Quido Vetter

# Analytická a synthetická metoda v matematickém vyučování na střední škole

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 52 (1923), No. 4, 319--329

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123762`

s prof. sborem reálky v čele, deputací prof. sboru čes. vysokého učení technického v Praze, vedenou rectorem magnificem inž. J. Zvoníčkem, zástupci Jednoty Čs. matematiků a fysiků, Král. české společnosti nauk a zkušební komise pro učitelství na středních školách, jejíž byl dlouholetým členem.

Z celkovického hřbitůvku, na němž odpočívá, jest nádherné panorama Tábora. Asi uprostřed tohoto panoramatu jest viděti na srázné skále nad Lužnicí rodný domek Vaněčkův, napolo skrytý v záplavě zeleně, rostoucí po skalních terasách. A tak prof. Vaněček odpočívá téměř na týchž místech, na nichž před 63 léty se narodil. Soudím z jeho vroucí lásky k rodnému městu, do něhož opět a opět zajížděl si odpočinouti a nabrati sil k další práci, že rodná země mu bude lehká.

---

# Analytická a synthetická metoda v matematickém vyučování na střední škole.

*Napsal Quido Vetter.*

Vyučovací metoda jest podmíněna cílem, který si vyučování klade, a účelnou ekonomií, aby pokud možno s nejmenší námahou a v nejkratším čase bylo tohoto cíle dosaženo.

Jinde ukazují, jak se cíl matematického vyučování v různých dobách u různých národů měnil. Lze říci, že dnes dělíme cíle středoškolské výchovy na dvě skupiny, vzdělávací a výchovné na straně jedné a získávání určitých positivních vědomostí na straně druhé. Při volbě metodického postupu musí učitel míti tyto skupiny před očima.

Jak výchovné působení učebné látky matematické, tak osvojení jejích výsledků jest však možno jen tehdy, když žák dobře porozuměl učivu a vnikl v podstatu matematického myšlení a usuzování. Má-li se duše žákova otevříti proudu linoucímu se s katedry k jejímu prahu, pak musí tak učiniti ráda, musí na tom míti zájem. Již Komenský zdůrazňuje nutnost žákovy chuti k učení.[1]) Herbart založil svou pedagogiku na vypěstění interesů.[2]) V nové době F. Kleinem podporovaný směr volající po zavedení aplikací, dějepisných poznámek atd. do matematického vyučování uvádí jako jeden z hlavních důvodů právě zvýšení zájmu žákova. Jest skutečně velmi důležitým a při abstraktních, žáku vzdálenějších předmětech velmi obtížným problémem meto-

---

[1]) Na př. J. A. Komenský: „Didaktika analytická“ z latiny vyložil F. J. Zoubek, Praha, 1874, str. 11 nn.

[2]) J. F. Herbart „Allgemeine Pädagogik“, ed. Th. Fritzsch, Lipsko, 1902, str. 51.

dickým zachytiti zájem žactva. Proto F. Klein svým posluchačům, budoucím učitelům, tak důtklivě připomíná základní zásadu Herbartovu: „Nebuďte nikdy absolutně nudní!“ [3]) Nepřítelem zájmu hravé duše dětské i kvpící mysli jinošské jest duchamorná jednotvárnost, která vždy svádí k nudné manýře. I kdyby byla určitá metoda didakticky výhodnější, ubíjí její bezvýhradné užívání zájem žactva, nepostará-li se učitel různými modifikacemi o změnu. Střídání způsobu vyučování jest také podporováno rozmanitostí látky. Jest věcí pedagogického taktu, onoho nejvzácnějšího daru dobrého učitele, voliti vhodnou metodu na vhodném místě. Nutnosti svrchu uvedeného střídání jest si také vědom známý německý didaktik W. Lietzmann [4]). Starší autoři někdy směšovali různé metody. Jich přesné roztřídění podal F. Reidt, v české literatuře o nich promluvil A. Mach.[5])

Hlavních typů jest osmero, z nichž vždy dvě tvoří kontrastující dvojici. Různou jich kombinací obdržíme několik metod. Dvojice ty jsou:

I. a) Vyučování hromadné.

b) Vyučování individuelní (laboratorní), jak je provádíme při vyučování manuelním předmětům nebo jak se o ně snaží v Anglii.

