původní, nýbrž vypěstována předními v tom oboru mysliteli jeho doby, nikterak jemu a *Adamsovi* zásluhy neubírá, které si vydobyli dokázavše vítěznou moc mathematické analyse na poli lidského vědění.*)

O symbolech analytické geometrie a jejich upotřebení.

(Píše *K. Zahradník.*)

(Pokračování).

6. Rovnice dvou bodů b_1, b_2 buďtež

$$U_1 - \lambda_1 U_2 = 0,$$
$$U_1 - \lambda_2 U_2 = 0.$$

Každému bodu přísluší určitý poměr, jímž poloha jeho vzhledem k dvěma pevným bodům na přímce je stanovena; dvěma bodům příslušeti budou dva poměry a podíl těchto poměrů nazýváme dvojpoměrem dvou bodů vzhledem k dvěma základním bodům.**). Jsouli tedy dány základní body a_1, a_2, dále pak body b_1, b_2 příslušné poměrům λ_1, λ_2, tu značí dvojpoměr

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = q = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_1} : \frac{a_1 b_2}{a_2 b_2} = (a_1 a_2 b_1 b_2). \qquad (9)$$

Rovná-li se $\lambda_1 = -\lambda_2$, jest $q = -1$ a takové čtyři body na přímce, jejichž dvojpoměr rovná se -1, nazýváme *harmonickými* body. Čtyři body, jejichž rovnice jsou

$$U_1 = 0, \ U_1 - \lambda, \ U_2 = 0,$$
$$U_2 = 0, \ U_1 + 0, \ U_2 = 0,$$

jsou tudíž harmonické.

Dvojpoměr čtyř bodů řady bodové můžeme však i obecněji pojmouti a tázati se po dvojpoměru libovolných čtyř bodů řady bodové, daných rovnicemi

$$\begin{aligned} U_1 - \lambda_1 \ U_2 = 0, \quad U_1 - \lambda_3 \ U_2 = 0, \\ U_1 - \lambda_2 \ U_2 = 0, \quad U_1 - \lambda_4 \ U_2 = 0. \end{aligned} \qquad (10)$$

---

*) Obšírnější vylíčení důležité události této nalezne laskavý čtenář v: *El. Loomis,* The re cent progress of astronomy. Newyork 1856. *Schuhmacher,* astr. Nachrichten, různé svazky. zvlášť sv. 25—28.

**) Porovnej dr. Em. a dr. Ed. Weyr-a „Základové . . . Živa VIII. pg. 15.

Úlohu tuto převedeme na předcházející, položíme-li

$$U_1 - \lambda_1 U_2 = V_1$$
$$U_1 - \lambda_2 U_2 = V_2.$$

Řešením těchto rovnic dle U_1 a U_2 obdržíme

$$U_1 = \frac{\lambda_1 V_2 - \lambda_2 V_1}{\lambda_1 - \lambda_2},\ U_2 = \frac{V_2 - V_1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

a vložíme-li hodnoty tyto za U_1 a U_2 do rovnice (10), bude

$$V_1 = 0,\ V_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} V_2 = 0,$$

$$V_2 = 0,\ V_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} V_2 = 0;$$

dvojpoměr čtyr bodů jest tedy

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = q. \tag{11}$$

Body tyto jsou harmonické, jestli $q = -1$, v kterémžto případě přejde rovnice (11) ve

$$\lambda_1 \lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0 \tag{12}$$

7. *Involuce šesti bodů.*

Tři páry bodů téže řady bodové tvoří *involuci* šesti bodů, existuje-li pár bodů, jenž by současně všechny tři páry bodů harmonicky dělil. Rovnice daných bodů buďtež

$$\left.\begin{array}{l} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0,\ U_1 - \lambda_3 U_2 = 0,\ U_1 - \lambda_5 U_2 = 0 \\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0,\ U_1 - \lambda_4 U_2 = 0,\ U_1 - \lambda_6 U_2 = 0 \end{array}\right. \tag{13}$$

rovnice pak hledaného páru bodů

$$U_1 - l_1 U_2 = 0,$$
$$U_1 - l_2 U_2 = 0.$$

Vzhledem k rovnici (12) obdržíme tedy

$$l_1 l_2 - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$

$$l_1 l_2 - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0,$$

$$l_1 l_2 - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_5 + \lambda_6) + \lambda_5 \lambda_6 = 0.$$

