Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ludmila Illingerová

Loxodromická geometrie (výtah z disertace)

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 1, D6--D8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123697

zlepšily, Noetherová nemohla si na Ameriku zvyknout a velmi se jí stýskalo po Göttingách. Neodolala, aby alespoň o prázdninách 1934 nenavštívila Německo, které se k ní tak špatně zachovalo. A než tyto rány přebolely, Noetherová umírá. Odchází s ní dobrý člověk a velký matematik.

Loxodromická geometrie.

(Výtah z disertace.)

Ludmila Illingerová, Praha.

(Došlo 20. května 1935.)

Loxodromy jsou čáry na rotační ploše, které svírají s poledníky plochy konstantní úhel φ. T. zv. Merkatorovou projekcí plochy na rovinu přejdou loxodromy v přímky. Necháme-li v parametrických rovnicích plochy proměnný úhel, t. j. úhel rotace, probíhati všechny hodnoty, nejen do 2π, zobrazí se plocha obecně do celé roviny rozdělené v rovnoběžné pásy, 2π široké. Hranice těchto pásů představují týž poledník plochy. Pro zjednodušení budeme studovati jen jeden takový pás. Aby toto zjednodušení nebylo na újmu obecnosti, musíme všechny pásy, do kterých se plocha zobrazila, zobraziti na tento zvolený pás. Poněvadž každý bod plochy zobrazuje se současně do všech pásů, má jednu souřadnici určitou, kdežto druhá jest dána až na násobek 2π $[P_1\,(x_1, y_1 + 2^1k\pi)]$. Každá loxodroma v našem pásu přejde v systém rovnoběžných, stejně od sebe vzdálených úseček. Dvěma body $P_1\,(x_1, y_1 + 2^1k\pi)$, $P_2\,(x_2, y_2 + 2^2k\pi)$ prochází nekonečně mnoho loxodrom; jejich společná rovnice jest $y - y_1 - 2^1k\pi = \dfrac{y_2 - y_1 + 2\pi\,({}^2k - {}^1k)}{x_2 - x_1}$, $(x - x_1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ Výrazem $2\pi\,({}^1k - {}^2k)$, místo něhož zavedeme Π_{12}, jest každá loxodroma, procházející dvěma body, pevně stanovena. Tangens úhlu, který každá loxodroma svírá s poledníky plochy, jest $\operatorname{tg}\varphi_m = \dfrac{y_2 - y_1 + 2\pi\,({}^2k - {}^1k)}{x_2 - x_1} =$
$= \dfrac{y_2 - y_1 + {}^m\Pi_{21}}{x_2 - x_1}$.

Obrazce vzniklé z loxodrom můžeme studovati jako obdobné útvary v rovině. Velmi zajímavou částí loxodromické geometrie jest loxodromická trigonometrie, která studuje vztahy mezi stranami a úhly loxodromického trojúhelníka, t. j. obrazce vzniklého ze tří loxodrom. Poněvadž uvažované zobrazení plochy na rovinu je konformní, jest součet úhlů každého loxodromického trojúhelníka π. Dosadíme-li do vět rovinné trigonometrie za délky stran trojúhelníka vztahy, kterými jest vázána loxodromická a euklidovská délka strany, t. j. $s_{12} = e_{12}/F_{12}$, obdržíme obdobné věty pro loxodromický trojúhelník. Při tom značí s loxodromickou vzdálenost dvou vrcholů, e vzdálenost euklidovskou a F funkci x-ových souřadnic těchto bodů: pro $x_1 \neq x_2$ jest $F = (x_1 - x_2) : \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{\lambda(x)}\, dx$, pro $x_1 = x_2$ jest $F = 1 : \sqrt{\lambda(x_1)}$, kde $\sqrt{\lambda(x)}$ jest poloměr rovnoběžky příslušného bodu na ploše. Tak zní sinová věta loxodromické trigonometrie:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = s_{23}F_{23} : s_{31}F_{31} : s_{12}F_{12},$$

věta o průmětech:

$$s_{12}F_{12} = s_{23}F_{23}\cos\beta + s_{31}F_{31}\cos\alpha, \text{ atd.},$$

věta kosinová:

$$s_{12}{}^2F^2 = s_{23}{}^2F_{23}{}^2 + s_{31}{}^2F_{31}{}^2 - 2s_{23}s_{31}F_{23}F_{31}\cos\gamma, \text{ atd.},$$

věta tangentová:

$$(s_{12}F_{12} + s_{23}F_{23}) : (s_{12}F_{12} - s_{23}F_{23}) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha), \text{ atd.}$$