II. a) Metoda přednášející (akroamatická, dozierende Methode).

b) Metoda heuristická (katechetická, erotematická), kde se učitel stálými otázkami snaží žactvo přiměti k tomu, aby samo našlo, otázkami vedeno, důkazy a řešení. Může-li se i žák tázati, dostáváme metodu dialogickou čili sokratickou. Někteří autoři i tento poslední způsob zahrnují pod názvem metody heuristické.

III. a) Metoda synthetická, kde vycházejíce při důkazech od pouček známých nebo axiomů, při úlohách od daných veličin, postupujeme k hledaným poučkám a řešením.

b) Metoda analytická, postupující opačně.

IV. a) Metoda dogmatická (Euklidova), uspořádající učivo bez ohledu na vnitřní souvislost jen tak, abychom se při důkazech a úlohách mohli odvolávati na poučky již dokázané.

b) Metoda genetická, která učivo uspořádává podle vnitřní souvislosti, jak jeden útvar z druhého vzniká.

---

[3]) F. Klein „Nicht-euklidische Geometrie“ I., Lipsko, 1899, str. 365.

[4]) W. Lietzmann „Methodik des mathematischen Unterrichts“ I., 1919, str. 150 nn. a 168.

[5]) F. Reidt „Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen“, Berlin, 1886, 2. vyd., 1906, str. 30 nn.
A. Mach „Stručný náčrtek metodický, jak měřictví na školách středních s prospěchem možno vyučovati“. Progr. stř. šk. v Kutné Hoře, 1891.

Jest přirozeno, že uspořádání celého učiva se musí díti z jediného hlediska. Zde neplatí střídání metod. Metoda dogmatická jest překonaným stanoviskem.

Metoda heuristická jest nesporně metodicky na střední škole mnohem cennější než metoda přednášející, ač zvláště ve vyšších třídách může býti učitel donucen někdy nedostatkem času i povahou látky, aby i jí použil. Ve vyučování matematice se však neobejdeme bez obou metod skupiny III., bez metody syntetické a analytické, které se kombinují. Proto nelze bezvýhradně souhlasiti s kategorickým imperativem A. Macha[6]): „Forma vyučování budiž heuristická, postup důkazu analytický, stavba celého systému genetický." Názor ten nezastávají však všichni autoři. Uvedu proto několik ukázek:

Klasickým vzorem heuristické metody řeckého původu jest známé místo z Platonova dialogu Menon, kde Sokrates otázkami přivede nevědomého otroka ke konstrukci čtverce o ploše rovné dvojnásobku daného čtverce. Místo to jest také ukázkou kombinace synthésy a analysy a usvědčuje tak z omylu ty, kdož se domnívají, že heuristická metoda musí býti analytickou. Celý postup Sokratův jest rázu synthetického, neboť řecký mudrc vede otroka svými otázkami od daného čtverce k hledanému. Jednotlivé části jsou však také analytické, na př. odvození výpočtu plochy čtverce, poznání, že

$$2 < \sqrt{8} < 3$$

Učil-li Euklid skutečně tak, jak se nám zachovaly jeho „Základy", pak tu máme doklad spojení metody dogmatické nejen se synthésou, nýbrž i analysou jak při důkazech zvláště nepřímých, tak při rozborech úloh. Ovšem, k rozborům úloh i k pěti přímým analytickým důkazům ve XIII. knize, připojuje Euklid i komentator, od něhož asi pocházejí tyto důkazy, jediné svého druhu v celém díle, také synthésu, bez níž by řešení i důkazy byly neúplnými. Při tom třeba poukázati na to, že matematická analysa u Euklida a Řeků jest charakterisována slovy, jimiž počíná výše uvedený doplněk ke XIII. knize, totiž: „Analysa jest dokazování věci vyšetřované, jakoby již byla uznávána, důsledky k nějaké pravdě uznávané vedoucími." [7]) Důkazy tyto, lišící se od analytické metody svou tendencí, jsou platné jen tehdy, lze-li všecky užité soudy obrátiti, jak zdůraznil Duhamel.[8]) Staří připojovali důkaz synthetický proto, aby se o platnosti analytického důkazu přesvědčili. Při vyučování jest však analytický postup jen rozborem, který má uvésti na cestu důkazu neb ře-

[6]) A. Mach, l. c., str. 26.

