Mikhail Borisovich Nevel'son

Об асимптотически оптимальном оценивании нуля неизвестной функции

Kybernetika, Vol. 12 (1976), No. 6, (397)--413

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/125342

KYBERNETIKA — TOM 12 (1976) ВЫПУСК 6

Об асимптотически оптимальном оценивании нуля неизвестной функции

Михаил Борисович Невельсон

Рассматривается задача оценивания нуля неизвестной функции, наблюдаемой со случайными ошибками. Предполагается, что известны математические ожидания конечного числа функций от этих ошибок. Строятся рекуррентные процедуры оценивания, являющиеся оптимальными в определенном смысле.

1. Пусть $f(x)$ – некоторая неизвестная функция, такая, что $f(x_0) = 0$, $f(x) \cdot (x - x_0) > 0$ при $x \neq x_0$. Пусть, далее, в каждый момент времени t статистик может проводить „независимые" измерения значений функции $f(x)$ в произвольной точке $x = x(t)$ прямой E с аддитивной случайной ошибкой $\xi(t, x)$, так что результат измерения $Z(t, x)$ имеет вид $Z(t, x) = f(x) + \xi(t, x)$. Требуется оценить величину x_0 по возможности наилучшим образом*).

Хорошо известно, [1–3], что если

$$\mathsf{M}\,\xi(t, x) \equiv 0 \tag{1.1}$$

и выполнены некоторые условия на $f(x)$, $\xi(t, x)$, то процесс Роббинса - Монро

$$X(t+1) - X(t) = -\frac{a}{1+t} Z(t+1, X(t)), \qquad X(0) = x, \tag{1.2}$$

где $a = \text{Const} > 0$, x — произвольная точка прямой, удовлетворяет соотношениям:**)

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = x_0 \quad \text{почти наверное (п. н.)},$$

*) Все случайные величины предполагаются заданными на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

**) Всюду ниже запись $У(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ означает, что $У(t)$ асимптотически нормально с параметрами $(0, \sigma^2)$.

$$\sqrt{(t)}\,(X(t) - x_0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(a)), \quad \sigma^2(a) = \frac{a^2\sigma^2}{2a\alpha - 1}.$$

(Здесь $\alpha = f'(x_0)$, $\sigma^2 = \lim_{t\to\infty, x\to x_0} \mathsf{M}\,\xi^2(t, x)$.)

Известны также оптимальные адаптивные процедуры [4–7], которые асимптотически эквивалентны процедуре (1.2) с $a = 1/\alpha$ (именно при этом значении a функция $\sigma^2(a)$ достигает минимального значения). Однако все процедуры из упомянутых выше работ требовали, чтобы функция $|f(x)|$ росла при $|x| \to \infty$ не быстрее, чем линейная. В [8] было показано, что некоторая модификация процедур из [4], [5] позволяет освободиться от этого (и некоторых других) ограничений. При этом в [8] предполагалось, что вместо (1.1) выполнено более общее условие: известно математическое ожидание $S_0(t, x) = \mathsf{M}\,S(\xi(t, x))$ для некоторой монотонной функции $S(z)$.

Однако в ряде случаев статистик может обладать более обширной априорной информацией относительно случайных ошибок $\xi(t, x)$, например, ему могут быть известны первые r моментов $\xi(t, x)$, или, в более общей ситуации, математические ожидания $S_i^{(0)}(t, x) = \mathsf{M}\,S_i(\xi(t, x))$, $i = 1, 2, \ldots, r$, где $S_i(z)$ — некоторые известные функции*). При этом возникает задача о том, как использовать эту дополнительную априорную информацию при оценивании x_0. Именно изучению этого вопроса и посвящена настоящая заметка.

Мы покажем ниже, что если известны r функций $S_1^{(0)}(t, x), \ldots, S_r^{(0)}(t, x)$, то по измерениям $Z(t, x)$ можно построить простые рекуррентные процедуры, являющиеся оптимальными в том же смысле, что и процедуры из [4–8]. При этом и в случае $r = 1$, $S_1^{(0)}(t, x) \equiv 0$ предлагаемые процедуры будут асимптотически эквивалентны процедуре (1.2) с $a = 1/\alpha$ при более общих предположениях, чем процедуры из [4–8]. Частным случаем рассматриваемой задачи является задача оценивания „сигнала" в аддитивном шуме.

2. Рассмотрим вспомогательную задачу оценивания корня x_0 уравнения $R(x) = 0$ по „независимым" измерениям $Y(t, x) = R(x) + \eta(t, x)$, где $\eta(t, x)$, $t = 1, 2, \ldots, x \in E$ — случайные величины с нулевым средним, так что $R(x)$ — функция регрессии, не предполагая, что этот корень единственный.

Как показано в [9] (см. также [6, гл. 7]), если имеется дополнительная априорная информация о том, что на отрезке $[\varrho_1, \varrho_2]$ функция $R(x)$ обращается в нуль лишь в точке x_0, то при некоторых условиях усеченная процедура**)

*) Все рассматриваемые ниже функции одной переменной предполагаются измеримыми.