Vyloučíme-li $l_1 l_2$, a $l_1 + l_2$ jakožto neznámé z těchto rovnic, obdržíme hledanou podmínečnou rovnici pro involuci

$$\begin{vmatrix} 1, & \lambda_1 + \lambda_2, & \lambda_1 \lambda_2 \\ 1, & \lambda_3 + \lambda_4, & \lambda_3 \lambda_4 \\ 1, & \lambda_5 + \lambda_6, & \lambda_5 \lambda_6 \end{vmatrix} = 0$$

aneb ve tvaru rozvinutém

$$(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_5-\lambda_2)+(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_6-\lambda_1)=0. \quad (14)$$

Z podmínečné rovnice (14) vysvítá, že pět bodů na přímce libovolně voliti můžeme, šestý pak že již polohou pěti určen jest.

Jiný tvar involuce šesti bodů obdržíme, vyjádříme-li si třetí pár bodů rov. (13) pomocí

$$U_1-\lambda_5 U_2=V_1,$$
$$U_1-\lambda_6 U_2=V_2,$$

načež přejdou ony rovnice v následující:

$$V_1=0,\ V_1-l_1 V_2=0,\ V_1-l_3 V_2=0$$
$$V_2=0,\ V_1-l_2 V_2=0,\ V_1-l_4 V_2=0$$

a rovnice involuce bude pak

$$l_1 l_2-l_3 l_4=0,$$

již též z (14) obdržíme, položíme-li $\lambda_5=0$, $\lambda_6=\infty$ a zaměníme-li současně λ s l.

Přihlížíme-li k významu geometrickému veličiny l (čl. 5), obdržíme, označíce základní body, příslušné rovnicím $V_1=0$ $V_2=0$ písmeny a_1, a_2, body prvého páru b_1, b_2, druhého c_1, c_2,

$$\frac{a_1 b_1}{a_2 b_1}\cdot\frac{a_1 b_2}{a_2 b_2}-\frac{a_1 c_1}{a_2 c_1}\cdot\frac{a_1 c_2}{a_2 c_2}=0.$$

Zaměníme-li vždy dva páry bodové v této rovnici, obdržíme dvě nové rovnice *) a sice

$$\frac{b_1 c_1}{b_2 c_1}\cdot\frac{b_1 c_2}{b_2 c_2}-\frac{b_1 a_1}{b_2 a_1}\cdot\frac{b_1 a_2}{b_2 a_2}=0$$

$$\frac{c_1 a_1}{c_2 a_1}\cdot\frac{c_1 a_2}{c_2 a_2}-\frac{c_1 b_1}{c_2 b_1}\cdot\frac{c_1 b_2}{c_2 b_2}=0$$

---

*) Pravíme-li, že a_i jest sdružený bodu b_i, můžeme podati následující význam rovnic uvedených: Tři páry bodů a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 tvoří involucí, rovná-li se dvojpoměr libovolných čtyr těchto bodů dvojpoměru bodů sdružených. Rovnice (11) plynou tedy z rovnosti následujících dvojpoměrů

$$(a_1\, b_1\, a_2\, a_3)=(b_1\, a_1\, b_2\, b_3),$$
$$(a_2\, b_2\, a_3\, a_1)=(b_2\, a_2\, b_3\, b_1),$$
$$(a_3\, b_3\, a_1\, a_2)=(b_3\, a_3\, b_1\, b_2).$$

Tuto vlastnost dvojpoměru uvádí *Chasles* ve svém „Aperçu historique" pg. 329. (překlad Sohnke) za výměr involuce šesti bodů. Porovnej dr. *Em.* a dr. *Ed. Weyr* „Základové vyšší geometrie" díl I. pg. 87. a *Hesse*-ho „Vorlesungen..." pg. 55.

Každá z těchto rovnic podmiňuje obě ostatní.

