K. Mack

Eine mit dem vollständigen Vierseit zusammenhängende Schliessungsaufgabe

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. 3, 199--202

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123861

Eine mit dem vollständigen Vierseit zusammenhängende Schließungsaufgabe.

K. Mack, Praha.

(Eingegangen am 13. März 1937.)

1. Vier beliebige Geraden *abcd*, von denen keine drei durch einen Punkt*) gehen („vollständiges Vierseit") schneiden sich bekanntlich in 6 Punkten, die zu je dreien auf je einer der gegebenen Geraden liegen. Es gibt 4 solcher Punkte-Tripel, von denen je 2 einen gemeinsamen Punkt haben. Zu jedem dieser 6 Schnittpunkte gibt es stets einen und nur einen Punkt, der mit ihm nicht auf derselben Geraden liegt. Wir nennen sie „Gegenpunkte im Vierseit". Die 6 Schnittpunkte werden also von 3 Paar Gegenpunkten im Vierseit gebildet. Zwei Punkte, von denen nicht der eine Gegenpunkt des andern ist, sollen „Nachbarpunkte" genannt werden. Nach dieser Festsetzung hat also jeder Punkt 4 Nachbarpunkte.

2. Definition. Wählt man einen Punkt P in der Ebene des „vollständigen Vierseits", welcher nicht auf einer der gegebenen Geraden des Vierseits liegt, und verbindet man P mit den 6 Schnittpunkten des vollständigen Vierseits, so sollen diese 6 Strahlen der „Schein des Vierseits aus P" genannt werden. Je 3 Strahlen, welche die Punkte eines Tripels (siehe 1.) mit P verbinden, sollen ein „Drilling", je 2 Strahlen, die Gegenpunkte im Vierseit verbinden, ein „Zwilling" genannt werden. Je 2 Strahlen, die nicht einem „Zwilling" angehören, bestimmen einen Drilling, der diese beiden Strahlen enthält.

3. Eigenschaften des Scheins eines Vierseits. „Es gibt unendlich viele Parallelogramme, deren Paare gegenüberliegender Eckpunkte je auf den Strahlen zweier Zwillinge liegen, wobei die Parallelogrammseiten zu den Strahlen des dritten Zwillings (Richtungszwilling) parallel sind."

Ein solches Parallelogramm ist durch einen Punkt auf einem beliebigen Strahl und einen Zwilling (der diesen Strahl nicht

*) Auch ein uneigentlicher Punkt soll darunter verstanden werden.

enthalten darf), dessen Strahlen die Richtung der Parallelogrammseiten angeben, bestimmt. Parallelogramme mit parallelen Seiten sind ähnlich und liegen zentrisch mit dem Zentrum P.

4. **Beweis**: Man faßt die vier gegebenen Geraden als Spuren von vier Ebenen auf, welche durch einen gemeinsamen Punkt S im Raum gehen, von dem P die Parallelprojektion auf die Zeichenebene in der Richtung (SP) ist. Die vier Ebenen begrenzen also

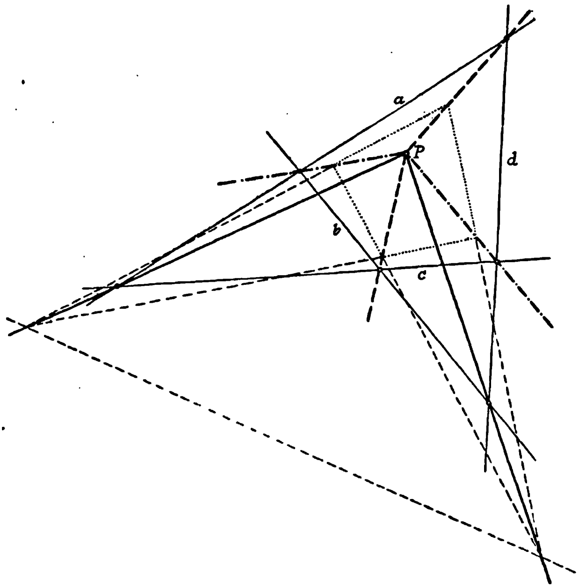

Fig. 1.

eine vierseitige Pyramide mit der Spitze S. Dann sind irgend zwei Zwillinge — etwa die Strahlenpaare von P nach den Schnitten $[a\,.\,b]$ $[c\,.\,d]$ bzw. $[b\,.\,c]$ $[d\,.\,a]$ — die Parallelprojektion von gegenüberliegenden Kanten dieser Pyramide, während der dritte Zwilling nach den Schnittpunkten $[a\,.\,c]$ $[b\,.\,d]$ die Parallelprojektion der Schnittlinie zweier gegenüberliegenden Pyramidenflächen darstellt. Schneidet man die Pyramide mit einer Ebene, welche sowohl zu der Schnittlinie von S nach $[a\,.\,c]$ als auch von S nach $[b\,.\,d]$ parallel ist, dann werden gegenüberliegende Flächen in parallelen Geraden zu diesen Linien geschnitten, die Ebene schneidet also aus der Pyramide ein Parallelogramm aus, dessen Bild die in 3. gemachte Aussage erfüllt. (Fig. 1.) Ein solches Parallelogramm ist durch den Richtungszwilling und einen Eckpunkt bestimmt. Da zwei beliebige Zwillinge als Bilder von Gegenkanten einer Pyramide aufgefaßt werden können, so ergibt sich, daß es drei Gattungen von Parallelogrammen gibt, deren Seiten jeweils zu dem Strahlenpaar eines Zwillings parallel sind. (Fig. 2.)

