Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených). [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 2, 63--68

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123284

odstavci chybu přičísti, a místo čísla takto stanoveného t. j. 31,00625759 vzíti číslo 31,00626, bychom byli jisti, že toto jest buď nadbytkem nebo nedostatkem na 0,000001 přesně stanovenou třetí mocností čísla π.

Poznámka. Kdyby chyba, již opět předem stanoviti lze, byla $>$ než 1000 desítimilionin, musili bychom psáti jednotky prvého násobitele pod příslušného násobence tak, aby vyšly jednotky řádu 10000 $<$ než jest žádaný.

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených).

Podává

Vilém Jung,

s. professor při státní průmyslové škole v Brně.

(Pokračování.)

5. *Na plochách mimosměrek 2-ho stupně vyskytují se dvě soustavy povrchových přímek. Přímky téže soustavy jsou vespolek mimosměrny, kdežto přímky různých soustav se protínají.*

Plocha mimosměrek 2-ho stupně jest dána rovnicemi:

$$\left.\begin{array}{l} A + tB = 0 \\ a + tb = 0 \end{array}\right\} . \qquad (I)$$

$$\begin{aligned} A &= A_1x + A_2y + A_3z + A_4 , \\ B &= B_1x + B_2y + B_3z + B_4 , \\ a &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4 , \\ b &= b_1x + b_2y + b_3z + b_4 . \end{aligned}$$

A_k, B_k, a_k, b_k jsou konstanty, t proměnný parametr.

Vyloučením parametru t ze soustavy (I) plyne rovnice ohledně x, y, z 2-ho stupně, totiž

$$\begin{vmatrix} A & B \\ a & b \end{vmatrix} = 0,$$

jakožto rovnice plochy mimosměrek 2-ho stupně.

Znamenáme-li

$$\begin{vmatrix} A_k & B_i \\ a_k & b_i \end{vmatrix} = \varrho_{ki},$$

zní tato rovnice ve tvaru rozvinutém:

$$\varrho_{11}x^2+\varrho_{22}y^2+\varrho_{33}z^2+(\varrho_{12}+\varrho_{21})\,xy+(\varrho_{23}+\varrho_{32})\,yz$$
$$+(\varrho_{31}+\varrho_{13})\,zx+(\varrho_{14}+\varrho_{41})\,x+(\varrho_{24}+\varrho_{42})\,y$$
$$+(\varrho_{34}+\varrho_{43})\,z+\varrho_{44}=0.$$

K téže rovnici dospějeme také vyloučením parametru τ ze soustavy rovnic

$$\left.\begin{array}{l} A+\tau a=0 \\ B+\tau b=0 \end{array}\right\}, \qquad \text{(II)}$$

neboť obdržíme

$$\begin{vmatrix} A & a \\ B & b \end{vmatrix}=0.$$

Soustava rovnic (I) představuje nám jednu soustavu přímek,
„ „ (II) „ „ druhou „ „ .

Libovolná přímka (τ) soustavy (II) protíná veškeré přímky soustavy (I).

Z (I) plyne totiž krátkou přeměnou

$$A+tB+\tau a+\tau tb=0, \qquad \text{(III)}$$

t. j. rovnice roviny, v níž se nalézá přímka (t) soustavy (I).

Podobně z (II) plyne

$$A+\tau a+tB+t\tau b=0, \qquad \text{(III')}$$

t. j. rovnice, v níž se nalézá přímka (τ) soustavy (II).

Avšak (III) $\equiv$ (III'), následkem čehož jsou přímky (t) a (τ) různých soustav v téže rovině a protínají se.

Rovnice tečné roviny v bodě (x, y, z) přímky (t) dle předešlého zní:

$$\begin{vmatrix} A+tB, & B\,(xyz) \\ a+tb, & b\,(xyz) \end{vmatrix}=0,$$

t. j.

$$A+tB-\frac{B\,(xyz)}{b\,(xyz)}(a+tb)=0. \qquad \text{(IV)}$$

Tato rovnice jest totožna s (III) pro

$$\tau=-\frac{B\,(xyz)}{b\,(xyz)}.$$

Hledajíce průsečík (x, y, z) přímek (t) a (τ), obdržíme

$$\tau=-\frac{A+tB}{a+tb},$$

avšak průsečík ten leží na přímce (t), proto

$$A+tB=0$$
$$a+tb=0,$$

jest tedy

$$\tau = -\frac{\frac{d(\mathrm{A}+t\mathrm{B})}{dt}}{\frac{d(a+tb)}{dt}} = -\frac{\mathrm{B}(xyz)}{b(xyz)}.$$

Jest tedy průsečík těchto přímek totožný s dotyčným bodem.