8. Prvé než podáme ostatní rovnice involuce šesti bodů, vyložíme jednu větu, jíž k odvození oněch rovnic třeba.

V článku (4) ukázali jsme, že $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$ značí nám rovnici bodu ležícího na přímce spojující body U_1 a U_2 [λ_1 a λ_2 jsou koëfficienty číselné, třebať tu jen veličinou λ_1 děliti a položiti $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\lambda'$, abychom převedli tvar tento na onen ve článku (4)], neb souřadnice této přímky vyhovují jak rovnici $U_1 = 0$ tak $U_2 = 0$ tudíž vyhovují též rovnici bodu, jenž na přímce $U_1 U_2$ leží. Máme-li tedy rovnice tří bodů $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, leží tyto na přímce, stává-li totožně

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 \equiv 0.$$

Rovnice tato nám totiž vyjádřuje, že

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \equiv -\lambda_3 U_3,$$

z čehož patrno, že souřadnice přímky spojující body U_1 a U_2, jelikož vyhovují rovnicím těchto bodů o sobě, i rovnici bodu U_3 vyhověti musí, to jest bod U_3 leží na přímce $U_1 U_2$, z čehož plyne věta:

Máme-li tři body $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, ležící na téže přímce, tu vždy můžeme tři činitele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ určiti tak, že identicky jest

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_2 U_3 \equiv 0. \tag{15}$$

9. Dané-li jsou tři body U_1, U_2, U_3, jež neleží na téže přímce, můžeme vždy rovnici jiné přímky U vyjádřiti pomocí symbolů daných tří bodů a to tvarem

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0$$

neb je-li obecně

$$U_k \equiv u x_k + v y_k + 1 = 0 \tag{16}$$

tu přejde rovnice (13) ve

$$u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + v(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0,$$

kterážto rovnice představuje nám rovnici bodu $U \equiv ux + vy + 1 = 0$, položíme-li

$$\begin{aligned} \varrho\, x &\equiv \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ \varrho\, y &\equiv \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ \varrho\, 1 &\equiv \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{aligned} \tag{17}$$

Souřadnice rovnoběžné tohoto bodu jsou

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$
$$y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \tag{18}$$

V rovnicích těchto zahrnutý jest zákon všeobecnějšího pojímání souřadnic, což pouze zde podotýkáme, neb rozbor jejich ponecháváme si pro příští dobu, kde o geometrické příbuznosti šíře pojednáme.

Násobíme-li prvou z rovnic (17) $-\frac{\lambda}{\varrho} u$, druhou $-\frac{\lambda}{\varrho} v$, třetí $-\frac{\lambda}{\varrho}$ a sčítáme-li pak tyto rovnice, obdržíme vzhledem k rovnici (16)

$$\lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 \equiv 0,$$

což nám podává následující větu:

„Známe-li čtyři body $U_k = 0$, $(k = 0, 2, 3, 4)$ neležící na téže přímce, tu vždy můžeme nalezti čtyři činitele λ, že bude identicky

$$\Sigma \lambda_k U_k \equiv \lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 \equiv 0.$$

Kdy značí rovnice (18) souřadnice těžiska trojúhelníku $U_1 U_2 U_3$?

10. Porovnáme-li toto vyvinování s oným, jež jsme provedli při souřadnicích bodových,*) tu shledáváme, že každý vzorec uvedený dvojnásob čísti můžeme dle toho pojímáme-li proměnné co souřadnice bodové neb přímkové. Tato poznámka mohla nahraditi celé toto vyšetřování, jeví nám takto úplně zákon reciprocity bodu a přímky v rovině, jejž v plné jeho všeobecnosti dokážeme později. Tak na příklad jsou následující věty reciproké:

Dva body stanovují přímku; bod se pohybuje na přímce; tři body leží na přímce, atd.	Dvě přímky stanovují bod; přímka se otáčí kolem bodu; tři přímky protínají se v bodě jediném, atd.

