Karel Zahradník

O symbolech analytické geometrie a jejich upotřebení. [V.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 5, 199--206

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123243`

křivky C_3, pak zahrnuje bod u_1'' též body u_2'', u_3'' a všecky tři tyto body nalezají se s třetími průseky u_1', u_2', u_3' křivky C_3 a přímek P_1, P_2, P_3 na též kuželosečce; t. j. jinými slovy: kuželosečka procházející body u_1, u_2, u_3 a dotýkající se křivky C_3 v bodě u_1'', má v bodě tom s křivkou C_3 styk trojbodový.

O symbolech analytické geometrie a jich upotřebení.

(Píše *K. Zahradník.*)

(Dokončení.)

Upotřebení.

16. *Má se určiti podmínka, vedle které tři body na stranách trojúhelníku leží na přímce.*

Budiž $a_1 a_2 a_3$ daný trojúhelník, na jehož stranách $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_2 a_3}$ $\overline{a_3 a_1}$ zvoleny posloupně body b_3, b_1, b_2. Jsou-li $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ rovnice jeho vrcholů a_1, a_2, a_3, budou rovnice bodů b_k jež obecně B_k označiti chceme

$$\begin{aligned} B_1 &\equiv U_2 - \lambda_1 \, U_3 = 0, \\ B_2 &\equiv U_3 - \lambda_2 \, U_1 = 0, \\ B_3 &\equiv U_1 - \lambda_3 \, U_2 = 0. \end{aligned}$$

Znásobíme-li druhou rovnici λ_1, třetí $\lambda_1 \lambda_2$ a sečteme-li je, obdržíme

$$(1 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \, U_2 = 0 \equiv B_1 + \lambda_1 \, B_2 + \lambda_1 \lambda_2 \, B_3,$$

tudíž dle čl. (8) třeba, by

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1,$$

aneb přejdeme-li ku geometrickému významu koefficientu λ (čl. 5.), obdržíme (obr. 20).

$$\frac{a_2 b_1 \, . \, a_3 b_2 \, . \, a_1 b_3}{a_3 b_1 \, . \, a_1 b_2 \, . \, a_2 b_3} = 1,$$

relaci to, vyjádřující nám větu *Menelaovu: Rozdělují-li tři body*

b_1, b_2, b_3 strany $a_2 a_3$, $a_3 a_1$, $a_1 a_2$ daného trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$, tak že součiny úseků nesbíhajících se rovnají, leží také body na přímce. *)

Z uvedené podmínečné rovnice plyne, že rovná-li se $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, tu $\lambda_3 = +1$ býti musí t. j. přímka, jež spojuje středy dvou stran, je rovnoběžná ku straně třetí.

17. Rovnice takých tří bodů b_1, b_2, b_3 jsou obecně následujícího tvaru (obr. 21.)

$$B_3 \equiv \lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2 = 0,$$
$$B_1 \equiv \lambda_2 U_2 - \lambda_3 U_3 = 0,$$
$$B_2 \equiv \lambda_3 U_3 - \lambda_1 U_1 = 0,$$

neb součet jejich rovná se identicky nulle. Sestrojme na každé straně trojúhelníku bodům b_k body harmonicky sdružené b'_k; rovnice jejich budou (čl. 10.)

$$B'_3 \equiv \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$$
$$B'_1 \equiv \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0$$
$$B'_2 \equiv \lambda_3 U_3 + \lambda_1 U_1 = 0$$

a tu patrno, že jest

$$B'_1 - B'_2 + B_3 \equiv 0$$
$$B'_2 - B'_3 + B_1 \equiv 0$$
$$B'_3 - B'_1 + B_3 \equiv 0$$

což nám podává větu tuto:

Protneme-li strany daného trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$ přímkou P v bodech b_1, b_2, b_3 a sestrojíme-li ku dvěma bodům průsečným na př. b_2, b_3 jejich harmonicky sdružené body b'_2, b'_3 vzhledem k vrcholům trojúhelníku, leží tyto body s třetím průsečíkem b_1 na přímce.

Spojme nyní bod b'_k s vrcholem a_k. Libovolný bod této přímky vyjádřiti můžeme rovnicí

$$B'_k - \mu_k U_k = 0,$$

uvažujíce přímku proloženou body a_k, b'_k co řadu bodovou (čl. 4.). Koefficient μ_k jest parametrem bodu proměnného této řady. Určité hodnotě za μ_k přisluší určitý bod této řady a tudíž patrno, že bod t, jehož rovnice jest

$$T_1 \equiv \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0$$

této řadě přisluší, neb jej obdržíme za hodnotu $u_k = -\lambda_k$, kde

*) Dr. Ed. a Em. Weyr: „Základové vyšší geometrie“. (Živa) pg. 25.