Z toho plyne: Libovolné dvě přímky různých soustav na ploše mimosměrek 2-ho stupně stanoví tečnou rovinu, dotýkající se plochy v jejich průsečíku.

6. *Řídící plocha kuželová, příslušná ploše mimosměrek.*

Mysleme si ke každé přímce (t) plochy mimosměrek rovnoběžnou přímku (t') počátkem souřadnic, čímž obdržíme její řídící plochu kuželovou. Tato bude určena rovnicemi

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{A}=0\\ a=0\end{array}\right\},$$

znamená-li nyní

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 y + \mathrm{A}_3 z,$$
$$a \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z.$$

Stanovme dle předešlého tečnou rovinu ku řídící ploše kuželové v bodě (x, y, z) přímky (t') a obdržíme:

$$\mathrm{A}(\xi\eta\zeta) - \frac{\mathrm{A}'_1 x + \mathrm{A}'_2 y + \mathrm{A}'_3 z}{a'_1 x + a'_2 y + a'_3 z}\, a(\xi\eta\zeta) = 0.$$

Ježto ale

$$\mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 y + \mathrm{A}_3 z = 0,$$
$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0,$$

musí patrně

$$\frac{\mathrm{A}'_1 x + \mathrm{A}'_2 y + \mathrm{A}'_3 z}{a'_1 x + a'_2 y + a'_3 z} = \frac{\Sigma \pm (\mathrm{A}'_1 \mathrm{A}_2 a_3)}{\Sigma \pm (a'_1 \mathrm{A}_2 a_3)}.$$

Jest tedy tato tečná rovina, stanovená ku řídící ploše kuželové dle přímky (t'), rovnoběžné s přímkou (t) plochy mimosměrek, rovnoběžná dle odstavce 3. tohoto pojednání s rovinou asymptotickou, příslušnou přímce (t) plochy mimosměrek.

Platí tedy věty:

a) Každé přímce T plochy mimosměrek přísluší rovnoběžná přímka T' řídící plochy kuželové.

b) Asymptotická rovina, příslušná přímce T plochy mimosměrek, jest rovnoběžná s tečnou rovinou, stanovenou dle přímky T' ku řídící ploše kuželové.

7. *Tečná přímka ku ploše. Tečná rovina. Inflekční tečny. Oskulační hyperboloid.*

Plocha mimosměrek jest dána rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} A &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}\right\},$$

dále znamenejž:

$$A^{(k)} \equiv A_1^{(k)} x + A_2^{(k)} y + A_3^{(k)} z + A_4^{(k)},$$

$${}^1A \equiv A(x_1 y_1 z_1), \text{ obecně } {}^1A^{(k)} \equiv A^{(k)}(x_1 y_1 z_1).$$

Aby jistá přímka protínala povrchovou přímku $(t+h)$, musí býti v rovině, jejíž rovnicí jest:

$$A(t+h) + \mu a(t+h) = 0. \tag{I}$$

Aby obsahovala bod (x_1, y_1, z_1), musí

$${}^1A(t+h) + \mu\, {}^1a(t+h) = 0. \tag{II}$$

Vyloučením μ plyne:

$$\begin{vmatrix} A(t+h), & a(t+h) \\ {}^1A(t+h), & {}^1a(t+h) \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$\begin{vmatrix} A + hA' + \frac{h^2}{2!}A'' + \frac{h^3}{3!}A''' + \ldots, & a + ha' + \frac{h^2}{2!}a'' + \frac{h^3}{3!}a''' + \ldots \\ {}^1A + h\,{}^1A' + \frac{h^2}{2!}{}^1A'' + \frac{h^3}{3!}{}^1A''' + \ldots, & {}^1a + h\,{}^1a' + \frac{h^2}{2!}{}^1a'' + \frac{h^3}{3!}{}^1a''' + \ldots \end{vmatrix} = 0. \tag{III}$$

Má-li bod (x_1, y_1, z_1) býti na přímce (t), musí ${}^1A = 0$, ${}^1a = 0$, tak že možno podmínku (III) rozvedením a krácením veličinou h psáti

$$0 = \begin{vmatrix} A, & a \\ {}^1A', & {}^1a' \end{vmatrix} + h\left\{\begin{vmatrix} A, & a' \\ {}^1A', & \frac{1}{2!}{}^1a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A', & a \\ \frac{1}{2!}{}^1A'', & {}^1a' \end{vmatrix}\right\}$$

$$+ h^2\left\{\begin{vmatrix} A, & \frac{1}{2!}a'' \\ {}^1A', & \frac{1}{3!}{}^1a''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A', & a' \\ \frac{1}{2!}{}^1A'', & \frac{1}{2!}{}^1a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2!}A'', & a \\ \frac{1}{3!}{}^1A''', & {}^1a' \end{vmatrix}\right\} + \ldots \tag{IV}$$

Podmínku, aby jistá přímka, obsahujíc bod x_1, y_1, z_1 přímky (t), protínala soumeznou přímku $(t + dt)$, obdržíme ze (IV), položíme-li $\lim h = dt$, t. j.

$$\begin{vmatrix} A, & a \\ {}^1A', & {}^1a' \end{vmatrix} = 0, \tag{V}$$

což jest rovnicí tečné roviny v bodě x_1, y_1, z_1 přímky (t).

Takových přímek, jež mají dva soumezné body s plochou společné, jest nesčíslné množství, a všechny jsou v jedné rovině, která se zove *tečnou rovinou* plochy.

Aby přímka, obsahujíc bod (x_1, y_1, z_1) přímky (t), pronikala první, jakož i druhou její soumeznou přímku, aby měla tedy *tři* soumezné body s plochou společné (jedna z hlavních čili inflekčních tečen), musí se především vyhověti podmínce (V), a potom podmínce, kterou obdržíme ze (IV), když do ní podmínku (V) zavedeme, a zkrátivše veličinou h, položíme $\lim h = dt$.

Jest tedy jedna z inflekčních tečen určena rovnicemi

$$\begin{vmatrix} A, & a \\ {}^1A', & {}^1a' \end{vmatrix} = 0, \tag{V}$$

$$\begin{vmatrix} A, & a' \\ {}^1A', & \frac{1}{2!}\,{}^1a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A', & a \\ \frac{1}{2!}\,{}^1A'', & {}^1a' \end{vmatrix} = 0; \tag{VI}$$

druhou inflekční tečnou jest povrchová přímka (t), určena rovnicemi $A = 0$, $a = 0$.

Každému bodu povrchové přímky (t) přísluší mimo tuto přímku ještě jedna určitá inflekční tečna plochy a souhrn těchto tvoří plochu mimosměrek 2-ho stupně, tak zvaný oskulační hyperboloid.

Vyloučíme-li totiž z rovnic (V) a (VI) pomocí ${}^1A = 0$, ${}^1a = 0$ veličiny y_1, z_1, zbývá v oněch rovnicích veličina x_1 jako parametr *linearně* obsažena, tak že jeho vyloučením plyne rovnice 2-ho stupně, jakožto rovnice hledané plochy.

8. *Dotyčná křivka plochy kuželové, opsané ploše mimosměrek z bodu* (X, Y, Z), *mimo ni se nalézajícího.*

Rovnice tečné roviny v bodě (x, y, z) přímky (t) na ploše mimosměrek, určené rovnicemi

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ a &= 0, \end{aligned} \tag{I}$$

zní

$$\begin{vmatrix} A(\xi\eta\zeta), & A'(xyz) \\ a(\xi\eta\zeta), & a'(xyz) \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(II)}$$

Poněvadž má tečná rovina obsahovati bod (X, Y, Z), musí jeho souřadnice vyhověti rovnici (II), t. j.

$$\begin{vmatrix} A(XYZ), & A'(xyz) \\ a(XYZ), & a'(xyz) \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(III)}$$

Znamenáme-li

$$\begin{vmatrix} A_k & A'_i \\ a_k & a'_i \end{vmatrix} = \omega_{ki},$$

můžeme (III) psáti ve formě:

$$\begin{aligned} &(\omega_{11}X + \omega_{21}Y + \omega_{31}Z + \omega_{41})x \\ + &(\omega_{12}X + \omega_{22}Y + \omega_{32}Z + \omega_{42})y \\ + &(\omega_{13}X + \omega_{23}Y + \omega_{33}Z + \omega_{43})z \\ + &(\omega_{14}X + \omega_{24}Y + \omega_{34}Z + \omega_{44}) = 0. \qquad \text{(IV)} \end{aligned}$$

Dále patrno, že platí

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 = 0, \qquad \text{(V)}$$
$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0. \qquad \text{(VI)}$$

Rovnice (IV), (V), (VI) jsou ohledně x, y, z linearnými, a lze z nich snadno tyto hodnoty jakožto funkce parametru (t) stanoviti.

Tak že jsou

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \\ z &= \chi(t) \end{aligned}\right\}$$

rovnicemi dotyčné křivky, vyjádřené pomocí parametru (t).

Jest-li bod (X, Y, Z) úběžným, odvodíme snadno ze (IV) příslušnou podmínku, dělíme-li (IV) veličinou $Z = \infty$ a nahradíme-li $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$ příslušnými hodnotami.

(Pokračování.)