11. Doneseme ještě několik slov o involuci šesti bodů, ač vyvinutí bude totožné jako při involuci šesti přímek. Dle výměrů involuce (čl. 7.) tvoří následující tři páry bodů

$$U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \quad U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \quad U_1 - \lambda_3 U_2 = 0$$
$$U_1 + \lambda_1 U_2 = 0, \quad U_1 + \lambda_2 U_2 = 0, \quad U_1 + \lambda_3 U_2 = 0$$

*) Časopis českých mathematiků díl II. pg. 172, 266.

involuci, neb body $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ oddělují každý z těchto párů harmonicky. Rovnice těchto šesti bodů jsou lineárně složené ze symbolů bodů U_1 a U_2. Místo dvou symbolů upotřebiti můžeme tří, totiž V_1, V_2, V_3, kladouce

$$\begin{aligned} V_1 &= (\lambda_2-\lambda_3)(U_1-\lambda_1 U_2) \\ V_2 &= (\lambda_3-\lambda_1)(U_1-\lambda_2 U_2) \\ V_3 &= (\lambda_1-\lambda_2)(U_1-\lambda_3 U_2) \end{aligned} \tag{19}$$

Jelikož součet identicky jest roveň nulle, leží body V_1, V_2, V_3 na přímce. Stanovíme-li si z rovnic pro V_1 a V_2 výrazy U_1 a U_2 vyjádřené pomocí V_1 a V_2 a vložíme-li tyto do rovnice

$$U_1 + \lambda_3 U_2 = 0$$

obdržíme

$$U_1 + \lambda_3 U_2 = \frac{V_1}{\dfrac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\lambda_1}} - \frac{V_2}{\dfrac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}} = 0. \tag{20}$$

Podobně vložíme-li U_1 a U_2 stanovené z rovnic V_2 a V_3 do rovnice $U_1 + \lambda_1 U_2 = 0$ a z rovnic V_3 a V_1 stanovené U_1 a U_2 do rovnice $U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$, obdržíme výsledky, jež z rovnice (20) cyklickou záměnou přípon při λ a V plynou.

Zavedeme-li místo

$$\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} = l_1, \quad \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\lambda_1} = l_2, \quad \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = l_3,$$

přejdou rovnice daných tří párů bodů vzhledem ku (19) a (20) v následující

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 0$$

$$\frac{V_3}{l_3} - \frac{V_2}{l_2} = 0, \quad \frac{V_1}{l_1} - \frac{V_3}{l_3} = 0, \quad \frac{V_2}{l_2} - \frac{V_1}{l_1} = 0,$$

kde veličiny l právě tak jak λ jsou libovolné. Označíme-li bod vyjádřený rovnicí $\frac{V_3}{l_3} - \frac{V_2}{l_2} = 0$ zkrátka b_1 a podobně ostatní, bod pak příslušící rovnici $V_k = 0$ písmenem a_k, obdržíme vzhledem k rovnici (8)

$$\frac{l_1}{l_3} = \frac{a_1 b_2}{a_3 b_2}, \quad \frac{l_2}{l_1} = \frac{a_2 b_3}{a_1 b_3}, \quad \frac{l_3}{l_3} = \frac{a_3 b_1}{a_2 b_1}.$$

Znásobíme li rovnice tyto, obdržíme

$$\frac{a_1 b_2 \,.\, a_2 b_3 \,.\, a_3 b_1}{a_3 b_2 \,.\, a_1 b_3 \,.\, a_2 b_1} = 1, \tag{21}$$

rovnici to vyjadřující nám involuci šesti bodů, z níž záměnou

b_1 s a_1 neb b_2 s a_2 neb b_3 s a_3 nové rovnice obdržíme pro tutéž podmínku. Tak celkem sedm rovnic obdržíme, jež prvý Désargues*) udal.

