Václav Hübner

Vztah mezi půdorysnou odchylkou α a nárysnou β přímky P s průměty α_2, β_1 a odchylkou $(P_1 P_2)$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 1, 60--64

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123997`

affinitou do soustavy kružnice K tím, že rovinu její otočíme o úhel ω, jehož

$$\cos\omega = \frac{b}{a}.$$

O týž úhel otočíme ellipsu E_1, t. j. E_1 pokládáme za orthogonálný průmět ellipsy $\overline{mn}$, $\overline{p_1q_1}$ ležící v rovině odchýlené od roviny E_1 o úhel ω, t. j. poloosa $\overline{sq}$ zvětší se na

$$\overline{st} = \frac{\overline{sq}}{\cos\omega} = \overline{sq_1},$$

tím máme novou ellipsu $E_2(\overline{mn}, \overline{p_1q_1})$, jejíž průsečíky se soustřednou kružnicí K sestrojíme, jak bylo nahoře nejjednodušeji ukázáno. Tím dostaneme sečnu S, jejíž rovina kolmá k rovině nákresny je rovinou otáčení pro hledané body. Stačí tedy stanoviti některým jednoduchým způsobem průsečíky S s ellipsou E neb E_1 ($\overline{h_1s}$ seče K_2 v h_2, $\overline{h_2h} \perp \overline{sc}$) a dostaneme hledané body h . . . (Dokončení.)

Vztah mezi půdorysnou odchylkou α a nárysnou β přímky P s průměty α_2, β_1 a odchylkou (P_1P_2).

Studujícím podává **Václav Hübner**, školní rada na Král. Vinohradech.

Na přímce P, procházející body $o\,(0, 0, 0)$, $a\,(x, y, z)$, budiž úsečka $\overline{oa} = d\,(\overline{oa_1} = d_1, \overline{oa_2} = d_2)$; úhly $\sphericalangle(PP_1) = \sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle(PP_2) = \sphericalangle\beta$, $\sphericalangle(P_1P_1) = \sphericalangle\alpha_1 = 0$, $\sphericalangle(P_2x) = \sphericalangle\alpha_2$, $\sphericalangle(P_1x) = \sphericalangle\beta$, $\sphericalangle(P_2P_2) = \beta_2 = 0$.

Jak z obrazce patrno, jest

$$y = d_1 \sin\beta_1 = d\cos\alpha\sin\beta_1$$
$$z = d_2\sin\alpha_2 = d\cos\beta\sin\alpha_2;$$

a ježto

$$y = d\sin\beta,\quad z = d\sin\alpha,$$

jest též

$$\sin\beta = \cos\alpha\sin\beta_1 \quad \text{a} \quad \sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha_2,$$

tudíž

$$\sin\alpha_2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\ \ldots \tag{1}$$

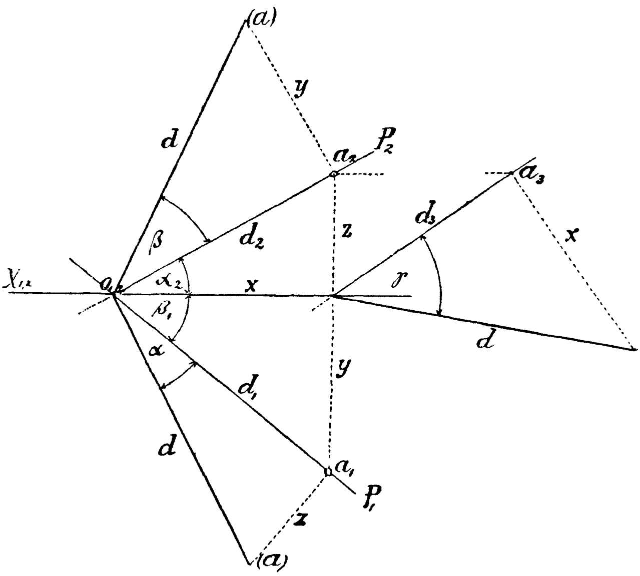
$$\sin\beta_1 = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\ \ldots \tag{2}$$