5. Projektive Verallgemeinerung. Denkt man sich die Seiten eines solchen Parallelogrammes unbegrenzt verlängert, so ist es nichts anderes als ein vollständiges Vierseit. das die Schnittpunkte der Strahlen eines Zwillings mit der unendlich fernen Geraden als gegenüberliegende Punkte besitzt. Ersetzt man in

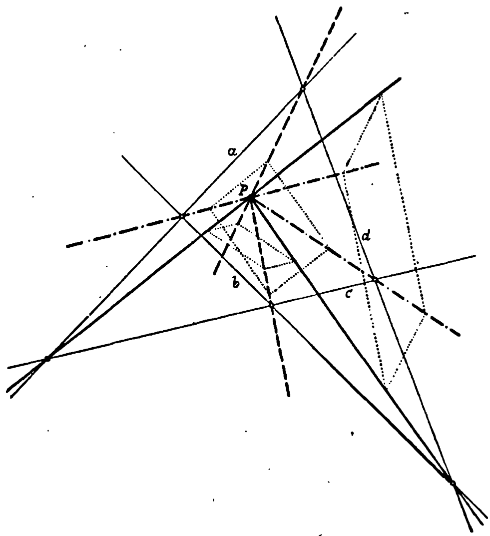

Fig. 2.

diesem Zusammenhange die unendlich ferne Gerade durch eine beliebige Gerade v so treten anstelle der angegebenen Parallelogramme Vierseite, deren Paare gegenüberliegender Punkte auf den Strahlenpaaren der „Zwillinge“ liegen.

Beweis: Man transformiere durch eine solche kollineare Abbildung das gegebene Vierseit und die Gerade v, daß v im transformierten System zur unendlich fernen Geraden wird. Im transformierten System gibt es nach Satz 3. Parallelogramme, denen im Originalsystem Vierseite entsprechen, von denen drei Paare gegenüberliegender Eckpunkte bzw. auf den Strahlenpaaren der drei Zwillinge liegen. Ein solches Vierseit ist bestimmt durch ein Paar auf den beiden Strahlen eines Zwillings angenommener Gegenpunkte und durch einen Eckpunkt auf einem weiteren Strahl. Da die Wahl dieser drei Punkte beliebig auf je einen Strahl des Scheines erfolgen kann, ergeben sich ∞^3 Vierseite, von denen jeder Eckpunkt in je einem Strahl des Scheines liegt.

6. Es gibt ∞^3 vollständige Vierseite, von denen je ein Eckpunkt so auf je einem der 6 Strahlen des Scheines liegt, daß gegenüberliegende Eckpunkte stets auf Strahlen eines Zwillings liegen.

Den in 3. und 6. ausgesprochenen Lehrsätzen kann offenbar eine kinematische Deutung gegeben werden.

*

O konfiguraci rovnoběžníků při úplném čtyřstranu.

(Obsah předešlého článku.)

V úplném čtyřstranu vytvořeném čtyřmi přímkami a, b, c, d má každý ze šesti rohů právě jeden t. zv. protější roh; na př. $[ac]$, $[bd]$ jsou dva protější rohy. Nechť P značí libovolný bod roviny, různý od každého rohu čtyřstranu; dvojice paprsků spojujících bod P se dvěma protějšími rohy jest t. zv. sdružená dvojice paprsků (Zwilling). V předcházejícím článku jest dokázána tato věta:

Jsou tři řady o nekonečném počtu rovnoběžníků takové, že páry protějších vrcholů rovnoběžníků každé řady leží na obou paprscích jedné sdružené dvojice a strany těch rovnoběžníků jsou rovnoběžné s paprsky třetí sdružené dvojice.

Při důkazu považujeme čtyři přímky úplného čtyřstranu za stopy čtyř rovin procházejících bodem S v prostoru, který v nějakém rovnoběžném promítání má obraz P. Nechť $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ značí tyto čtyři roviny. Průsečný rovnoběžník těch rovin s rovinou rovnoběžnou s oběma přímkami $[\alpha\gamma]$ a $[\beta\delta]$ vede na rovnoběžník jedné řady s popsanými vlastnostmi. Výměnou $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ obdržíme další řady. — Hořejší věta se dá projektivně zobecniti tak, že se místo přímky v nekonečnu uvažuje nějaká přímka v konečnu.