12. *Rovnice páru přímek.* — Rovněž, jako pár přímek, tak i pár bodů součinem rovnic se vyjadřuje, z nichž zmíněný pár se skládá. Jsou-li $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ rovnice dvou bodů, bude

$$U_1 U_2 = 0 \tag{22}$$

rovnice páru bodů; neboť souřadnice přímky, kteráž buď jedním neb druhým bodem probíhá, rovnici (22) vyhovuje a naopak všechny přímky, jejichž souřadnice rovnici (22) vyhovují, jedním neb druhým bodem procházejí. Provedeme-li v (22) naznačený výkon, obdržíme rovnici tvaru

$$a_{11} u^2 + 2a_{12} uv + a_{22} v^2 + 2a_{13} u + 2 a_{23} v + a_{33} = 0. \tag{23}$$

Vysvítá samo sebou, že všeobecná rovnice stupně druhého mezi souřadnicemi u, v značí pár bodů jen pod tou podmínkou, možno-li ji rozložiti ve dva lineárné činitele**) tedy ve

$$\lambda (u x_1 + v y_1 + 1)(u x_2 + v y_2 + 1) = 0, \tag{24}$$

v kteréžto rovnici jest λ koefficient číselný. Rovná-li se (24) identicky (23), což musí býti, možno-li rovnici (23) ve dva lineárné faktory rozložiti, rovnají se koefficienty příslušných proměnných a tak obdržíme mezi neznámými λ, x_1, x_2 y_1 y_2 šest

---

*) *Desargues* (1593 — 1662) zavedl pojem involuce do geometrie, jak se toho z listu *Beaugranda*, v němž kritisuje spisy Desargues-ovy, nadepsaném: „Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan" dovídáme: *Chasles*, Apercu historique .. pag. 72. Rovnice (21) plyne z rovnosti dvojpoměru

$$(a_1 a_2 a_3 b_1) = (b_1 b_2 b_3 a_1)$$

podobně ostatní. Úplně sestavené nalezají se v uvedeném spisu Chaslesově „Aperçu historique" pg. 318. Splynou-li dva příslušné body v jeden, tedy $a_3 = b_3 = c$, obdržíme involuci pěti bodů atd. Totéž vyvinuto velmi jasně ve spisu uvedeném (Živa VIII.) od dr. Em. a dr. *Ed. Weyra*, kde též konstrukce pro jednotlivé případy udány jsou.

**) Vyvození zde podávám pro rovnici páru bodů dle *Hesse*-ho, jenž je ve svém spisu „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises". Teubner pg. 88. pro rovnici páru přímek podal; zcela obdobné. *Salmon* podává ve své „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" překl. W. Fiedler, tři jiná vyvození pg. 115.

rovnic, z nichž vyloučením proměnných obdržíme podmínečnou rovnici hledanou. Zmíněné rovnice jsou

$$a_{11} = \lambda x_1 x_2 \quad a_{12} = \frac{\lambda}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad a_{13} = \frac{\lambda}{2}(x_1 + x_2)$$

$$a_{22} = \lambda y_1 y_2 \quad a_{23} = \frac{\lambda}{2}(y_1 + y_2) \qquad a_{33} = \lambda \tag{25}$$

Pišme k vůli souměrnosti

$$a_{11} = \frac{\lambda}{2}(x_1 x_2 + x_2 x_1), \; a_{22} = \frac{\lambda}{2}(y_1 y_2 + y_2 y_1) \; a_{33} = \frac{\lambda}{2}(1+1)$$

a seřaďme si rovnice tyto ve tři skupeniny a sice

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\lambda}{2}(x_1 x_2 + x_2 x_1), & a_{12} &= \frac{\lambda}{2}(y_1 x_2 + x_1 y_2), & a_{13} &= \frac{\lambda}{2}(x_1 + x_2) \\ a_{12} &= \frac{\lambda}{2}(x_1 y_2 + y_1 x_2), & a_{22} &= \frac{\lambda}{2}(y_1 y_2 + y_2 y_1), & a_{23} &= \frac{\lambda}{2}(y_1 + y_2) \\ a_{13} &= \frac{\lambda}{2}(x_1 + x_2) & a_{23} &= \frac{\lambda}{2}(y_1 + y_2) & a_{33} &= \frac{\lambda}{2}(1+1). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Buďtež u_1, v_1 souřadnice přímky, kteráž oba body vyjádřené rovnicemi