**) Здесь и ниже введено обозначение

$$[x]_a^b = \begin{cases} b, & \text{если} \quad x \geqq b, \\ x, & \text{если} \quad b \geqq x \geqq a, \\ a, & \text{если} \quad x \leqq a. \end{cases}$$

$$X(t+1) = \left[X(t) - \frac{1}{1+t} Y(t+1, X(t))\right]_{\varrho_1}^{\varrho_2}, \tag{2.1}$$
$$X(0) = x$$

сходится к x_0 п. н. и удовлетворяет соотношению

$$\sqrt{(t)}\,(X(t) - x_0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)\,, \tag{2.2}$$

где

$$\sigma_0^2 = (2R'(x_0) - 1)^{-1} \lim_{t\to\infty, x\to x_0} \mathsf{M}\,\eta^2(t, x)\,.$$

В некоторых задачах оценивания (см. [10]) возникает ситуация, когда такой априорной информации нет, но статистик знает, что уравнение $R(x) = 0$ имеет единственное решение x_0 в некоторой окрестности $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ точки x_0, причем величина ε известна. Тогда, в соответствии с идеей работы [10], нужно сначала построить какую-либо оценку $X_0(t)$, сходящуюся к x_0 с вероятностью 1, а затем заменить (2.1) на процедуру

$$X(t+1) = \left[X(t) - \frac{1}{1+t} Y(t+1, X(t))\right]_{X_0(t)-\varepsilon}^{X_0(t)+\varepsilon}, \tag{2.3}$$
$$X(0) = x\,.$$

Пользуясь результатами работы [10], легко получить условия, при выполнении которых эта процедура также будет удовлетворять соотношению (2.2).

Возникает теперь вопрос о том, можно ли в только что описанной ситуации построить оценки, обладающие свойством (2.2), если величина ε не известна. Оказывается, это можно сделать, рассматривая вместо (2.3) процедуру

$$X(t+1) = \left[X(t) - \frac{1}{1+t} Y(t+1, X(t))\right]_{X_0(t)-\varepsilon(t)}^{X_0(t)+\varepsilon(t)}, \tag{2.4}$$
$$X(0) = x\,,$$

где $\varepsilon(t)$ – некоторая детерминированная последовательность, стремящаяся к нулю не слишком быстро по отношению к тому, как убывает с ростом времени разность $X_0(t) - x_0$ (более точно см. условие (2.6) леммы 2.1).

В дальнейшем нам удобно будет считать, что функция регрессии зависит от времени.

Пусть $Y(t, x)$, $t \geqq T$ (T – некоторое целое положительное число), $x \in E$ – совокупность случайных величин, обладающих следующими свойствами:

(a) $Y(t, x)$ – $\mathcal{F}_t$-измерима при любом фиксированном x, где $\mathcal{F}_t$, $t \geqq T$ – какая-либо монотонно возрастающая последовательность σ-алгебр, (б) условное математическое ожидание $R(t, x) = \mathsf{M}\{Y(t, x)/\mathscr{F}_{t-1}\}$ конечно п. н. при всех $t > T$ и $|x - x_0| < \nu$, где x_0, ν — фиксированные числа,

(в) функция $R(t, x)$ допускает представление $R(t, x) = \alpha(t, x)\,(x - x_0)$, причем*)

$$\lim_{t \to \infty, x \to x_0} \alpha(t, x) = \alpha_0 ,$$

где α_0 — не случайная постоянная, большая $1/2$,

(г) для некоторого фиксированного K

$$\sup_{t > T, |x - x_0| < \nu} \mathsf{M}\{\Phi^2(t, x)/\mathscr{F}_{t-1}\} \leqq K ,$$

где $\Phi(t, x) = Y(t, x) - R(t, x)$,

(д) с вероятностью 1 функция $A(t, x) = \mathsf{M}\{\Phi^2(t, x)/\mathscr{F}_{t-1}\}$ непрерывна в точке $t = \infty$, $x = x_0$, причем величина $A(\infty, x_0)$ не случайна**),

(е) семейство $\{Y(t, x),\ t > T,\ |x - x_0| < \nu\}$ равномерно интегрируемо.

Лемма 2.1. Предположим, что случайные величины $Y(t, x)$ $t > T$, $x \in E$ удовлетворяют условиям (а)—(е), а $X_0(t)$ — $\mathscr{F}_t$-измеримый случайный процесс такой, что

$$\lim_{t \to \infty} \vartheta(t)\,(X_0(t) - x_0) = 0 , \tag{2.5}$$

где $\vartheta(t)$ — некоторая последовательность положительных чисел. Тогда, если

$$\varepsilon(t) \to 0 , \quad \vartheta(t) \to \infty , \quad \min\,(t^{\gamma_0} , \quad \vartheta(t))\,\varepsilon(t) \to \infty \tag{2.6}$$

для какого-нибудь γ_0, $0 < \gamma_0 < 1/2$, то процесс (2.4) удовлетворяет для любого $\mathscr{F}_t$-измеримого начального условия $X(T)$ соотношению

$$\sqrt{t}\,(X(t) - x_0) \sim \mathscr{N}\left(0, \frac{A(\infty, x_0)}{2\alpha_0 - 1}\right).$$

Доказательство. В силу (2.5), $X_0(t) = x_0 + \psi(t)$, где

$$\lim_{t \to \infty} \vartheta(t)\,|\psi(t)| = 0 . \tag{2.7}$$

Пусть δ — произвольное положительное число, а T_1 выбрано из условий

$$P\{\vartheta(t)\,|\psi(t)| < 1 \text{ при } \ t \geqq T_1\} > 1 - \frac{\delta}{3} , \tag{2.8}$$

*) Всюду ниже соотношения между случайными величинами понимаются с вероятностью 1.

**) Функция $B(t, x)$ называется непрерывной в точке $t = \infty$, $x = x_0$, если $B(t, x) - B(t, x_0) \to 0$ при $t \to \infty$, $x \to x_0$ и $B(t, x_0)$ имеет конечный предел при $t \to \infty$.

$$0 < \varepsilon(t) - \vartheta^{-1}(t) < \nu \quad \text{при} \quad t \geqq T_1 . \tag{2.9}$$

Такой выбор T_1 возможен брагодаря (2.6), (2.7).

Рассмотрим процесс $X_1(t)$, определенный при $t \geqq T_1$ формулами

$$X_1(t+1) = \left[X_1(t) - \frac{1}{1+t} Y(t+1, X_1(t))\right]_{x_0+\tilde{\psi}(t)-\varepsilon(t)}^{x_0+\tilde{\psi}(t)+\varepsilon(t)},$$

$$X_1(T_1) = X(T_1) .$$

Здесь

$$\tilde{\psi}(t) = [\psi(t)]_{-1/\vartheta(t)}^{1/\vartheta(t)} .$$

Из (2.8) вытекает неравенство

$$P\{X_1(t) \equiv X(t) \quad \text{при} \quad t \geqq T_1\} > 1 - \delta/3 . \tag{2.10}$$

Так как $|X_1(t) - x_0| < \nu$ при всех достаточно больших $t \geqq \tilde{T}_1$, то $R(t+1, X_1(t)) = (\alpha_0 + \alpha(t))(X_1(t) - x_0)$, где $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Пусть еще $\varepsilon_0 > 0$ таково, что $\beta = \alpha_0 - \varepsilon_0 > 1/2$, а число $T_2 \geqq T_1$ выбрано из условия

$$P\{|\alpha(t)| < \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad t \geqq T_2\} > 1 - \frac{\delta}{3} . \tag{2.11}$$

Определим процесс $X_2(t)$ следующим образом:

$$X_2(t+1) = \left[X_2(t) - \frac{(\alpha_0 + \tilde{\alpha}(t))(X_2(t) - x_0) + \Phi(t+1, X_2(t))}{1+t}\right]_{x_0+\tilde{\psi}(t)-\varepsilon(t)}^{x_0+\tilde{\psi}(t)+\varepsilon(t)},$$

$$X_2(T_2) = X_1(T_2) ,$$

где $\tilde{\alpha}(t) = [\alpha(t)]_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0}$.

Из (2.10), (2.11) вытекает, что

$$P\{X_2(t) \equiv X(t) \quad \text{при} \quad t \geqq T_2\} > 1 - \frac{2\delta}{3} . \tag{2.12}$$

Докажем теперь для любого $\gamma < 1/2$ равенство

$$\lim_{t\to\infty} t^\gamma |X_2(t) - x_0| = 0 . \tag{2.13}$$

Учитывая (2.9), вытекающую из условия (а) $\mathscr{F}_t$-измеримость $X_2(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$ и условие (г) получим

$$\text{(2.14)} \qquad \mathsf{M}\{(X_2(t+1)-x_0)^2/\mathscr{F}_t\} \leqq$$

$$\leqq \mathsf{M}\left\{\left(X_2(t)-x_0-\frac{(\alpha_0+\tilde{\alpha}(t))(X_2(t)-x_0)+\Phi(t+1,X_2(t))}{1+t}\right)^2\Big/\mathscr{F}_t\right\} \leqq$$

$$\leqq (X_2(t)-x_0)^2-\frac{2(\alpha_0+\tilde{\alpha}(t))(X_2(t)-x_0)^2}{1+t}+$$

$$+\frac{c_1(1+(X_2(t)-x_0)^2)}{(1+t)^2}.$$

(Здесь и ниже c_i — положительные постоянные.)

Отсюда при всех достаточно больших t

$$\mathsf{M}\{(X_2(t+1)-x_0)^2/\mathscr{F}_t\} \leqq (X_2(t)-x_0)^2\left(1-\frac{\beta_1}{1+t}\right)+\frac{c_1}{(1+t)^2},$$

где $\beta_1 > 1$.

Далее, полагая $V(t) = t^{\gamma_1}(X_2(t)-x_0)^2 + t^{-\gamma_2}$, $0 < \gamma_1 < 1$, $0 < \gamma_2 < 1-\gamma_1$, принимая во внимание (2.14) и соотношение $\gamma_1 < \beta_1$, находим

$$\mathsf{M}\{V(t+1)/\mathscr{F}_t\} - V(t) = (1+t)^{\gamma_1}\,\mathsf{M}\{(X_2(t+1)-x_0)^2/\mathscr{F}_t\} +$$

$$+(t+1)^{-\gamma_2} - t^{\gamma_1}(X_2(t)-x_0)^2 - t^{-\gamma_2} \leqq$$

$$\leqq (1+t)^{\gamma_1}\left[(X_2(t)-x_0)^2\left(1-\frac{\beta_1}{1+t}\right)+\frac{c_1}{(1+t)^2}\right]-$$

$$-t^{\gamma_1}(X_2(t)-x_0)^2-\gamma_2(1+t)^{-\gamma_2-1} \leqq$$

$$\leqq (X_2(t)-x_0)^2\left[(1+t)^{\gamma_1}\left(1-\frac{\beta_1}{1+t}\right)-t^{\gamma_1}\right]+$$

$$+c_1(1+t)^{\gamma_1-2}-\gamma_2(1+t)^{-\gamma_2-1} \leqq 0$$

при всех достаточно больших t. Отсюда и теоремы о существовании с вероятностью 1 предела у неотрицательного супермартингала вытекает (2.13) для любого $\gamma < 1/2$.

Из (2.13) при $\gamma = \gamma_0$ сдедует, что процесс

$$\tilde{X}_2(t) = X_2(t) - \frac{(\alpha_0+\tilde{\alpha}(t))(X_2(t)-x_0)+\Phi(t+1,X_2(t))}{1+t}$$

с вероятностью 1 лишь конечное число раз покидает отрезок $[x_0+\tilde{\psi}(t)-\varepsilon(t),\ x_0+\tilde{\psi}(t)+\varepsilon(t)]$. Действительно, если это не так, то процесс $X_2(t)-x_0$ с положительной вероятностью бесконечное число раз принимает одно из значений $\tilde{\psi}(t) + \varepsilon(t)$ или $\tilde{\psi}(t) - \varepsilon(t)$, т.е. $|X_2(t) - x_0 - \tilde{\psi}(t)| = \varepsilon(t)$ с положительной вероятностью бесконечно много раз. Этого, однако, быть не может, так как при $t \to \infty$ с одной стороны

$$\min(t^{\gamma_0}, \vartheta(t))\,|X_2(t) - x_0 - \tilde{\psi}(t)| \leqq t^{\gamma_0}|X_2(t) - x_0| + \vartheta(t)\,|\psi(t)| \to 0\,,$$

а с другой стороны

$$\min(t^{\gamma_0}, \vartheta(t))\,\varepsilon(t) \to \infty$$

по условию.

Значит, найдется такое T_3, что

$$P\{\tilde{X}_2(t) \in [x_0 + \tilde{\psi}(t) - \varepsilon(t), x_0 + \tilde{\psi}(t) + \varepsilon(t)] \quad \text{при} \quad t \geqq T_3\} > 1 - \delta/3\,. \tag{2.15}$$

Рассмотрим, наконец, при $t \geqq T_3$ процесс $X_3(t)$, определенный формулами

$$X_3(t+1) = X_3(t) - \frac{(\alpha_0 + \tilde{\alpha}(t))(X_3(t) - x_0) + \Phi(t+1, X_2(t))}{1+t}\,,$$

$$X_3(T_3) = X_2(T_3)\,.$$

Из (2.12), (2.15) имеем

$$P\{X_3(t) \equiv X(t) \quad \text{при} \quad t \geqq T_3\} > 1 - \delta\,. \tag{2.16}$$

Далее, как обычно устанавливаем (см. [3, 5, 8]), что $X_3(t) \to x_0$ п.н. при $t \to \infty$ и

$$\sqrt{(t)}\,(X_3(t) - x_0) \sim \mathcal{N}(0, (2\alpha_0 - 1)^{-1}\,A(\infty, x_0))\,.$$

Теперь утверждение леммы является следствием, в силу произвольности δ, неравенства (2.16).

3. Вернемся к задаче поставленной в п. 1.

Обозначим через $\mathfrak{A}_t$ минимальную σ-алгебру, порожденную семейством случайных величин $\{\xi(t, x), x \in E\}$, а через $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебру, порожденную семейством $\{\xi(u, x),\ u \leqq t,\ x \in E\}$.

Всюду ниже будем считать не оговаривая этого особо, что $\xi(t, x)$ – $\mathfrak{A}_t \times \mathcal{B}$-измерима, где $\mathcal{B}$ – борелевская σ-алгебра, а семейство $\{\xi(t, x), x \in E\}$ не зависит от $\mathcal{F}_{t-1}$.

Рассмотрим процесс

$$X(t+1) = \left[X(t) - \frac{1}{1+t}\sum_{i=1}^{r} a_i\,Y_i(t+1, X(t))\right]_{X_0(t)-\varepsilon(t)}^{X_0(t)+\varepsilon(t)}, \tag{3.1}$$

$$X(0) = x\,,$$

где $a_1, \ldots, a_r$ – некоторые постоянные, $Y_i(t, x) = S_i(Z(t, x)) - S_i^{(0)}(t, x)$.

Очевидным следствием леммы 2.1 является.

Лемма 3.1. Пусть выполнены следующие условия:

(а) существует такая постоянная $v > 0$, что

$$\sup_{t \geqq 1, |x - x_0| < v} \left[|R_i(t, x)| + |A_{ij}(t, x)|\right] < \infty, \quad i, j = 1, \ldots, r,$$

где

$$R_i(t, x) = \mathsf{M}\, Y_i(t, x),$$
$$A_{ij}(t, x) = \mathsf{M}(Y_i(t, x) - R_i(t, x))(Y_j(t, x) - R_j(t, x)),$$

(б) $R_i(t, x) = (\alpha_i + \alpha_i(t, x))(x - x_0)$, $i = 1, \ldots, r$, причем $\alpha_i(t, x) \to 0$ при $t \to \infty$, $x \to x_0$,

(в) функции $A_{ij}(t, x)$, $i, j = 1, \ldots, r$ непрерывны в точке $t = \infty$, $x = x_0$,

(г) семейства $\{Y_i(t, x),\ t \geqq 1,\ |x - x_0| < v\}$, $i = 1, \ldots, r$, равномерно интегрируемы,

(д) процесс $X_0(t)$ — $\mathscr{F}_t$-измерим, удовлетворяет равенству (2.5) для некоторой последовательности положительных чисел, причем справедливы соотношения (2.6).

Тогда, если

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^{r} a_i \alpha_i > 1/2,$$

а процесс $X(t)$ определен формулами (3.1), то

$$\sqrt{(t)}\,(X(t) - x_0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(a_1, \ldots, a_r)), \tag{3.2}$$

где

$$\sigma^2(a_1, \ldots, a_r) = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{r} \sigma_{ij} a_i a_j}{2\alpha_0 - 1}, \quad \sigma_{ij} = A_{ij}(\infty, x_0).$$

4. Обозначим через a и α векторы-столбцы с координатами $(a_1, \ldots, a_r)$ и $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ соответственно, через σ — матрицу с элементами σ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, r$, а через Δ составную матрицу

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sigma & -\alpha^T \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

(T — символ транспонирования).

Тогда величину $\sigma^2(a) = \sigma^2(a_1, \ldots, a_r)$ в (3.2) можно, очевидно, записать следующим образом

$$\sigma^2(a) = \frac{(\sigma a, a)}{2(a, \alpha) - 1}.$$

Здесь $(.,.)$ — скалярное произведение в r-мерном евклидовом пространстве.

Нетрудно, понять, применяя, например, метод множителей Лагранжа, что

$$\min_{\{a;(a,\alpha)>1/2\}} \sigma^2(a) = \sigma^2(a_0) = \frac{\det \sigma}{\det \Delta}, \quad \text{если} \quad |\alpha| \neq 0, \quad \det \sigma \neq 0,$$

где a_0 — вектор с координатами

$$a_{0i} = \frac{\det \Delta_i}{\det \Delta},$$

а Δ_i — матрица, получающаяся из Δ заменой ее i-ого столбца столбцом $(0, \ldots, 0, 1)^T$.

Теперь разумно поставить вопрос о построении процедур, обладающих свойством (3.2) с $a = a_0$. Непосредственно использовать для этой цели вектор a_0 нельзя, так как он зависит от неизвестных параметров α_i, σ_{ij}. Поэтому естественно сначала построить некоторую оценку $a_i(t)$ величинны a_{0i} и использовать затем ее в процедуре (3.1) вместо a_i. К построению такой оценки мы и переходим.

Пусть $X_0(t)$ — $\mathscr{F}_t$-измеримый случайный процесс. Положим

$$\alpha_i(t+1) - \alpha_i(t) = -\frac{1}{1+t}\alpha_i(t) + \frac{\vartheta(t)}{2(1+t)}(Y_i(t+1, X_0(t) + \vartheta^{-1}(t)) -$$

$$- Y_i(t+1, X_0(t) - \vartheta^{-1}(t))), \quad \alpha_i(0) = 0,$$

$$\sigma_{ij}(t+1) - \sigma_{ij}(t) = -\frac{1}{1+t}\sigma_{ij}(t) + \frac{Y_i(t+1, X_0(t))\, Y_j(t+1, X_0(t))}{1+t},$$

$$\sigma_{ij}(0) = 0.$$

Пустьеще

$$\Delta(t) = \begin{pmatrix} \sigma(t) & -\alpha^T(t) \\ \alpha(t) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\sigma(t)$ — матрица с элементами $\sigma_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, r$, $\alpha(t)$ — вектор с координатами $\alpha_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$. Обозначим также через $\Delta_i(t)$ матрицу, получающуюся из $\Delta(t)$ заменой ее i-ого столбца на столбец $(0, \ldots, 0, 1)^T$.

В качестве оценки вектора a_0 возьмем вектор $a(t)$ с координатами

$$a_i(t) = \frac{\det \Delta_i(t)}{\mathrm{d}(t)}, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{4.1}$$

где

$$d(t) = \begin{cases} \det \Delta(t), & \text{если} \quad \det \Delta(t) \neq 0 \\ 1, & \text{если} \quad \det \Delta(t) = 0. \end{cases}$$

 Рассмотрим процедуру

$$(4.2)\qquad X(t+1) = \left[X(t) - \frac{1}{1+t}\sum_{i=1}^{r} a_i(t)\, Y_i(t+1, X(t))\right]_{X_0(t)-\varepsilon(t)}^{X_0(t)+\varepsilon(t)},$$

$$X(0) = x\,.$$

Лемма 4.1. Пусть выполнены условия (а) — (д) леммы 3.1 и, кроме того,

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\vartheta^2(t)}{t^2} < \infty\,,\quad \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 \neq 0\,,\quad \det\sigma \neq 0\,.$$

Тогда для процедуры (4.1), (4.2) справедливо соотношение

$$\sqrt{(t)}\,(X(t) - x_0) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\det\sigma}{\det\Delta}\right).$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ произвольно, а число T_1 выбрано из условий: $\vartheta^{-1}(t) < \nu/2$ при $t \geqq T_1$ и

$$(4.3)\qquad P\{|X_0(t) - x_0| < \nu/2 \quad \text{при} \quad t \geqq T_1\} > 1 - \delta\,.$$

Рассмотрим случайный процесс

$$\beta_i(t) = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\frac{\vartheta(s-1)}{2}\left[Y_i(s, \tilde{X}_0(s-1) + \vartheta^{-1}(s-1)) - \right.$$
$$\left. - Y_i(s, \tilde{X}_0(s-1) - \vartheta^{-1}(s-1))\right],$$

где

$$\tilde{X}_0(s) = [X_0(s)]_{x_0-\nu/2}^{x_0+\nu/2}\,.$$

Этот процесс, очевидно, можно представить в виде

$$\beta_i(t) = \frac{1}{t}\sum_{s=T_1+1}^{t}\frac{\vartheta(s-1)}{2}\left[R_i(s, \tilde{X}_0(s-1) + \vartheta^{-1}(s-1)) - \right.$$
$$\left. - R_i(s, \tilde{X}_0(s-1) - \vartheta^{-1}(s-1))\right] + \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\Phi_i(s)\,\vartheta(s-1) + \gamma(t)\,,$$

причем

$$(4.4)\qquad \sup_{t\geqq 1}|t\,\gamma(t)| < c_2\,,$$

$$\mathsf{M}\{\Phi_i(s)/\mathcal{F}_{s-1}\} = 0\,,\quad \sup_{s\geqq T_1}\{\mathsf{M}\,\Phi_i^2(s)/\mathcal{F}_{s-1}\} < c_3\,.$$

Из условия (б) леммы 3.1 имеем:

$$R_i(s, x) = [\alpha_i + \delta_i(s, x)](x - x_0), \quad \lim_{s\to\infty, x\to x_0} \delta_i(s, x) = 0. \tag{4.5}$$

Поэтому

$$\tilde{R}(s) = \vartheta(s-1)\frac{R_i(s, \tilde{X}_0(s-1) + \vartheta^{-1}(s-1)) - R_i(s, \tilde{X}_0(s-1) - \vartheta^{-1}(s-1))}{2} =$$

$$= \alpha_i + \frac{\vartheta(s-1)}{2}[\delta_i(s, \tilde{X}_0(s-1) + \vartheta^{-1}(s-1)) \,.$$

$$.\,(\tilde{X}_0(s-1) - x_0 + \vartheta^{-1}(s-1)) - \delta_i(s, \tilde{X}_0(s-1) - \vartheta^{-1}(s-1))\,.$$

$$.\,(\tilde{X}_0(s-1) - x_0 - \vartheta^{-1}(s-1)].$$

Следовательно,

$$|\tilde{R}(s) - \alpha_i| \leqq \tfrac{1}{2}|\delta_i(s, \tilde{X}_0(s-1) + \vartheta^{-1}(s-1))|\,.$$

$$.\,[\vartheta(s-1)|\tilde{X}_0(s-1) - x_0| + 1] + \tfrac{1}{2}|\delta_i(s, \tilde{X}_0(s-1) - \vartheta^{-1}(s-1))|\,.$$

$$.\,[\vartheta(s-1)|\tilde{X}_0(s-1) - x_0| + 1] \to 0$$

при $s \to \infty$, поскольку из (4.4) и равенства (см. [12], стр. 407)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\Phi_i(s)\,\vartheta(s-1) = 0$$

получаем, что

$$\lim_{t\to\infty}\beta_i(t) = \alpha_i\,. \tag{4.6}$$

Очевидно,

$$\alpha_i(t) = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\frac{\vartheta(s)}{2}[Y_i(s, X_0(s-1) + \vartheta^{-1}(s-1)) - \tag{4.7}$$

$$- Y_i(s, X_0(s-1) - \vartheta^{-1}(s-1))], \quad \alpha_i(0) = 0\,.$$

Из (4.3), (4.6) и (4.7) имеем:

$$P\{\lim_{t\to\infty}\alpha_i(t) = \alpha_i\} \geqq \tag{4.8}$$

$$\geqq P\{\lim_{t\to\infty}\alpha_i(t) = \alpha_i,\ |X_0(s) - x_0| < v/2 \quad \text{при} \quad s \geqq T_1\} =$$

$$= P\{\lim_{t\to\infty}\beta_i(t) = \alpha_i,\ |X_0(s) - x_0| < v/2 \quad \text{при} \quad s \geqq T_1\} > 1 - \delta\,.$$

В силу произвольности δ (4.8) означает, что с вероятностью 1

$$\lim_{t\to\infty}\alpha_i(t) = \alpha_i\,. \tag{4.9}$$

Точно также, рассматривая процесс $\tilde{X}_0(s)$, находим

$$P\{\lim_{t\to\infty} \sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}\} = 1 . \tag{4.10}$$

Из (4.9), (4.10) вытекают равенства

$$\lim_{t\to\infty} \det \Delta(t) = \det \Delta ,$$

$$\lim_{t\to\infty} \Delta_i(t) = \Delta_i , \quad i = 1, \ldots, r .$$

Следовательно, поскольку $\det \Delta \neq 0$,

$$\lim_{t\to\infty} a_i(t) = a_{i0} , \quad i = 1, \ldots, r . \tag{4.11}$$

Пусть $\delta > 0$ произвольно, а число T_2 выбрано из условия

$$P\{|a_i(t) - a_{i0}| < 1 \quad \text{при} \quad t \geqq T_2\} > 1 - \delta . \tag{4.12}$$

Рассмотрим наряду с (4.2) процесс

$$\tilde{X}(t+1) = \left[\tilde{X}(t) - \frac{1}{1+t} \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i(t)\, Y_i(t+1, \tilde{X}(t))\right]_{X_0(t)-\varepsilon(t)}^{X_0(t)+\varepsilon(t)},$$
$$\tilde{X}(T_2) = X(T_2) ,$$

где

$$\tilde{a}_i(t) = [a_i(t)]_{a_{i0}-1}^{a_{i0}+1} .$$

Тогда, согласно (4.12),

$$P\{\tilde{X}(t) \equiv X(t) \quad \text{при} \quad t \geqq T_2\} > 1 - \delta . \tag{4.13}$$

Положим $Y(t, x) = \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i(t)\, Y_i(t, x)$. Учитывая $\mathscr{F}_t$-измеримость $\tilde{a}_i(t)$, (4.5) и (4.11) находим

$$R(t, x) = \mathsf{M}\{Y(t, x)/\mathscr{F}_{t-1}\} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i(t)\, R_i(t, x) = (\alpha_0 + \gamma(t, x))\,(x - x_0) ,$$

где $\alpha_0 = (a_0, \alpha)$, $\gamma(t, x) \to 0$ при $t \to \infty$, $x \to x_0$.

Поскольку, как нетрудно подсчитать,

$$\alpha_0 = 1 , \tag{4.14}$$

то значит, выполнено условие (в) леммы 2.1. Кроме того, используя неравенства $|\tilde{a}_i(t)| \leqq |a_{i0}| + 1$, получим

$$\sup_{t \geqq T_2, |x - x_0| < v} A(t, x) < K ,$$

где $A(t, x) = \mathsf{M}\{\Phi^2(t, x)/\mathscr{F}_{t-1}\}$, K — фиксированная постоянная. Легко также видеть, что функция $A(t, x)$ непрерывна в точке $t = \infty$, $x = x_0$, причем

$$A(\infty, x_0) = (\sigma a_0, a_0) = \frac{\det \sigma}{\det \Delta}.$$

Отсюда и (4.14), применяя лемму 2.1, выводим соотношение

$$\sqrt{(t)}\,(\tilde{X}(t) - x_0) \sim \mathscr{N}\left(0, \frac{\det \sigma}{\det \Delta}\right). \tag{4.15}$$

Из произвольности δ в (4.13) и (4.15) вытекает доказываемое утверждение.

5. Теперь осталось рассмотреть вопрос о построении оценок $X_0(t)$, удовлетворяющих соотношению (2.5), где $\vartheta(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. С этой целью предположим, что одна из фукций $S_1(z), \ldots, S_r(z)$, например, $S_1(z)$ монотонно возрастает.

Рассмотрим процедуру

$$X_0(t+1) - X_0(t) = -\frac{1}{1+t}\left[S_1(Z(t+1, X_0(t)) - S_1^{(0)}(t+1, X_0(t))\right]. \tag{5.1}$$

Лемма 5.1. Предположим, что:

(а) функция $f(x)$ локально ограничена и удовлетворяет дополнительно условию

$$\inf_{\varepsilon < |x - x_0| < 1/\varepsilon} |f(x)| > 0$$

для любого $\varepsilon \in (0, 1)$,

(б) функция $S_1(z)$ монотонно возрастает,

(в) $R_1(t, x) = \mathsf{M}\, S_1(f(x) + \xi(t, x)) - S_1^{(0)}(t, x) = (\alpha_1 + \alpha_1(t, x))\,(x - x_0)$, где $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_1(t, x) \to 0$ при $t \to \infty$, $x \to x_0$,

(г) для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется такое K_ε, для которого

$$\inf_{\varepsilon < |x - x_0| < 1/\varepsilon} \mathsf{P}\{|\xi(t, x)| < K_\varepsilon\} > 0,$$

(д) $$\sup_{t,x} \frac{[R_1(t, x)]^2 + \mathsf{M}[S_1(f(x) + \xi(t, x)) - S_1^{(0)}(t, x)]^2}{1 + x^2} < \infty.$$

Тогда для процесса (5.1) справедливо для любого $Q > 0$ соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \ln^Q t(X_0(t) - x_0) = 0. \tag{5.2}$$

Условие (д) леммы 5.1 может оказаться слишком ограничительным. Если, например, $S_1(z) \equiv z$, $\mathsf{M}\, \xi(t, x) \equiv 0$, то оно означает, что

$$f^2(x) + \sup_t \mathsf{M}\, \xi^2(t, x) < c_4(1 + x^2)\,.$$

Следующая несколько более сложная процедура не накладывает никаких ограничений на рост функции $|f(x)|$ при $|x| \to \infty$.

Положим

$$X_0(t + 1) - X_0(t) = \tag{5.3}$$

$$= -\frac{1}{(1 + 1)(1 + g(X_0(t))}\left[\frac{S_1(Z(t + 1, X_0(t))\, q(Z(t + 1, X_0(t))}{(1 + t)^{-1/4} + q(Z(t + 1, X_0(t))} - \right.$$

$$\left. - S_1^{(0)}(t) + 1, X_0(t))\right], \quad X(0) = x\,.$$

Здесь $g(x)$ — произвольная непрерывная функция, а неотрицательная локально ограниченная функция $q(x)$ такова, что функция $S_1(z)\, q(z)$ не убывает и

$$\inf_{q_1 < z < q_2} q(z) > 0$$

для любых q_1, q_2 (например, $q(z) = S_1^{-1}(z) \operatorname{arctg} S_1(z)$).

Лемма 5.2. Пусть выполнены уцловия (а)–(г) леммы 5.1 и, кроме того,

$$\sup_{t \geqq 1} \mathsf{M} |S_1(\xi(t, x))|^{1+\delta} < K(1 + g(x))\,, \quad K = \text{Const}$$

для некоторого положительного $\delta \leqq 1$. Тогда процесс (5.3) удовлетворяет заключению леммы 5.1.

Леммы 5.1. и 5.2 вытекают из результатов работы [11].

Таким образом, окончательно получаем следующие утверждения.

Теорема 5.1. Пусть выполнены условия (а) – (г) леммы 3.1, условия леммы 5.1. и

$$\det \sigma \neq 0\,. \tag{5.4}$$

Тогда, если $\vartheta(s) = Q \ln^q s$, $Q > 0$, $q > 0$, то процедура (4.1), (4.2), (5.1) удовлетворяет соотношению

$$\sqrt{(t)}\,(X(t) - x_0) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\det \sigma}{\det \Delta}\right). \tag{5.5}$$

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия (а) – (г) леммы 3.1, условия леммы 5.2 и неравенства (5.4). Тогда, если $\vartheta(s) = Q \ln^q s$, $Q > 0$, $q > 0$, то процедура (4.1), (4.2), (5.3) удовлетворяет соотношению (5.5).

Замечание 5.1. Можно показать, также, как это сделано в [14] для задачи оценивания функционалов от неизвестного распределения, что несколько более сложная, чем (4.1), (4.2), (5.1) (или (5.3)) процедура при дополнительном условии

$$\sup_{t \geq 1, |x - x_0| < v} \mathsf{M}|Y_i(t, x)|^{2+\Delta} < \infty$$

где v, Δ – некоторые положительные постоянные, удовлетворяет не только соотношению (5.5), но и для любого $N > 0$ равенству

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{M}|\sqrt{(t)}\,(X(t) - x_0)|^N = \mathsf{M}|\xi|^N .$$

Здесь случайная величина ξ нормальна с параметрами $(0, \det \sigma/\det \Delta)$.

6. Рассмотрим следующий пример.

Пусть требуется оценить параметр x_0 по наблюдениям $Y(t) = -x_0 + \xi(t)$, где $\xi(t)$, $t = 1, 2, \ldots$ – независимые однаково распределенные случайные величины с неизвестной функцией распределения $G(y)$, такой, что

$$\int y \, \mathrm{d}G(y) = 0 , \quad \int y^2 \, \mathrm{d}G(y) = \sigma^2 < \infty . \tag{6.1}$$

Тогда, как хорошо известно, оценка

$$X_0(t) = -\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} Y(s) \tag{6.2}$$

сходится к x_0 п.н. при $t \to \infty$ и удовлетворяет соотношению

$$\sqrt{(t)}\,(X_0(t) - x_0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) . \tag{6.3}$$

В [13] показано, что дисперсия предельного нормального закона в (6.3) не улучшаема в минимальном смысле.

Пусть теперь относительно распределения $G(y)$ имеется кроме (6.1) дополнительная информация, а именно известна его медиана μ, причем функция $G(y)$ дифференцируема в точке $y = \mu$ и $G'(\mu) > 0$.

Так как $\mathsf{M}\,\xi(1) = 0$, $\mathsf{M}\,\mathrm{sign}\,(\xi(1) - \mu) = 0$, то можно применить предыдущие результаты, полагая

$$Z(t, x) = x + Y(t) = f(x) + \xi(t) , \quad f(x) = x - x_0 ,$$

$$S_1(z) = z , \quad S_2(z) = \mathrm{sign}\,(z - \mu) , \quad S_1^{(0)}(t, x) \equiv S_2^{(0)}(t, x) \equiv 0 .$$

 При этом, как легко видеть, оценка (5.1) совпадает с оценкой $X_0(t)$ среднего арифметического (6.2).

Рассмотрим процесс

$$(6.4) \qquad X(t+1) = \left[X(t) - \frac{1}{1+t} a_1(t)\,(X(t) + Y(t+1)) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{1+t} a_2(t)\,\mathrm{sign}\,(X(t) + Y(t+1) - \mu)\right]_{X_0(t) - \ln^{-1}(t+2)}^{X_0(t) + \ln^{-1}(t+2)},$$
$$X(0) = x\,,$$

где величины $a_1(t)$, $a_2(t)$ построены также как указано в п. 4 с $Y_1(t, x) = x + Y(t)$, $Y_2(t, x) = \mathrm{sign}\,(x + Y(t) - \mu)$, $\vartheta(t) = \ln^2(t+2)$.

Применяя теорему 5.1 получим после несложных вычислений для процедуры (6.2), (6.4) соотношение

$$(6.5) \qquad \sqrt{}(t)\,(X(t) - x_0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)\,,$$

где

$$\sigma_0^2 = \frac{\sigma^2 - (\int |y - \mu|\,\mathrm{d}G(y))^2}{1 + 4[G'(\mu)]^2\,\sigma^2 - 4G'(\mu)\int(y - \mu)\,\mathrm{d}G(y)}\,.$$

Из результатов работы [14] вытекает, что дисперсия предельного нормального закона в (6.5) не может быть улучшена в минимаксном смысле.

(Поступило в редакцию 19 марта 1976.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Robbins, S. Monro: Stochastic approximation method. Ann. Math. Statist. *22* (1951), 1, 400—407.

[2] Е. Г. Гладышев: О стохастической аппроксимации. Теория вероятностей и ее применения *10*, (1965), 2, 297—300.

[3] J. Sacks: Asymptotic distribution of stochastic approximation. Ann. Math. Statist. *29* (1958), 2, 373—405.

[4] I. H. Venter: An extension of the Robbins-Monro procedure. Ann. Math. Statist. *38* (1967), 1, 181—190.

[5] V. Fabian: On asymptotic normality in stochastic approximation. Ann. Math. Statist. *39* (1968), 4, 1327—1332.

[6] М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский: Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. Наука, Москва 1972.

[7] М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский: Адаптивная процедура Роббинса-Монро. Автоматика и телемеханика 1973, 10, 71—83.

[8] M. B. Nevel'son: On some asymptotic properties of recursive estimates. Proceedings of the colloquia mathematica societatis János Bolyai *11* (1975), 193—225.

[9] A. Albert, L. Gardner: Stochastic approximation and nonlinear regression. M. I. T. — Press, Cambridge, Massachusetts 1967.

[10] R. Z. Khas'minskii: Sequential estimation and recursive asymptotically optimal procedures of estimation and observation control. Proceedings of the Prague symposium on asymptotic statistics, 1973, 157—178.

[11] М. Б. Невельсон: О сходимости рекуррентных оценок нуля неизвестной функции. Проблемы передачи информации *11* (1975), 2, 68—83.

[12] М. Лоэв: Теория вероятностей. ИЛ, Москва 1962.

[13] Б. Я. Левит: Об эффективности одного класса непараметрических оценок. Теория вероятностей и ее применения *20* (1975), 4, 738—754.

[14] М. Б. Невельсон: Об асимптотической оптимальности рекуррентных оценок. Проблемы передачи информации 1977 (в печати).

Михаил Борисович Невельсон, кандидат физ.-мат. наук, Институт проблем передачи информации АН СССР, Москва, Авиамоторная ул. д. 8а, корп. II. СССР.