$k = 1, 2, 3$. Patrno tudíž, že přímky $\overline{a_1 b_1'}$, $\overline{a_2 b'_2}$, $\overline{a_3 b'_3}$ bodem t procházejí, jelikož bod tento jest společným, považujeme-li je za řady bodové a klademe-li $\mu_k = - \lambda_k$ ($\varkappa = 1, 2. 3$). I máme tudíž větu:

Protneme-li příčkou strany trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$ v bodech b_3, b_1, b_2 a sestrojíme-li k bodům těmto vzhledem k vrcholům trojúhelníku body harmonicky sdružené b'_3, b'_1, b'_2, tu prochází přímky spojující body tyto s protilehlými vrcholy trojúhelníka, bodem jediným. *)

Přihlížíme-li ku obrazci, tu snadně nahlídneme, že tuto větu vyjádřiti můžeme též následovně:

Protneme-li strany trojúhelníka libovolnou příčkou a sestrojíme-li k jednomu průsečíku na př. b_1 harmonicky bod sdružený b'_1 vzhledem k vrcholům trojúhelníka $a_2 a_3$, tu prochází přímka $\overline{a_1 b'_1}$, jež bod tento s protilehlým vrcholem spojuje, bodem, v němž se přímky, spojující ostatní dva průseky b_2, b_3 příčky se stranami trojúhelníku s protilehlými vrcholi a_2, a_3, protínají.

18. *Harmonické vlastnosti skupení čtyřbodového* plynou cele ze čl. 17.; neb přihlížíme-li místo k trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$ k čtyrúhelníku $a_2 a_3 b'_2 b'_3$, budou body a_1, b_1, t průseky diagonal tedy body diagonálnými a tu ihned dokázati můžeme, že přímky spojující jeden bod diagonálný s ostatními a s rohy čtyrúhelníku, protínají strany čtyrúhelníku v bodech harmonických. Na př. probíhají diagonálným bodem t paprsky $\overline{ta_2}$, $\overline{ta_3}$, $\overline{tb_1}$, $\overline{tb'_1}$ a tyto protínají stranu $\overline{a_2 a_3}$ v bodech a_2, a_3, b_1, b'_1. Rovnice těchto bodů jsou dle předcházejícího článku

$$U_2 = 0, \ \lambda_2 U_2 - \lambda_3 U_3,$$
$$U_3 = 0, \ \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3.$$

Tvar těchto rovnic podává nám současně důkaz věty uvedené. Na základě této věty můžeme snadně k daným třem

*) Viz *Hesse*: Vorlesungen pg. 60., kdež tyto dvě věty jsou uvedeny a dokázány. Důkaz, jejž zde podávám, jest v podstatě týž, jako p. Hesse-ho, avšak kratší a přehlednější. Bod v obrazci značím malým písmenem na př. b_k, rovnici jeho příslušným písmenem velikým tudíž B_k vyjma rovnice bodů základných, pro něž pravidlem písmena U upotřebuji s příponou bodu.

bodům téže přímky nalézti bod harmonicky sdružený. Konstrukce vysvítá z pohledu na obr. 21. Jsou-li dány na př. tři body a_3, a_2, b_1 na přímce P, tu proložíme dvěma body na př. a_3, a_2 libovolné dvě přímky, protínající se v bodě a_1. Z bodu b_1 veďme příčku Q, ta protíná přímky $\overline{a_1 a_3}$, $\overline{a_1 a_2}$ v bodech b'_2, b'_3, spojíme-li bod a_1 průsekem přímek $\overline{a_2 b'_2}$, $\overline{a_3 b'_3}$, totiž bodem t, obdržíme na P harmonicky bod sdružený b'_1 k bodu b_1 vzhledem k bodům a_3, a_2 (obr. 22).