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + v_1 y_1 + 1 &= 0 \\ u_1 x_2 + v_1 y_2 + 1 &= 0, \end{aligned} \tag{27}$$

spojuje. Znásobíme-li každou skupeninu ve (26) posloupně $u_1, v_1, 1$ a sečteme-li pak, obdržíme vzhledem k rovnicím (27)

$$\begin{aligned} a_{11} u_1 + a_{12} v_1 + a_{13} &= 0 \\ a_{12} u_1 + a_{22} v_1 + a_{23} &= 0 \\ a_{13} u_1 + a_{23} v_1 + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Vyloučením u_1 a v_1 z těchto rovnic obdržíme hledanou podmínečnou rovnici

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

aneb ve tvaru rozvinutém

$$a_{11} a_{22} a_{33} + 2 a_{13} a_{12} a_{23} - a_{11} a^2_{23} - a_{22} a^2_{13} - a_{33} a^2_{12} = 0; \tag{28}$$

že tatáž rovnice platí pro podmínku, by rovnice stupně druhého

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0 \tag{29}$$

značila pár přímek, rozumí se samo sebou, chod je docela týž jako při případu předcházejícím.

13. *Vzdálenost dvou bodů.* — Vzdálenost dvou bodů vyjádřených rovnicí (23) obdržíme pomocí rovnic (25), utvoříme-li si rozdíly $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$. Máme takto

$$\lambda^2 (x_1 - x_2)^2 = 4 (a^2_{13} - a_{11} a_{33})$$
$$\lambda^2 (y_1 - y_2)^2 = 4 (a^2_{23} - a_{22} a_{33}).$$

Sečteme-li rovnice tyto, obdržíme vzhledem k $\lambda = a_{33}$ pro vzdálenost d páru bodů daných rovnicí (23)

$$d^2 = \frac{4}{a^2_{23}} [(a^2_{13} - a_{11} a_{33}) + (a^2_{23} - a_{22} a_{33})]. \tag{30}$$

Úloze této odpovídá stanovení úhlu páru přímek vyjádřeného rovnicí (20), kterouž též ve tvaru

$$\lambda (u_1 x + v_1 y + 1) (u_2 x + v_2 y + 1) = 0$$

psáti můžeme.

Připomeneme-li, že $u_1 x + v_1 y = 0$ jest rovnice přímky rovnoběžné, vedené počátkem souřadnic ku přímce $u_1 x + v_1 y + 1 = 0$ tu třeba pouze stanoviti úhel rovnoběžek vedených počátkem, jichž rovnici obdržíme, položíme-li členy stupně druhého rovny nulle, tedy

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 = 0, \tag{31}$$

z kteréžto rovnice plyne ihned tangenta úhlu uzavřeného φ

$$tg\, \varphi = \frac{\sqrt{a^2_{12} - a_{11} a_{22}}}{a_{11} + a_{22}}. \tag{32}$$

Přímky páru stojí k sobě kolmo, když $a_{11} = - a_{22}$, jsou však rovnoběžné, jestli $a^2_{12} = a_{11} a_2$.

14. *Záměna souřadnic přímkových.* — Budiž bod O' novým počátkem souřadnic a rovnice jeho

$$u\xi + v\eta + 1 = 0, \tag{33}$$

kdež ξ, η jsou jeho souřadnice rovnoběžné (bodové). Označmež písmeny α, β úhly, jež nové osy $O'X'$, $O'Y'$ uzavírají s dřívější osou úseček. Budiž dále m určitý bod, jehož souřadnice vzhledem k starým osám jsou x, y, vzhledem k novým však x', y', úhel starých souřadnic $(XY) = \Theta$, nových $(X'Y') = \beta - \alpha = \Theta'$, tu jsou známé vzorce převodné pro souřadnice rovnoběžné:

$$\begin{aligned} x &= \xi + \frac{x' \sin(\Theta - \alpha) + y' \sin(\Theta - \beta)}{\sin \Theta} \\ y &= \eta + \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \Theta}. \end{aligned} \tag{34}$$