Rovnicím (1) a (2) vyhovují tyto dvojice:

$\alpha_2,\ \beta_1,$
$\alpha_2,\ 180 - \beta_1$
$180 - \alpha_2,\ \beta_1,$
$180 - \alpha_2,\ 180 - \beta_1.$

Též jest

$$\sin \beta_1 = \frac{y}{d_1},\ \sin \alpha_2 = \frac{z}{d_2}.$$



Řešení jest čtvero. Zobrazené přímky představují úhlopříčky pravoúhlého rovnoběžnostěnu o středu a, jehož podstava spočívá v půdorysně a dvě její hrany jsou rovnoběžné s x.

Ježto

$$z + d_1 > d,\ y + d_2 > d,$$

nebo též

$$d \sin \alpha + d \cos \alpha > d,\ d \sin \beta + d \cos \beta > d,$$

tudíž

$$\sin \alpha + \cos \alpha > 1,$$
$$\sin \beta + \cos \beta > 1,$$

jest též

$$\sin^2\alpha + \sin 2\alpha + \cos^2\alpha > 1,$$
$$\sin^2\beta + \sin 2\beta + \cos^2\beta > 1,$$

t. j.

$$\sin 2\alpha > 0$$
$$\sin 2\beta > 0,$$

pročež

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta > 0,$$

nebo

$$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) > 0$$

a

$$\sin(\alpha+\beta) > 0.$$

Případy, které mohou nastati, jsou:

1. $\alpha + \beta = 90^0$, pročež $1 > 0$ (vyhovuje).

2. $\alpha + \beta > 90^0$, tudíž $\alpha + \beta = 90^0 + \varepsilon$ a $\sin(\alpha+\beta) = -\cos\varepsilon$ . . . (nevyhovuje . . . záporné číslo).

3. $\alpha + \beta < 90^0$, nebo $\alpha + \beta = 90^0 - \varepsilon$
$\sin(\alpha+\beta) = \cos\varepsilon$ . . . (vyhovuje . . . kladné číslo).

Součet odchylek α, β přímky od obou průměten jest obecně:

$$\alpha + \beta \lesseqgtr 90^0.$$

Poněvadž

$$d_2 < d,\ d_1 < d,$$

jest

$$\frac{1}{d_2} > \frac{1}{d},\quad \frac{1}{d_1} > \frac{1}{d},$$

nebo

$$\frac{z}{d_2} > \frac{z}{d},\quad \frac{y}{d_1} > \frac{y}{d},$$

t. j.

$$\sin\alpha_2 > \sin\alpha,\ \sin\beta_1 > \sin\beta,$$

pročež

$$\alpha_2 > \alpha,\ \beta_1 > \beta \ \text{ a } \ \alpha_2 + \beta_1 > \alpha + \beta.$$

Důsledky:

1. Je-li $\alpha = 0 (P \parallel \pi)$, jest $\sin\beta_1 = \sin\beta$ (z rovnice (2)), t. j. $\beta = \beta_1$ a z rovnice (1): $\sin\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = 0$.

2. Je-li $\beta = 0 (P \parallel \nu)$, jest $\sin\alpha_2 = \sin\alpha$ (z rovnice (1)) a $\alpha = \alpha_2$ a z (2) rovnice $\sin\beta_1 = 0$, $\beta_1 = 0$.

3. Je-li $\alpha = \beta = 0 (P \parallel x)$, pak $\alpha_2 = \beta_1 = 0$.

4. Je-li $\alpha_2 = \beta_1 = 90^0 (P \perp x)$, pak jest z rovnice (1) a (2) $\cos\alpha = \sin\beta$, $\cos\beta = \sin\alpha$, t. j. $\alpha + \beta = 90^0$.