19. *Těžisko trojúhelníku* $a_1 a_2 a_3$. Přejde-li přímka P v přímku úběžnou (nekonečně vzdálenou), nabudou rovnice bodů b_1, b_2, b_3, (čl. 17.) tvar (obr. 23.)

$$B_1 \equiv U_2 - U_3 = 0,$$
$$B_2 \equiv U_3 - U_1 = 0,$$
$$B_3 \equiv U_1 - U_2 = 0,$$

neb úběžnému bodu přísluší parametr $= 1$ (čl. 5). Rovnice bodů harmonicky sdružených b'_1, b'_2, b'_3 budou

$$B'_1 \equiv U_2 + U_3 = 0,$$
$$B'_2 \equiv U_3 + U_1 = 0,$$
$$B'_3 \equiv U_1 + U_2 = 0.$$

I vysvítá, že jsou to rovnice středů stran trojúhelníka daného a bod t stává se v tomto případě těžiskem trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$ tudíž jeho rovnice *)

$$T \equiv U_1 + U_2 + U_3 = 0.$$

20. *Průsek výšek.* Buďtež c_1, c_2, c_3 paty kolmic z vrcholů trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$ na protilehlé strany spuštěných. Rovnice bodu c_3 bude tvaru (obr. 4.)

$$C_3 \equiv U_1 - \lambda_3 U_2 = 0.$$

Jelikož jest (obr. 4.)

$$\lambda_3 = \frac{a_1 c_3}{a_2 c_3} = -\frac{\cot a_1}{\cot a_2} = -\frac{tg\, a_2}{tg\, a_1},$$

*) Značí-li $U_k = u x_k + v y_k + 1$, bude $U_1 + U_2 + U_3 = u(x_1 + x_2 + x_3) + v(y_1 + y_2 + y_3) + 3$; dělením třemi přejde tato rovnice ve tvar normální a sice $u \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} + v \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} + 1 = 0$, z čehož patrno, že souřadnice rovnoběžné těžiště ξ, η jsou

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \; \eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

bude rovnice bodu c_3

$$C_3 \equiv tg\,a_1\,U_1 + tg\,a_2\,U_2 = 0.$$

Podobně plynou rovnice bodů c_1, c_2

$$C_1 \equiv tg\,a_2\,U_2 + tg\,a_3\,U_3 = 0$$
$$C_2 \equiv tg\,a_3\,U_3 + tg\,a_1\,U_1 = 0.$$

Libovolný bod na kolmici $\overline{a_k c_k}$ ($\varkappa = 1, 2, 3$) vyjádřiti můžeme rovnicí

$$C_k - \mu_k\,U_k = 0.$$

Mění-li se μ_k, mění se poloha bodu a za určitou hodnotu parametru $\mu_k = -\,tg\,a_k$ obdržíme rovnici určitého bodu na přímce $\overline{a_k c_k}$ a sice

$$C_k + tg\,a_k\,U_k = 0$$

Klademe-li za k posloupně 1, 2, 3, nemění se rovnice tohoto bodu totiž

$$M \equiv tg\,a_1\,U_1 + tg\,a_2\,U_2 + tg\,a_3\,U_3 = 0,$$

z čehož plyne, že bod m jest společný bod výšek $a_k c_k$ ($k = 1, 2, 3$).

21. *Střed kruhu v trojúhelník vepsaného.* Vrcholem a_1 daného trojúhelníku veďme přímku rozpolující úhel při vrcholu a_1. Přímka tato protíná stranu protilehlou $\overline{a_2 a_3}$ v bodě d_1, jehož rovnice bude tvaru (obr. 23.)

$$D_1 \equiv U_2 - \lambda_1\,U_3 = 0.$$

Jak častěji již zmíněno, jest λ_1 poměr, ve kterém nám dělí bod d_1 délku strany $\overline{a_2 a_3}$ totiž (čl. 5.)

$$\lambda_1 = -\frac{a_2\,d_1}{a_3\,d_1} = -\frac{s_3}{s_1} = -\frac{\sin a_3}{\sin a_1}.$$

Vložíme-li hodnotu tuto za λ_1 do rovnice hořejší, obdržíme

$$D_1 \equiv s_2\,U_2 + s_3\,U_3 = 0$$

co rovnici bodu d_1. Podobně obdržíme rovnice bodu d_2 a d_3 cyklickou záměnou přípon. Libovolný bod na přímce $\overline{a_k d_k}$ určen jest tudíž rovnicí

$$D_k - \mu_k\,U_k = 0.$$

Za $\mu_k = -\,s_k$ obdržíme rovnici určitého bodu

$$D_k + s_k\,U_k = 0,$$

a jelikož rovnice tato se nemění, ať již $k = 1, 2, 3$, položíme, vysvítá, že bod tento přímkám $\overline{a_1 d_1}$, $\overline{a_2 d_2}$, $\overline{a_3 d_3}$ současně přísluší, t. j. přímky tyto protínají se v jediném bodě l v středu to kruhu trojúhelníku vepsaného a rovnice tohoto bodu jest