Přejdeme-li od nových ku starým osám, tu platí naopak

$$\begin{aligned} x' &= \frac{(x-\xi)\sin\beta-(y-\eta)\sin(\Theta-\beta)}{\sin\Theta'} \\ y' &= \frac{-(x-\xi)\sin\alpha+(y-\eta)\sin(\Theta-\alpha)}{\sin\Theta'} \end{aligned} \tag{35}$$

Buďtež nyní u, v souřadnice přímky vzhledem k starým osám, a u', v' souřadnice téže přímky vzhledem k novým osám, tudíž rovnice její

v I. soustavě: $ux+vy+1=0$ (36)

v II. soustavě: $u'x'+v'y'+1=0$. (37)

Vložíme-li do rovnice (36) hodnoty z (34), a porovnáme-li výsledek s (37), obdržíme

$$\begin{aligned} u' &= \frac{u\sin(\Theta-\alpha)+v\sin\alpha}{(u\xi+v\eta+1)\sin\Theta} \\ v' &= \frac{u\sin(\Theta-\beta)+v\sin\beta}{(u\xi+v\eta+1)\sin\Theta}\,; \end{aligned} \tag{38}$$

podobně zaveďme hodnoty (35) do rovnice (37), a porovnejme výsledek s (36), označíce souřadnice starého počátku vzhledem k novým osám ξ', η'. Ze vzorce (35) plyne:

$$\begin{aligned} \xi'\sin\Theta' &= -\xi\sin\beta+\eta\sin(\Theta-\beta) \\ \eta'\sin\Theta' &= \xi\sin\alpha-\eta\sin(\Theta-\alpha). \end{aligned}$$

Vzhledem k těmto hodnotám za ξ', η' plyne z naznačeného porovnání

$$\begin{aligned} u &= \frac{u'\sin\beta-v'\sin\alpha}{(u'\xi'+v'\eta'+1)\sin\Theta'} \\ v &= \frac{-u'\sin(\Theta-\beta)+v'\sin(\Theta-\alpha)}{(u'\xi'+v'\eta'+1)\sin\Theta'}\,. \end{aligned} \tag{39}$$

Rovnice (38) a (39) jsou hledané vzorce*) pro záměnu os v souřadnicích přímkových, přecházíme-li od soutavy kosoúhlé k jiné soustavě kosoúhlé. Vzorce pro pravoúhlé osy snadno si odvodíme z uvedených, položíme-li $\Theta=90^\circ$, $\Theta'=90^\circ$.

15. *Věta Pappus-ova.* — Dříve než se obrátíme k upotřebení vět uvedených, připojíme ještě jednu větu důležitou, pomocí ní řešení mnohých úloh a konstrukcí odvoditi můžeme.

Budiž bod v vrchol svazku paprskového $P_1-\lambda P_2=0$; a mimo něj přímka $A=0$. Svazek tento zkrátka znakem (v)

*) Vzorce tyto uvádí L. Painvin ve svém spise: Principes de la Geometrie Analytique. pg. 229; 1866. Paris, Gauthier Villars.

označíme, paprsek příslušný hodnotě $\lambda = \lambda_k$ písmenem B_k a rovnici jeho $B_k = 0$. Každý paprsek svazku (v) protíná přímku A v jednom bodě a naopak každým bodem přímky A, pojímáme-li ji za řadu bodovou, probíhá jediný jen paprsek daného svazku. Svazek (v) a řada bodová A jsou tudíž ve vztahu jednoznačném a ihned dokážeme, že dvojpoměr libovolných čtyř paprsků svazku (v) rovná se dvojpoměru příslušných čtyř bodů přímky A. Neb buďtež B_1, B_2, B_3, B_4 čtyři paprsky tohoto svazku, jimž odpovídají body a_1, a_2, a_3, a_4 co jejich průseky s přímkou A a pojímejmež B_1 a B_2 za paprsky základné, tudíž a_1, a_2 za základné body, tu poměr vzdálenosti [1]) bodu a_3 od přímek B_1 a B_2 jest:

$$\frac{B'_1}{B'_2} = \frac{sin\,(B_1\,B_3)}{sin\,(B_2\,B_3)} = \frac{\overline{a_1\,a_3}\;sin\,(B_1\,A)}{\overline{a_2\,a_4}\;sin\,(B_2\,A)},$$

a podobně pro poměr vzdálenosti bodu b_4 od přímek B_1 a B_2

$$\frac{B''_1}{B''_2} = \frac{sin\,(B_1\,B_4)}{sin\,(B_2\,B_4)} = \frac{\overline{a_1\,a_4}\;sin\,(B_1\,A)}{\overline{a_2\,a_4}\;sin\,(B_2\,A)}.$$