[7]) „Euclidis opera omnia etc.", ed. Heiberg, IV, Lipsko, 1885, str. 364 nn.

[8]) J. M. C. Duhamel „Des méthodes dans les sciences de raisonnement", Paříž 1865, kap. V. a VI.

šení. Proto Reidt i Mach praví vždy na konci svých příkladův analyticky vypracovaných, že se má připojiti důkaz synthetický. Ve smyslu řeckém podal analytické důkazy a řešení, provázené vždy synthesí, J. Leslie.[9])

Pomineme další vývoj a zastavíme se až u J. A. Komenského. Praví sice: „Nihil methodo analytica, omnia synthetica!“ (to jest: „Nic nezačínati od ratolestí, všechno od kořene“),[10]) než na jiném místě zase praví: „Vtip lidský snadně osvítíš, aby i nejskrytější věci chápal... jestliže ho vždycky od veřejnosti k částečnosti povedeš napřed ouhrnkem celou věc předkládaje a potom ji drobněji po částkách rozbíraje do konce, anebo pokud třeba.“[11]) V Didaktice analytické konečně podává Komenský výklad o obou těchto metodách a jejich kritiku se stanoviska didaktického i žádá, aby obě byly spojovány jednak vzájemně, jednak s metodou srovnávací čili synkritickou.[12])

Překročíme zase 200 let a staneme u J. F. Herbarta. Ve své „Všeobecné pedagogice“ z r. 1806[13]) pojednává obšírně o metodě líčící, analytické a synthetické ve vyučování. Uznává prohlubující, objasňující a vědecky výchovnou cenu analysy, vytýká jí však látkovou vymezenost, kdežto synthese přisuzuje schopnost tvořiti nové. Matematické vyučování pokládá za výlučně synthetické, ba za vzor synthetické spekulace. „Matematika s tím, co jí předchází a následuje, patří k synthetickému vyučování, neboť podává chovanci stále nové představy a úlohy. Práce spočívá zcela v rukou učitelových.“ Tento výrok provází poznámkou: „Nesmí se tu mysliti na tak zvanou analytickou metodu matematickou. Zde se nemluví o manýře, jak matematikové jim dané úlohy luští — kladení a sestavování úloh, jak to za dobré uzná učitel nebo učebnice, jest vždy synthesou.“[14]) Že tu Herbart nepochopil, co jest rozbor v matematickém bádání a zvláště v matematickém vyučování, netřeba podotýkati. Ostatně nejlepším dokladem, že Herbart naprosto nevnikl v podstatu obtíží matematického vyučování, jest jeho další výtka: „Požadavek Rousseauův „Nechtež děti samy v geometrii objeviti všechno“, jest zavrhnouti, neboť jednak by děti neobjevily buď ničeho nebo velmi málo, jednak by se při tom nemohl nikdy poskytnouti pohled na celek matematiky, která jest již v podivuhodné velikosti vynalezena.

[9]) J. Leslie „Elements of geometry, geometrical analysis and plane trigonometry“, 2. vyd., 1811, něm. překl. II. dílu od J. P. Grüsona s názvem „Geometrische Analysis“, Berlin, 1822.

[10]) J. A. Komenský „Didaktika, to jest umění vyučování“, vyd. J. V. Novák, Praha, 1892, str. 117.

[11]) Tamtéž, str. 27 nn.

[12]) J. A. Komenský „Didaktika analytická“ z lat. vyl. F. J. Zoubek, Praha, 1874, str. 27.

[13]) J. F. Herbart, l. c., str. 98 nn.

[14]) Tamtéž, str. 104.

Je-li důkaz nalezen, jest třeba se mu naučiti zcela formálně.“ [15]) A přece praví Clairaut v předmluvě ke svým „Eléments de la geométrie“ z r. 1753, že byl první, který použil v geometrii geneticko-heuristické metody.[16])

Současník Herbartův, ředitel Bedřichova gymnasia v Berlíně, A. F. Bernhardi podkládá ve svém programovém článku z r. 1810 analytické a synthetické cestě jiný význam.[17]) Bernhardi vyučovací postup dělí na několik stupňů. K jednotlivým důkazům přistupuje se na předposledním stupni, kdy žák již získal znalost objektů, jimiž se matematika zabývá, a principu, který ji proniká. Tu má učitel žáka vésti, aby sám důkazy nalézal, což Bernhardi nazývá cestou synthetickou, kdežto na posledním stupni žák vypravuje, co činil a jak jednal, což zve Bernhardi cestou analytickou a čemuž přikládá zvláštní důležitost.