Stojí-li dvě z loxodrom v trojúhelníku na sobě kolmo, zjednoduší se výsledky, které jsme obdrželi, a získáme tak věty obdobné větě Pythagorově a větám Euklidovým v euklidovské geometrii. Tak na př. Pythagorova věta loxodromické geometrie:

$$s_{12}{}^2F_{12}{}^2 + s_{23}{}^2F_{23}{}^2 = s_{31}{}^2F_{31}{}^2.$$

Dvěma body prochází nekonečně mnoho loxodrom. Pro tangentu úhlu, který svírá jedna z nich s poledníky plochy, platí $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{y_2 - y_1 + {}^1\Pi_{12}}{x_2 - x_1}$. Pro dvě loxodromy procházející týmiž dvěma body $\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{{}^2\Pi_{12} - {}^1\Pi_{12}}{x_2 - x_1}$, pro tři loxodromy

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_3} = \frac{{}^1\Pi_{12} - {}^2\Pi_{12}}{{}^1\Pi_{12} - {}^3\Pi_{12}} = \frac{{}^1k_1 - {}^2k_1 + {}^1k_2 - {}^2k_2}{{}^1k_1 - {}^2k_1 + {}^1k_3 - {}^2k_3}.$$

Tento vztah tří loxodrom, procházejících týmiž dvěma body, jest nezávislý na volbě základních bodů, závisí pouze na volbě čísel k. Volíme-li pro jeden z obou uvažovaných bodů všechna $k = 0$, kdežto pro druhý bod jsou konstanty čísla vesměs různá, tvoří všechny loxodromy, těmito dvěma body procházející, svazek a pro každé tři loxodromy v tomto svazku platí $\dfrac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_3} =$

$= (P_1P_2P_3) \,.\, \cos\alpha$, při čemž $(P_1P_2P_3)$ jest obyčejný dělící poměr uvažovaných tří loxodrom ve svazku a α jest úhel, který mezi sebou svírají loxodromy zvolené ve svazku za základní. Pro čtyři loxodromy v tomto svazku obdržíme výsledek: dvojpoměr čtyř loxodrom, procházejících týmiž dvěma body, závisí pouze na číslech k; $(P_1P_2P_3P_4) = \frac{{}^1k_1 - {}^2k_1 + {}^1k_3 - {}^2k_3}{{}^1k_2 - {}^2k_2 + {}^1k_4 - {}^2k_4}$. Mají-li oba základní body souřadnice $p_1\,(x_1, y_1)$, $p_2\,(x_2, y_2 + 2^2k\pi)$, kde ${}^2k$ je libovolné celé číslo, pak pro euklidovskou vzdálenost těchto bodů na libovolné loxodromě (${}^mk = m$) platí $e_{12} = (x_1 - x_2) \sec\varphi_m$, pro euklidovské vzdálenosti obou bodů na dvou různých loxodromách $e_m : e_n = \cos\varphi_n : \cos\varphi_m$. Tangenty tří loxodrom z uvažovaného svazku jsou ve vztahu

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{(m - n)}{m \operatorname{tg}\varphi_n - n \operatorname{tg}\varphi_m}.$$

Ze vzorce pro tangenty úhlů dvou loxodrom ve svazku $\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{{}^1\Pi_{12} - {}^2\Pi_{12}}{x_1 - x_2}$, obdržíme další výsledky: aby dvě loxodromy ve svazku, charakterisované čísly ${}^1\Pi_{12}$, ${}^2\Pi_{12}$, t. j. ${}^1k_1 - {}^2k_1$, ${}^1k_2 - {}^2k_2$, byly kolmé, musí pro konstantní úhel, který svírá jedna z nich s poledníky plochy, platit $\operatorname{cosec} 2\varphi = \frac{{}^1\Pi_{12} - {}^2\Pi_{12}}{2\,(x_1 - x_2)}$. Jestliže ${}^1\Pi_{12} - {}^2\Pi_{12} = 0$, t. j. ${}^1k_1 - {}^2k_1 = {}^1k_2 - {}^2k_2$, splývají obě loxodromy v jedinou.

Další zajímavou partií loxodromické geometrie jest loxodromická geometrie projektivní. Studuje výtvory dvou vzájemně projektivních svazků loxodrom. Jejich obraz v Merkatorově projekci jest svazek kuželoseček. Můžeme zde také uvažovati dva projektivní svazky loxodrom, které mají střed v jednom bodě; výtvorem jejich jest opět svazek kuželoseček. Tento případ nemá analogie v obyčejné geometrii projektivní.

Důležitá jest dále teorie loxodromických kuželoseček. Loxodromické kružnice na př. mají veliký význam v geofysice k vyšetření středu zemětřesení. Definujeme je jako geometrické místo bodů, které mají stejné loxodromické vzdálenosti od daného bodu. Analogický definujeme loxodromickou elipsu jako geometrické místo bodů, které mají stálý součet loxodromických vzdáleností od dvou pevných bodů a podobně loxodromickou hyperbolu a loxodromickou parabolu. Rovnice loxodromických kuželoseček jsou obecně stupně vyššího než druhého a lze dokázati, že jediná plocha, jejíž loxodromické kuželosečky se v Merkatorově projekci zobrazují do kuželoseček, jest rotační válec.