$$L \equiv s_1 U_1 + s_2 U_2 + s_3 U^3 = 0,$$

aneb, poněvadž jest $s_k = 2r \sin a_k$ $(k = 1, 2, 3)$, též

$$L \equiv \sin a_1 U_1 + \sin a_2 U_2 + \sin a_3 U_3 = 0.$$

Poznámka. Kruhů v trojúhelník vepsaných (totiž takých kruhů, jež by se dotýkaly stran daného trojúhelníku) máme čtvero. Zmíněný bod l jest střed kruhu trojúhelníku uvnitř vepsaného, ostatní tři jsou opsány zevně. Rozpolovací přímky vždy dva zevnější úhly a jeden úhel vnitřní prochází středem takého kruhu.*) Označmež střed kruhu, jehož bod styku se stranou $\overline{a_2 a_3}$ uvnitř délky $\overline{a_2 a_3}$ leží, l_1; podobně l_2, l_3. Rovnice středu l_1, l_2, l_3 jsou posloupně

$$L_1 \equiv s_2 U_2 + s_3 U_3 - s_1 U_1 = 0$$
$$L_2 \equiv s_3 U_3 + s_1 U_1 - s_2 U_2 = 0$$
$$L_3, \equiv s_1 U_1 + s_2 U_2 - s_3 U_3 = 0$$

Rovnice tyto snadně se dají odvoditi, neb označíme-li průsek přímky, půlící zevnější úhel trojúhelníku při a_1, s protilehlou stranou $\overline{a_2 a_3}$ písmenem d'_1, tu patrno, že body a_2, a_3, d_1, d'_1 jsou harmonické, že totiž

$$(a_2\, a_3\, d_1\, d'_1) = -1,$$

neb paprsky rozpolující úhel vnitřní a zevnitřní dvou přímek tvoří s těmito přímkami harmonický svazek a dle čl. 15. protíná každý svazek harmonický libovolnou přímku v bodech harmonických. Je-li tedy rovnice bodu d_1

$$D_1 \equiv s_2 U_2 + s_3 U_3 = 0$$

bodu rovnice bodu d'_1

$$D'_1 \equiv s_2 U_2 - s_3 U_3 = 0,$$

a podobně pro d'_2 a d'_3.

Rovnice bodu na přímce $\overline{a_1 d'}$ jest

$$D'_1 - \mu_1 U_1 = 0,$$

podobně jsou

$$D'_2 - \mu_2 U_2 = 0$$
$$D'_3 - \mu_3 U_3 = 0$$

rovnice bodů na přímkách $\overline{a_2 d'_2}$, $\overline{a_3 d'_3}$.

Za $\mu_1 = -s_1$, $\mu_2 = -s_2$, $\mu_3 = -s_3$ tedy zkrátka za $\mu_k = -s_k$, obdržíme

$$L \equiv s_1 U_1 + s_2 U_2 - s_3 U_3 = 0_3$$

*) Zpráva I. pg. 83. 1870.

rovnice to bodu průsečného přímek $\overline{a_1 d_1}$, $\overline{a_2 d'_2}$, $\overline{a_3 d_3}$ aneb lépe řečeno společného bodu řad bodových, jichž spojnice (nosič) jsou právě přímky zmíněné. Cyklickou záměnou přípon obdržíme uvedené již rovnice ostatních dvou středů. Zjevno, že

$$L_1 + L_2 - 2s_3 U_3 \equiv 0$$
$$L_2 + L_3 - 2s_1 U_1 \equiv 0$$
$$L_2 + L_1 - 2s_2 U_2 \equiv 0$$

t. j. přímky spojující dva středy na př. l_1, l_2 kruhů trojúhelníku zevně vepsaných prochází vrcholem trojúhelníku a_3, leží totiž body l_1, l_2, a_3 na přímce.