Také profesor lipské university M. W. Drobisch[18]) označuje vyučovací metody jinými názvy než my, vykládá a doporučuje pod názvem heuristické metody mezi jiným také postup od hledané „these“ k dané „hypothési“, tedy postup analytický.

Němečtí metodikové se často dovolávají Th. Wittsteina. Týž žádá, aby synthetickému důkazu nebo řešení předcházela analysa, neboť jenom ona dává před žákem oprávnění volbě určité cesty důkazové a určitých pomůcek před jinými.[19])

Uvedený již Reidt a Mach dávají přednost metodě analytické, které, jak již řečeno, připojují vždy postup synthetický.

Jiné stanovisko zaujímá O. Willmann jak při všeobecném výkladě o analyse a synthése ve vyučování vůbec, tak při výkladě těchto metod v matematice zvláště.[20]) Po stránce všeobecné klade Willmann analytický výklad mezi synthésu pojetí věci, která se rozkládá, a synthésu použití všeobecného poznatku na zvláštní případ. Ocenění obou postupů vrcholí ve větě: „Analysa, je-li nutna, synthésa, je-li možna.“ Zásadu tu přijímá Willmann i pro vyučování matematické. S ním souhlasí také W. Toischer.[21])

---

[15]) J. F. Herbart „Rezensionen über pädagogische Schriften“, 1827—1830, viz A. Gille „Herbarts Ansichten über den mathematischen Unterricht“ Diss., Halle, 1888, str. 25.

[16]) M. Simon „Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik“, 2. vyd., Mnichov, 1908, str. 57.

[17]) A. F. Bernhardi „Ansichten über die Organisation der gelehrten Schulen“, Jena, 1818, str. 54 nn.

[18]) W. Drobisch „Philologie und Mathematik als Gegenstände des Gymnasialunterrichts“, Lipsko, 1832, str. 86 nn. a týž „Theoriae analyseos geometricae prolusio“, Lipsko, 1824, kap. IV.

[19]) Th. Wittstein „Die Methode des mathematischen Unterrichts“, Hannover, 1879, str. 7 nn.

[20]) O. Willmann „Didaktik als Bildungslehre“, II., Brunšvík, 1. vyd. 1888, 2. vyd. 1903, str. 62 nn. a 303 nn.

[21]) W. Toischer „Theoretische Pädagogik und allgemeine Didaktik“, Mnichov, 1896, str. 90 a 98.

M. Simon[22]) naproti tomu nepřiznává žádné metodě přednosti. Podle jeho názoru musí každý učitel míti svou vlastní metodu, musí ovládati všecky způsoby vyučovací, aby jich na vhodném místě vhodně použil. Simon však přiznává, že leží v povaze věci, že se v nižších třídách použije převážně metody vyvíjecí, kdežto ve vyšších se musí rozvinutí často zkrátiti se zřetelem na nedostatek času.

Také L. Hefter[23]) si přeje, aby se získávaly potřebné znalosti v nižších třídách metodou analytickou či induktivní, vyškolenost pak v logickém myšlení aby se nabývala ve vyšších třídách synthetickou dedukcí.

Lietzmann[24]) konečně praví, že jest názor na metodu dnes ustálen (doplň v Německu), čímž mezi řádky napovídá, že se pokládá všeobecně za nejlepší dogmaticko-analyticko-heuristická metoda. Než ihned podotýká, že jest při tom směrodatná tradice a národní (rozuměj německý) svéráz.