5. Je-li $\alpha_2 = \beta_1 = 135^0$ (obvyklý směr paprsků při osvětlení geometrálním), pak jest

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha},$$

tudíž

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha,\ \cos\beta = \sin\alpha\sqrt{2}$$

a $$\sin^2\beta + \cos^2\beta = \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha,$$

z čehož

$$3\cos^2\alpha = 2 \quad \text{a} \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6} = \cos\beta.$$

Směr paprsků má směr tělesné úhlopříčky krychle, jejíž stěny jsou s průmětnami π, ν rovnoběžné.

Obecně: Je-li $\alpha_2 = \beta_1$, jest

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha},$$

nebo $\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta\cos\beta$, t. j. $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ a $\alpha = \beta$.

6. Je-li $\alpha = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta$, pak jest též $\sin\alpha = \sin\beta_1$, $\sin\alpha_2 = \sin\beta$, t. j.

$$\frac{z}{d} = \frac{y}{d_1} \quad \text{a} \quad \frac{z}{d_2} = \frac{y}{d},$$

nebo

$$z : y = d : d_1,$$
$$z : y = d_2 : d,$$

tudíž

$$d : d_1 = d_2 : d,\quad d^2 = d_1 d_2.$$

Ježto $d > d_1$, $d > d_2$, jest vždy $d^2 > d_1 d_2$; jen v případě, že $d_1 = d_2 = d$, vyhovuje se podmínce: $d^2 = d_1 d_2$ (případ 3).

Připojíme-li ještě odchylku γ přímky P od třetí průmětny μ, jest přehledně

$$\cos\alpha = \frac{z}{d},\ \cos\beta = \frac{y}{d},\ \cos\gamma = \frac{x}{d}$$

a $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{d^2}$, patrno, že

$x^2 + z^2 = d_2^2$, $d^2 = y^2 + d_2^2$, pročež $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ a

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ježto jest
$$d_1^2 = d^2 - z^2, \quad d_2^2 = d^2 - y^2$$
a obdobně
$$d_3^2 = d^2 - x^2,$$
jest též
$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 3d^2 - (x^2 + y^2 + z^2),$$
t. j.
$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 2d^2$$
$$\text{a} \quad d = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{2}}.$$

P_1, P_2, X určují pravoúhlý trojhran, k němuž přísluší sférický $\triangle$ pravoúhlý o odvěsnách α_2, β_1 a přeponě δ (odchylka průmětů P_1, P_2), jest tudíž $\cos\delta = \cos\alpha_2 \cos\beta_1$.

Důsledky:
$$\alpha_2 = \beta_1 = 90^0, \quad \delta = 90^0, \quad P \perp x \text{ (případ 4.)}$$
$$\alpha_2 = \beta_1 = 0, \quad \delta = 0^0, \quad P \parallel x \text{ (případ 3.)}$$

P, P_1, P_2 určují trojhran o stranách δ, α, β; úhel ω, který svírají obě promítající roviny přímky P, určen jest rovnicí
$$\cos\delta = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos\omega,$$
$$\cos\omega = \frac{\cos\alpha_2 \cos\beta_1 - \cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta};$$
je-li $\omega = 90^0$, jest $\cos\alpha_2 \cos\beta_1 = \cos\alpha \cos\beta$ $(P \parallel x)$.

Opíšeme-li plochu kulovou poloměrem d z vrcholu O trojhranu $P_1 P_2 X$, vznikne sférický trojúhelník, jehož plocha
$$\Delta = \frac{\pi d^2}{180} \varepsilon,$$
kdež
$$\varepsilon = \alpha_2 + \beta_1 - 90^0.$$

Je-li $\alpha_2 = \beta_1 = 135^0$ (případ 5.), jest $\varepsilon = 180^0$ a $\Delta = \pi d^2$; plocha Δ . $= \frac{1}{4}$ plochy kulové o poloměru d.

Je-li $\alpha_2 = \beta_1 = 90^0$ (případ 4.), jest $\frac{\pi d^2}{2}$, t. j. $\frac{1}{2}$ plochy kulové o poloměru d.

Opíšeme-li poloměry d_1, d_2, d_3, d plochy kulové, jest součet ploch kulových o poloměrech d_1, d_2, d_3 roveň dvojnásobné ploše kulové o poloměru d.