Rovnici bodu l též psáti můžeme následovně

$$L \equiv \sin a_1 \, U_1 + \sin a_2 \, U_2 + \sin a_3 \, U_3 = 0$$

poněvadž strany trojúhelníku úměrné jsou sinusům úhlů protilehlých. Podobně arci i rovnice bodu l_1, l_2, l_3 bychom psáti mohli. *)

22. *Přímky spojující středy protilehlých stran v daném čtyrúhelníku úplném probíhají týmž bodem.*

Budiž $a_1 a_2 a_3 a_4$ daný čtyrúhelník, protilehlé strany jsou $\overline{a_1 a_3}$, $\overline{a_3 a_4}$; $\overline{a_1 a_3}$, $\overline{a_2 a_4}$; $\overline{a_1 a_4}$, $\overline{a_3 a_2}$. Středy prvého páru jsou b_1, b_2, druhého c_1, c_2, třetího d_1, d_2. Rovnice základních bodů a_k bude $U_k = 0$, tudíž jsou (obr. 5.)

$$B_1 \equiv U_1 + U_2 = 0$$
$$B_2 \equiv U_3 + U_4 = 0$$

rovnice bodů b_1 a b_2, a podobně.

$$C_1 \equiv U_1 + U_3 = 0$$
$$C_2 \equiv U_2 + U_4 = 0$$
$$D_1 \equiv U_1 + U_4 = 0$$
$$D_2 \equiv U_2 + U_3 = 0$$

rovnice bodů c a d. Rovnice přímek $\overline{b_1 b_2}$, $\overline{c_1 c_2}$, $\overline{d_1 d_2}$ uvážených co řady bodové jsou:

$$B_1 - \lambda B_2 = 0$$
$$C_1 - \mu C_2 = 0$$
$$D_1 - \nu D_2 = 0,$$

*) Body t, m, l nazýváme významnými neb znamenitými body trojúhelníku $a_1 a_2 a_3$. K těmto přidružuje se též střed kruhu trojúhelníku opsaného. Přísluší jim totiž zvláštní vlastnosti; leží všichni na téže přímce, jsouť harmonickými body atd. Vlastnosti tyto dají se velmi jednoduše odvoditi pomocí souřadnic homogeních, a tudíž ponecháváme si odvození pro dobu budoucí.

kdež λ, μ, ν jsou proměnné parametry (čl. 4.) Určitým hodnotám těchto parametrů přisluší určité body a rovná-li se $\lambda = \mu = \nu = -1$, obdržíme rovnice středu délek $\overline{b_1 b_2}$, $\overline{c_1 c_2}$, $\overline{d_1 d_2}$. Zavedeme-li tuto do posledních rovnic, obdržíme
$$S \equiv B_1 + B_2 \equiv C_1 + C_2 \equiv D_1 + D_2 \equiv U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0,$$
z čehož plyne, že bod s jest společným středem délek $\overline{b_1 b_2}$, $\overline{c_1 c_2}$, $\overline{d_1 d_2}$, jehož rovnoběžné souřadnice jsou
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4};$$
shledáváme tudíž bod s co střed středních vzdáleností bodů a_k.

23. *Dány buďtež čtyři přímky, vždy tři z nich tvoří trojúhelník a průseky výšek těchto čtyř trojúhelníků leží na přímce.*

Dané přímky buďtež P_1, P_2, P_3, P_4 (obr. 6.), kteréž tvoří trojúhelníky $P_1P_2P_3$, $P_2P_3P_4$, $P_3P_4P_1$, $P_2P_3P_4$ aneb označíme-li tyto trojúhelníky body průsečnými daných přímek, $a_1a_2a_3$, $a_1b_2b_3$, $b_1a_2b_3$, $b_1b_2a_3$; průseky výšek těchto trojúhelníků buďtež posloupně m_4, m_1, m_2, m_3, tangenty úhlů $\widehat{a_2a_1a_3}$, $\widehat{a_3b_1a_2}$, $\widehat{a_1b_2b_3}$ $\widehat{a_1a_2a_3}$, $\widehat{a_1a_3a_2}$, označmež řeckým písmenem s příponou vrchole úhlu příslušného. Body a_1, a_2, a_3 pojmeme za základní a označíme rovnice jejich, jak obyčejně, písmenami U_1, U_2, U_3, rovnice pak ostatních bodů průsečných b_1, b_2, b_3, jež téže přímce P_4 přísluší, písmeny B_1, B_2, B_3, tu máme dle čl. 20.
$$M_4 \equiv \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3 = 0$$
$$M_3 \equiv \alpha_1 U_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 = 0$$
$$M_2 \equiv \beta_1 B_1 - \alpha_2 U_2 + \beta_3 B_3 = 0$$
$$M_1 \equiv \beta_1 B_1 - \beta_2 B_2 + \alpha_3 U_3 = 0.$$

Mohli bychom rovnice bodů b vyjádřiti symboly bodů základních (čl. 17.). avšak není toho ani třeba; z tvaru rovnic již vysvítá, že následkem rovnice čtvrté algebraický součet ostatních tří identicky se rovná nulle t. j. body b_1, b_2, b_3, b_4 leží na přímce.