A tu přicházíme ke vlivu národní individuality na vyučovací metodu. Jest dosti těžko vyšetřiti, nelze-li tak učiniti z autopsie, který postup zde či onde převládá. Závisí tu mnoho na učiteli. Učebnice, jak se o tom ještě zmíním, nepodávají nám spolehlivého měřítka. Třeba si proto všimnouti, pokud vůbec máme zprávy o způsobu vyučování v jednotlivých zemích a podle toho, jaksi „per analogiam" souditi s jakousi pravděpodobností o analytickém či spíše synthetickém postupu. S určitostí známe jen postup německý, který byl v odborné literatuře hojně popsán a prodiskutován obšírně, ba rozvláčně. Odpovídá to teoretisujícímu německému duchu, nikoli však povaze latinské. Mezi těmito národy jsou si jednotlivci také vědomi nedostatků, plynoucích z tohoto instinktivního odporu k teoretické metodice. Tak na př. G. Loria jej Italii vytýká.[25]) Odpor ten ovšem má i vliv na vyučovací metodu. V referátě o návštěvě profesorů z nově připojených území ve školách staré Italie praví prof. G. Furiani,[26]) že se v Italii více učí, kdežto ve školách na území bývalého Rakouska se více vychovává. Pokud jsem sám viděl matematické vyučování na středních školách římských, shledal jsem, že se příliš často vyučuje metodou přednášející, s čímž také souvisí nadměrné používání postupu ryze synthetického. Není náhodou, že se v Italii provádí výstavba středoškolského učiva geometri-

---

[22]) M. Simon, l. c. 56.

[23]) L. Hefter „Analyse und Synthese in der Geometrie", Jahresber. d. d. Math.-Ver. XXVII., str. 19.

[24]) W. Lietzmann, l. c. I., str. 146.

[25]) G. Loria „La scuola media e la sua attuale crisi di sviluppo", Atti del V. congr. della „Math.", str. 3 nn.

[26]) „Visite di docenti delle scuole medie redente", Boll. di mat. XVII., 1920, str. 140 nn.

ckého přísně deduktivně na axiomech empiricky získaných.[27]) Jestli pak dříve postaveny v čelo a výslovně uvedeny jen axiomy nemající absolutní evidence (třída B podle klasifikace Castelnuovovy), tu od r. 1867 se pomalu přecházelo ke způsobu, postaviti v čelo geometrického učiva celou soustavu všech axiomů. Tento postup rovněž ukazuje na převahu logické rigorosnosti, jíž lépe svědčí synthésa.

Francouzi nepřejí přílišnému theoretisování o metodě, jak o tom svědčí výrok Th. Rousseau-a, v němž béře na lehkou váhu spor o analytickou a synthetickou metodu.[28]) I francouzský způsob uspořádání geometrického učiva prodělal proměnu podobnou jako italský. V obou zemích se však ozývaly v poslední době před válkou hlasy, volající po zpětné proměně, snad pod vlivem teoretické metodiky německé.

Opačný pohyb ku stavu, jaký byl původně v Italii se děl v Anglii. Ztěžka lze s našimi poměry srovnávati a posouditi metody anglické, kde se učí způsobem laboratorním, a způsoby americké, kde se vyučování hlavně opírá o učebnici, kde naše střední škola jest rozdrobena na několik škol s malým počtem let a kde učitelé jsou vědecky mnohem hůře připraveni než u nás, jak o tom referují J. V. Collins a J. W. A. Young.[29])

V Německu děje se proměna výstavby středoškolské geometrie od budovy postavené přesně na soustavě axiomů k uspořádání, kde úvahy intuitivní se střídají s deduktivními. Heslem je tu požadavek, aby škola naučila žáka své látce. Cítíme tu snahu, aby se školské vzdělání rozšířilo co nejdále, aby se pokud možno zvýšila průměrná úroveň lidového vzdělání, jak to vyslovil Schmiedeberg.[30]) Ve shodě s touto snahou vytvořili si Němci svou metodu. Nejlepší její příklad podává Lietzmann.[31]) Týž správně podotýká, že autoři podobných příkladů je buď úmyslně skonstruovali, aneb aspoň zkrátili. Aby neupadl v totéž pokušení, podává Lietzmann příklad vyučovací hodiny, jak ji do posledních podrobností zapsal podle jakéhosi vynikajícího metodika

[27]) „Compts rendus du Congrès de Milan de la commission international de l'enseignement mathématique, 18—19 septembre 1911“, referát G. Castelnuova „La rigneur dans l'enseignement mathématique dans les écoles moyennes“, L'Ens. math. XIII., 461 nn.

