycházelo.