Alois Strnad

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 3, 131--135

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123477

Že ve vzduchu smíšeno 76·9% dusíku se 23·1% kyslíku, musí

$$M_\delta u_\delta^2 + M_\varkappa u_\varkappa^2 = M_v u_v^2,$$

při čemž M_δ značí hmotnosť dusíku, $M_\varkappa$ hmotnosť kyslíku a M_v hmotnosť jich směsi: vzduchu. Obdobně $M_\delta u_\delta^2$, $M_\varkappa u_\varkappa^2$, $M_v u_v^2$ značí dvojnásobné živé síly částeček dusíku, kyslíku a vzduchu.

Provedeme-li počet, tu

$$76{\cdot}9 . 492^2 + 23{\cdot}1 . 461^2 = 100 . 485^2,$$

což dokazuje správnosť i směsi vzduchu i správnosť udání rychlosti plynů, vzduch skládajících.

Poznámka: Čtenáři se zůstavuje, aby správnosť výsledků zkoumal vzhledem k neúplnosti čísel užitých.

Drobné zprávy.

Napsal

Alois Strnad,
professor v Hradci Králové.

Úloha o trojúhelníku: „Sestrojiti trojúhelník abc, dány-li body a', b', c' dělící strany jeho dle poměrů daných.“ Že úloha tato není bez zajímavosti, toho důkazem jest současné téměř objevení se její v různých sbornících mathematických. V lonském ročníku našeho Časopisu (roč. XVI., str. 131) podali jsme řešení pro případ, že poměry dané jsou vespolek rovny; v případě obecném lze řešení takto upraviti: Jsou-li poměry dané

$$\frac{ba'}{ca'} = \alpha, \quad \frac{cb'}{ab'} = \beta, \quad \frac{ac'}{bc'} = \gamma,$$

a protíná-li se ab s $a'b'$ v bodě c'', bc s $b'c'$ v a'', ca s $c'a'$ pak v b'', lze dle věty Menelaovy najíti poměry dělící bodů a'', b'', c'' ve stranách daného trojúhelníka $a'b'c'$; jestiť ku př.:

$$\frac{a'c''}{b'c''} = -\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha}.$$

Znajíce poměry tyto snadně sestrojíme body a'', b'', c'', načež přímky $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$ omezují hledaný trojúhelník abc.

Rozřešivše tímto spůsobem úlohu svrchu vyslovenou, našli jsme ji v poněkud jiné formě ve spisku: Exercices divers de mathématiques élémentaires. Par *E. Lemoine* (Paris, Delagrave, 1885). Autor řeší tamže na str. 21. úlohu počtem nepříliš jednoduchým, jehož výsledek nehodí se dobře ke skutečnému sestrojení; na str. 31. uvedeno jest řešení, které užitím ekvipolencí nalezl *Laisant* a které v podstatě souhlasí s naším řešením.

Jinak řešena jest úloha tato v Kyjevském Věstníku fysiky a mathematiky (1886, I. semestr, str. 88). Nechať přímky $a'b'$, $b'c'$ protínají rovnoběžku vedenou vrcholem b ku straně ac v bodech d, e a podobně přímky $a'c'$, $b'c'$ rovnoběžku jdoucí vrcholem c ku straně ab v bodech f, g. Jelikož jest

$$ba' : ca' = a'd : a'b',$$

jest bod d v přímce $a'b'$ určen a lze jej sestrojiti; rovněž tak body e, f, g. Jsou-li pak známy přímky de, fg, sestrojíme žádaný trojúhelník vedouce bodem b' rovnoběžku s de a bodem c' rovnoběžku s fg.

Řešení toto jest zajisté jednoduché; podařilo se nám však najíti řešení ještě mnohem jednodušší, které tuto pouze vyslovíme, ponechávajíce odůvodnění jeho laskavému čtenáři. Rozdělme strany trojúhelníka $a'b'c'$ v bodech a_1, b_1, c_1 dle poměrů $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$; rovnoběžky jdoucí body a', b', c' ku přímkám b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1 omezují hledaný trojúhelník abc.

Harmonický čtyrúhelník. Takovým slove čtyrúhelník $abcd$ vepsaný do kružnice, ve kterém součiny protějších stran jsou si rovny: $ab \,.\, cd = ad \,.\, bc$. Vyšetřováním, které o něm vykonali *Tucker, M'Cay, Casey, Neuberg, Jermakov* a j., zjištěny mnohé jeho zvláštní vlastnosti, z nichž některé hlavní tuto jsme sestavili.

Spojíme-li vrcholy harm. čtyrúhelníka s kterýmkoli bodem kružnice opsané, obdržíme čtveřinu paprsků harmonických.

Vedeme-li bodem ke kružnici dvě tečny a jednu sečnu, stanoví tyto tři přímky na kružnici vrcholy harm. čtyrúhelníka. Tečny sestrojené ke kružnici opsané o harmonický čtyrúhelník v krajních bodech jedné úhlopříčny protínají se na druhé úhlopříčně.

Každá úhlopříčna harm. čtyrúhelníka půlí úhel přímek spojujících střed její s vrcholy na druhé úhlopříčně; polovice oné úhlopříčny jest střední měřickou úměrnou těchto přímek.

Je-li m střed úhlopříčny ac, n pak střed úhlopříčny bd, jest $bm + dm = an + cn$.

Úhlopříčny harm. čtyrúhelníka $abcd$ protínají se v bodě e, jehož vzdálenosti od stran jsou úměrny délkám stran těchto; součet zčtvercovaných těchto vzdáleností jest minimum. (*Bod Lemoineův* v harm. čtyrúhelníku).

Vedeme-li bodem e rovnoběžky ku stranám harm. čtyrúhelníka $abcd$, protínají obvod jeho v osmi bodech kružnice, jejíž střed půlí vzdálenosť bodu e od středu s kružnice opsané o $abcd$. Každá z těchto rovnoběžek seče protější stranu čtyrúhelníka a čtyry tak obdržené body leží v určité přímce. — Vedeme-li bodem e rovnoběžky ku tečnám, které se dotýkají kružnice opsané o čtyrúhelník $abcd$ ve vrcholech jeho, protínají tyto rovnoběžky ramena úhlů a, b, c, d v osmi bodech kružnice, jejímž středem jest bod e. (První a druhá *kružnice Lemoineova*).

Vrcholy harm. čtyrúhelníka lze pomocí převratných průvodičů transformovati ve vrcholy čtverce a to ze dvou polů; poly ty jsou průsečíky dvou kružnic, které v protějších vrcholech harm. čtyrúhelníka kolmo protínají kružnici opsanou.

V harmonickém čtyrúhelníku $abcd$ vyskytují se dva zvláštní body o a o' vyznačující se tím, že

$$\sphericalangle\, oab = obc = ocd = oda,$$
$$\sphericalangle\, o'ba = o'cb = o'dc = o'ad.$$

Body ty leží na kružnici K, jejímž průměrem jest přímka es, a jsou ohnisky ellipsy dotýkající se stran harm. čtyrúhelníka. Kolmice spuštěné s bodu s ku stranám ab, bc, cd, da stanoví na kružnici K body m, n, p, q tak, že přímky am, bn, cp, dq protínají se v o, přímky bm, cn, dp, aq protínají se v o'. (*Brocardovy body, Brocardova kružnice a ellipsa*).

(Mathesis, tome V. 1885, p. 202. Вѣстникъ оп. физики и эл. математики, 1886. I. сем.; стр. 7; II. сем., стр. 10 и 19).

Dvojné normály. Známe-li stupeň, třídu a všechny singularity křivky rovinné, lze z nich stanoviti stupeň, třídu a singularity evoluty její. (Salmon-Fiedler, Höhere Curven, Art. 110—114). Každá dvojná tečna evoluty jest pak dvojnou normálou křivky původní. U křivek prostorových ustanovil počet dvojných normál *Mario Pieri*, a sice užitím Chaslesova principu korrespondenčního. Dána buď křivka prostorová stupně n, s h zdánlivými body dvojnými; plocha tečen její buď stupně m, třídy r a měj Θ přímek kuspidalných. Křivka taková má obecně

$$h+\frac{1}{2}r(r-1)+n(r-1)-\frac{1}{2}(n+m+\Theta)$$

dvojných normál v konečné vzdálenosti. Při racionálné křivce prostorové, je-li $\Theta=0$, jest počet ten

$$\frac{1}{2}(n-1)(9n-14).$$

Plocha stupně n, nemající zvláštních vztahů ani k rovině úběžné ani k pomyslné kružnici v nekonečnu má dle téhož autora

$$\frac{1}{2}n(n^5-2n^4+3n^3-15n^2+26n-13)$$

dvojných normál v konečné vzdálenosti.

(Atti della reale Accademia dei Lincei. Rendiconti 1886. 1° semestre, p. 327; 2° sem., p. 40).

Geometrické znázornění integrálů Fresnelových. Hodnoty integrálů

$$A=\int_0^z \cos\frac{\pi}{2}z^2dz,\quad B=\int_0^z \sin\frac{\pi}{2}z^2dz$$

lze dle *Umova* takto znázorniti:

V pravoúhlé soustavě os X, Y, Z mějme kruhový válec daný rovnicí $x^2+y^2=1$; mysleme si pak na listě papíru sestrojenou parabolu dle rovnice $\frac{\pi}{2}z^2=v$ a list ten ovinutý o válec daný tak, aby vrchol paraboly sjednotil se s bodem (1, 0, 0) a osa její aby se navinula na kruh, v němž rovina XY válec proniká. Parabola přetvoří se tím v křivku prostorovou K, kterou promítněme do rovin souřadných; tak obdržíme v rovině XZ křivku K_1 a v rovině YZ křivku K_2, jichž rovnice jsou

$$x=\cos\frac{\pi}{2}z^2,\ y=\sin\frac{\pi}{2}z^2.$$

Křivka K_1 protíná osu Z v bodech $z=\sqrt{2h+1}$ a křivka K_2 v bodech $z=\sqrt{2h}$, je-li $h=0, 1, 2\ldots.$

I bude nyní

$$A = \int_0^z x dz, \quad B = \int_0^z y dz$$

a jest tedy patrno, že hodnota integrálu A znázorněna jest ploským obsahem, omezeným osami X, Z a křivkou K_1 v mezích od 0 do z; obdobně znázorníme integrál B pomocí křivky K_2.

Na základě tohoto znázornění možno vyvinouti příhodná pravidla k přibližnému vyčíslení obou integrálů.

(Записки Математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Одесса. Том VI. стр. 57).

Úlohy.

Řešení úlohy 1.

(Zaslal p. *Jan Petříček,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Vyvinuvše determinant a vyjádřivše sinusem a cosinusem úkony ostatní, upravíme rovnici danou na tvar

$$(\cos x - \sin x)\left(1 - \frac{2}{\sin 2x}\right) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x},$$

kteráž rovnice ve dvě se rozpadá.

Je-li

$$(1) \qquad \cos x - \sin x = 0,$$

jest, dbáme-li pouze úhlů menších než 4 R,

$$x_1 = 45^0, \quad x_2 = 225^0.$$

Rovnici druhé

$$(2) \qquad 1 - \frac{2}{\sin 2x} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x}$$

lze dáti podobu

$$\sin 2x - 2 = \sqrt{1 + \sin 2x}$$

čili

$$\sin^2 2x - 5 \sin 2x + 3 = 0;$$

odtud vypočítáme

$$\sin 2x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Ve výrazu posledním sluší vzíti znaménko spodní, má-li x býti realné; při tom ještě sluší toho dbáti, že výraz $\cos x + \sin x$