[28]) „Rapport sur la géométrie“ v „Enseignement secondaire“, publikovaném francouzskou podkomisí IMUK, viz Lietzmann, l. c. I., str. 161.

[29]) J. V. Collins „Sur la méthode d'enseignement en Amérique“, L'Ens. math. VIII., 1906, str. 146 nn.

J. W. A. Young „Rapport adressé a la Souscommission A“, tamtéž XIII., 1911, str. 471 nn.

[30]) W. Schmiedeberg, G. Wetzstein a G. Klatt „Die Bedeutung des Schulen“, Berlin, 1886, 2. vyd., 1906, str. 30 nn.

[31]) W. Schmiedeberg, G. Wetzstein a G. Klatt „Die Bedeutung des mathematischen und naturwissenschaftlicher Unterrichts für die Erziehung unserer Jugend“, Berlin, 1917, str. 23 nn.

[31]) W. Lietzmann, l. c. I., str. 152.

německého. Tento německý způsob zabíhá ovšem někdy do extrémů. V Lietzmannově příkladě postrádáme na konci hodiny synthetické shrnutí nově probraných důkazů (jde tu o Pythagorovu větu). Didaktik Lietzmannův jen jeden z vyložených důkazů příští hodinu zopakoval a to indický, který lze považovati za nejpřístupnější. V příkladě tom není také dopodrobna analyticky vysvětlen postup důkazu, jak to dělá Mach. Příklad jest proto vzorem metody heuristické, nikoli analytické. Postup jest potud synthetický, že neproveden předem rozbor důkazu a žák o účelnosti pomocných konstrukcí se dovídá ex eventu.

Německá snaha naučiti ve škole předepsanému učivu přivádí nás k tomu, co již bylo výše řečeno, že podmínkou, aby bylo dosaženo vyučovacího cíle, jest úplné pochopení a osvojení si probrané látky se strany žáků. Slouží-li dotazování se heuristické metody k udržení pozornosti a ke kontrole, pokud žactvo vyučování sleduje a sledovati stačí, jest analysa rozborem, který odůvodňuje každý krok při důkazu a řešení, vysvětlující a objasňující pomůckou. To se již skrývá za Descartesovými pravidly vědeckého myšlení.[32]) Synthésa, která rozebrané prvky důkazu a řešení shrnuje v jednotný útvar, ukáže žáku jednak hotovou budovu, poskytujíc mu tak celkový přehled, jednak v jeho vědomí zanechává ucelenou, ničím nerušenou stopu, která usnadní reprodukci. Při analyse lze navazovati na asociační shluky a zachytiti látku v žákově mysli, při synthése tato pouta upevniti. Poněvadž mezi účely matematického vyučování stojí na nikoli posledním místě získání positivních vědomostí a dovednosti těchto na vhodném místě užíti, jest usnadnění reprodukce naučené látky důležito.

Při aplikacích, při řešeních praktických případů musí žák ovládati obě metody. Analysou, provedenou často bez písemných poznámek v hlavě ozřejmí si cesty, jež mohou k cíli vésti, synthésou pak své rozhodnutí pro určitou cestu uvede ve skutek. Cvičí se tak ona třetí duševní schopnost — rozhodování pro vhodný postup při řešení problémů — o níž mluví Lietzmann,[33]) probíraje vliv matematického vyučování na logické školení mysli. Prvním požadavkem zde tak často jmenovaného autora jest cvičení schopnosti abstrakční. S požadavkem tím se setkáváme také u Blutela.[34]) Toho docilujeme mezi jiným také analysou. Druhým požadavkem Lietzmannovým jest cvik ve sledování logických úsudkových řad. Zde přichází v prvé řadě v úvahu synthésa, ač i při analytickém postupu jest k tomu hojně příležitosti.

---

[32]) R. Descartes „Rozpravy o methodě“, přel. J. Guth, Praha, 1882, str. 25.

[33]) W. Lietzmann, l. c. I., str. 52.

[34]) E. Blutel „Du rôle de l'enseignement des mathématiques dans la formation de l'ésprit“, Nouv. Ann. (4) II., 385 nn.