Podíl těchto poměrů dává nám:

$$\frac{sin\,(B_1\,B_3)}{sin\,(B_2\,B_4)} : \frac{sin\,(B_1\,B_4)}{sin\,(B_2\,B_4)} = \frac{a_1\,a_2}{a_2\,a_3} : \frac{a_1\,a_4}{a_2\,a_4}$$

aneb

$$(B_1\,B_2\,B_3\,B_4) = (a_1\,a_2\,a_3\,a_4)$$

čímž uvedená věta stvrzena. [2]) Tato věta jest pro geometrii pro-

---

[1]) Předpokládáme rovnici přímky B ve tvaru normálním; kdyby rovnice přímky $B \equiv ax + by + c = 0$, tu vzdálenost bodu b_3 (x_3, y_3), od této přímky bude $\frac{B'}{\sqrt{a^2+b^2}}$, kde B' značí výsledek substituce souřadnic bodu b_3 do rovnice přímky B, však hodnota dvojpoměru nezávisí na těchto koefficientech $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, neb tyto dělením odpadávají.

[2]) Větu tuto uvádí Pappus (žil ve čtvrtém století po Kr.) ve svém spisu (Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Fr. Comandino in latinum conversae et commentariis illustratae. Pisanii 1588) VII. 129; praví: „Prochází-li bodem čtyři přímky, tvoří tyto na příčce v rovině oněch přímek vedené čtyři úseky, jež jsou v určitém stálém poměru, ať již je vedena příčka jakkoliv.“ Viz *Chasles*: Aperçu... překl. Sohnke pg. 31., kdež p. Chasles rozbor a důležitost této věty udává, jakož i upotřebení, jakého u pozdějších geometrů v theorii křivek nabyla.

jektivní velmi důležitá; vrátíme se k ní později, neb chceme uvésti dříve upotřebení některá souřadnic přímkových a tudíž poukážeme jen k bezprostřednímu výsledku, jenž z této věty plyne.

Libovolná přímka protíná svazek harmonický čtyř přímek v bodech harmonických.	*Spojíme-li s libovolným bodem čtyři harmonické body, obdržíme svazek harmonický čtyř přímek.*
Libovolná přímka protíná involuci paprskovou v involuci bodové.	*Involuce bodová promítá se z libovolného bodu v involuci paprskové.*

(Pokračování.)

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.)*

(Dokončení.)

67. Výpočet koefficientů vztahuje Naumann na tu výminku, že polární hrany H, D tvaru mPn odtínají hlavní osu t ve vzdálenosti $t' = mt$, a pobočné hrany jednu vedlejší osu r ve vzdálenosti $r = 1$, druhou ve vzdálenosti nr, kdežto meziosa $p = \frac{n\sqrt{3}}{n+1}$, při čemž v hraně H končí se meziosa p a v hraně D vedlejší osa $r = 1$.

Z dvou hran dá se třetí hrana vypočísti a pak jest na př. pro známé hrany D, S

$$mt = tang\,\tfrac{1}{2}S \,.\, sin\,(r,s),$$

$$cos\,(r,s) = \frac{cos\,\frac{1}{2}D}{sin\,\frac{1}{2}S},$$

$$n - {}^1/_2 = tang\,(r,s - 30^0)\sqrt{{}^3/_4}.$$

Pro známé hrany H, S jest

$$mt = tang\,\tfrac{1}{2}S \,.\, sin\,(150^0 - p,s),$$

$$cos\,(p,s) = \frac{cos\,\frac{1}{2}H}{sin\,\frac{1}{2}S},$$

$$n - {}^1/_2 = tang\,(120^0 - p,s)\sqrt{{}^4/_4}.$$