Všechny tyto tři požadavky Lietzmannovy lze shrnouti v prvý požadavek Jacobsův, výchovv k logické přesnosti.[35]) Druhý požadavek Jacobsův, který činí na vypěstování schopností vědeckých, jest vzbuzení tvůrčí síly a obrazotvornosti. I ta jest analysou připravena a synthésou v pohyb uváděna. Třetím jeho požadavkem jest vypěstění schopnosti viděti i v jednoduchých otázkách problémy, vzbuditi chuť k dotazování se. Zde bude jistě pole působnosti pro analysu.

I k dosažení etických cílů matematického vyučování přispějí analysa a synthésa. Mezi hlavními z nich jest výchova k samostatné činnosti,[36]) leč ta jest možna jen tehdy, když jsme výcvikem v postupu jak analytickém tak synthetickém dali žáku do rukou pomůcky, které mu dovolují přikročiti k daným úlohám bez berlí učitelovy pomoci. Ono eticky cenné hledání objektivní pravdy s prostým sebevědomím síly lidského ducha jest výsledkem obou metod, zvláště však synthésy, kdežto pedagogicky významné hledání snad vzniklé chyby jest založeno na analyse. Tato vede i k výchovnému poznání problémů neřešitelných.[37])

Konečně máme mezi cíli matematického vyučování i prvek sociální, totiž výchovu ke společné práci, jak to vytkl Schmiedeberg.[38]) Tomu slouží přidělování částí dané úlohy skupinám nebo i jednotlivým žákům, aby pak takto dosažených výsledků bylo užito pro řešení konečné. I tu setkáváme se jak s analysou, tak synthésou.

Tážeme-li se nyní, kdy máme pěstovati tu či onu metodu, tu vidíme, že během celých studií třeba si všímati obou postupů. V třídách nižších a všude tam, kde počínáme látku nebo kde lze tušiti větší obtíže, kladoucí se v cestu takové chápavosti, bude nutno důkladněji se obírati analysou. Kde žák již nabyl dostatečné zručnosti v usuzování a většího přehledu na cesty vedoucí k cíli, lze analysu zkrátiti, ba někdy snad i vynechati. Leží v povaze věci, že to bude spíše na místě ve třídách nejvyšších, kde lze na schopnost samostatného úsudku klásti větší požadavky. Při tom možno sledovati ještě jeden cíl, totiž pomalou výchovu k soustavnému uspořádání úsudků a určité látky vůbec.

Leží v podstatě věci, že učebnice bude vždy míti větší sklon k výkladu synthetickému. Analytický rozbor jest přípravou vhodnou zvláště k ústnímu objasnění látky v živé výměně otázek a odpovědí, synthésa naproti tomu podává ucelený a přehledný, avšak stručný obraz hotového díla, vhodný k opakování. V praksi

---

[35]) A. Jacobs „Was leistet der Mathematikunterricht für die Erziehung zur Wissenschaft?" Zeitschr. f. math. u. nat. Unterr. XXXIX., str. 625 nn.

[36]) Buchbinder „Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht auf deutschen Gymnasien, tamtéž, I., str. 10 nn.

[37]) W. Lietzmann, l. c. str. 14 nn.

[38]) W. Schmiedeberg, l. c. str. 14 nn.

důkladná analysa ušetří opakování výkladu proto, že mu žák neporozuměl, avšak otištění její před synthetickým shrnutím látky vyložené zabírá v učebnici mnoho místa. Jako příklad takové synthetícky psané učebnice lze uvésti planimetrii známého F. Enriquesa,[39]) jehož italské matematické kruhy pokládají také na poli matematické didaktiky za jednu z největších italských autorit. Za zvláště charakteristický pokládám jeho výklad o geometrických nejjednodušších konstrukcích, postupující čistě syntheticky. Stejně však postupují italské učebnice i v nižších třídách, na př. Bortolottiova geometrie, kde se postaví poučka a její synthetický důkaz, příklady pak teprve následují.[40]) Jinak jsou již sestaveny naše učebnice. Na př. u Valouchova měřictví pro nižší třídy kryje se analysa za úlohami, které předcházejí. V planimetrii Vojtěchově jest aspoň náběh k analyse. Tak uvádím, abych pro srovnání užil téhož příkladu jako nahoře, že se analysa jednoduchých strojných úloh redukuje aspoň na stručný poukaz, co konstrukce ta znamená a nač navazuje.[41]) Jest tu pokyn, jak analysu vésti. Z konstrukcí těch nejvíce vynikne rozdíl proti knize Enriquesově při úloze vésti ke kružnici tečny bodem mimo ni ležícím. Než není třeba voliti příklady vždy z geometrie, jak se v literatuře zpravidla stává (Reidt, Mach, Lietzmann), nýbrž možno sáhnouti i po algebře. Bortolotti[42]) vychází při výkladu o rovnicích od definice a vyvíjí systematicky a synthetický její teorii. Bydžovský naproti tomu[43]) vychází od příkladu, rozbírá na něm pojem rovnice a tak žáka v teorii uvádí.

Význačný prvek analytický jest v deskriptivní geometrii, nač dosud, tuším, nebylo poukázáno. Její metody vyžadují, aby se zobrazované prostorové útvary rozložily v prvky a jejich průměty sestrojovaly. Vyučovací postup, související s výchovou k prostorovému nazírání, jak je žádá Lietzmann[44]) nutně vyžaduje, aby skoro každému řešení bylo předesláno řešení prostorové, spojené zpravidla s analysou úlohy, a toto řešení teprve jaksi rozloženo v planimetrické konstrukce v průmětnách. Před žáka staví se model, ať již skutečný nebo myšlený, z něhož se analysou vyvodí konstruktivní prvky.

---

[39]) F. Enriques a U. Amaldi „Geometria elementare per le scuole secondarie superiori“ I., Bologna, str. 76 nn.

[40]) E. Bortolotti „Nozioni die geometria per le scuole tecniche“, Milano-Roma-Napoli, 1915.

[41]) J. Vojtěch „Geometrie pro IV. třídu škol středních, vydání pro reálky, str. 267 nn.

[42]) E. Bortolotti „Aritmetica generale ed algebra per i licei classici e moderni“, Milano-Roma-Napoli, I., 1919, str. 53 nn.

[43]) B. Bydžovský, „Arithmetika pro IV. třídu škol reálných“, Praha, 1910, str. 210 nn.

[44]) W. Lietzmann, l. c., str. 53 nn.

*

## Les méthodes analytique et synthétique dans l'enseignement mathématique.

(Extrait de l'article précédent.)

La méthode de l'enseignement est déterminée par le but de l'enseignement; ce but a subi des changements au cours des temps; actuellement, il consiste dans la formation de l'esprit et de l'âme aussi bien que dans l'acquisition de certaines connaissances positives. Pour que l'enseignement ait plein succès, il faut savoir intéresser l'élève à la matière enseignée et se garder de toute monotonie. On emploie, en mathématiques, différentes méthodes; l'auteur traite seulement de la méthode analytique et de la méthode synthétique, ainsi que de leurs combinaisons avec d'autres méthodes. Il donne d'abord une esquisse historique sur le développement de ces méthodes depuis Platon; il étudie ensuite leurs avantages didactiques et méthodiques ainsi que la question en quelle mesure ces deux méthodes se prêtent aux exigences de l'enseignement. L'auteur discute laquestion dans quels cas il faut préférer l'une à l'autre; il fait voir laquelle des deux méthodes est employée davantage dans les livres d'enseignement des différentes nations, et traite de l'importance de ces méthodes pour la géométrie descriptive.

---

## O algebraických rovnicích s vícenásobnými kořeny.

Napsal Dr. *Jaroslav Jarušek.*

I.

Jestliže z kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rovnice

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (1)$$

je pouze $k$ různých, musí býti rovny nule všechny determinanty z $k+1$ kořenů

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \ldots & \alpha_{i_{k+1}} \\ \alpha^2_{i_1} & \alpha^2_{i_2} & \ldots & \alpha^2_{i_{k+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^k_{i_1} & \alpha^k_{i_2} & \ldots & \alpha^k_{i_{k+1}} \end{vmatrix} = \prod_{\mu, \nu} (\alpha_{i_\nu} - \alpha_{i_\mu}), \ \nu > \mu, \qquad (2)$$

při čemž $i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}$ probíhají všechny kombinace $(k+1)$-ní třídy z čísel $1, 2, \ldots, n$ a dále jeden determinant toho tvaru řádu $k$ musí býti různý od nuly, čili matice