Mathematica Bohemica

Zdeněk Vančura

Zur Differentialgeometrie der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum

Mathematica Bohemica, Vol. 116 (1991), No. 1, 12–19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126194

ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE DER n-DIMENSIONALEN KUGEL- UND LINIENMANNIGFALTIGKEITEN IM $(n + 1)$-DIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

ZDENĚK VANČURA, Kopřivnice

(Eingegangen 17. 5. 1988)

Summary. In der Arbeit [17] hat der Verfasser versucht, die Konzeption, Inhalt und Form der Differentialgeometrie der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum zu erzeugen.

Zu dieser durch das Theorem aus [17] charakterisierten Differentialgeometrie versucht nun der Autor einige Vertiefungs- und Entwicklungsideen insgesamt einiger ihren wichtigsten Realisationen aufs kürzeste darzustellen.

Keywords: Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten.

AMS Classification: 53A25.

In der Arbeit [17] versuchten wir die Konzeption, Inhalt und Form der Differentialgeometrie der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum $(n \geqq 2)$ zu erzeugen.

Zu dieser durch das Theorem mit ${}^{n}(T)_{E_{n+1}}$ aus [17] charakterisierten Differentialgeometrie versuchen wir nun *bei $n \geqq 3$ einige Vertiefungs und Entwicklungsideen insgesamt einiger ihren wichtigsten Realisationen* aufs kürzeste darzustellen.

Unter Anwendung von in dieser Arbeit definierten Begriffen und von Prinzipen, Begriffen, Methoden, die durch Erzeugung der zweckmässigen, zulässigen, interpretationsfähigen Auswahl, Verallgemeinerungen, Kombinationen, Modifikationen der Prinzipe, Begriffe, Methoden aus meiner Arbeit [17] entstehen, bei prinzipiell gleicher Bezeichnung der verallgemeinerten Begriffe wie der Ausgangsbegriffe aus [17] und bei zugehörigen Voraussetzungen bekommt man:

Unter Voraussetzung, dass der Durchschnitt ${}^{on-1}_{on}{}_{v}\mathbf{s}$ der Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^{n}\mathbf{s}(u^1, \ldots, u^n)$ der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit ([17] (1), $n \geqq 3$) mit der durch den Punkt ${}^{on}\mathbf{s} = {}^{n}\mathbf{s}({}^{0}u^1, \ldots, {}^{0}u^n)$ gehenden Ebene vom Einheitsnormalvektor ${}^{on}\mathbf{v}$ die $(n - 1)$-dimensionale Punktmannigfaltigkeit in dieser Ebene als im ${}^{o}E_n$ darstellt, so wollen wir den Durchschnitt dieser Ebene mit den Kugeln der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit deren Mittelpunkte in dieser Ebene liegen als *die ${}^{on}\mathbf{v}$-Richtungscharakteristik der n n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit* ([17] (1), $n \geqq 3$) bezeichnen. Die zur erwähnten Richtungscharakteristik adjungierte $(n - 1)$-

dimensionale Linienmannigfaltigkeit wollen wir als *die* ${}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit* ([17 (11), $n \geqq 3$) bezeichnen. Kurz sprechen wir über *die* ${}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit.* (Unter dem Durchschnitt werden wir immer die Punktmenge verstehen, die durch erwähnte implizite Funktion zur zugehörigen Durchschnittsgleichung ausgedruckt wird.) Die Operation, welche die ${}^{on}\mathbf{v}$-Richtungscharakteristik erzeugt, werden wir *die* ${}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungsoperation* nennen. Bei den gegebenen (für die nachfolgenden Operationen zulässigen) Vektoren ${}^{on}\mathbf{v}, \ldots, {}^{on-p}\mathbf{v}$, $n \geqq 3$, $0 \leqq p \leqq n-3$ werden wir die ${}^{on-1}\mathbf{v}$-Richtungscharakteristik der ${}^{on}\mathbf{v}$-Richtungscharakteristik bzw. die ${}^{on-p}\mathbf{v}$-Richtungscharakteristik der ${}^{on-p+1}\mathbf{v}{}^{on-p+2}\mathbf{v} \ldots {}^{on-1}\mathbf{v}{}^{on}\mathbf{v}$-Richtungscharakteristik als *die* ${}^{on-1}\mathbf{v}{}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik* bzw. *die* ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik* (${}^{on}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v} = {}^{on}\mathbf{v}$) bezeichnen. Die Operation, welche die ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungscharakteristik erzeugt, werden wir *die* ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungsoperation* nennen.

Wir werden weiter eine solche (existierende) Parametrisierung der Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^{n}\mathbf{s}(u^1, \ldots, u^n)$ der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit voraussetzen, in der die Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^{on-p-1}_{on-p-v}\mathbf{s}$ der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$ — Richtungscharakteristik (in einer Umgebung des Punktes ${}^{on}\mathbf{s} = {}^{n}\mathbf{s}({}^{o}u^1, \ldots, {}^{o}u^{n-p-1}, {}^{o}u^{n-p} = 0, \ldots, {}^{o}u^n = 0))$ die Form

$$(1) \qquad {}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}\mathbf{s}(u^1, \ldots, u^{n-p-1}) = {}^{n}\mathbf{s}(u^1, \ldots, u^{n-p-1}, u^{n-p} = 0, \ldots, u^n = 0)$$

$$n \geqq 3\,, \quad 0 \leqq p \leqq n-3$$

besitzt. Wenn (1) in den Krümmungsparametern $u^1, \ldots, u^n$ der Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^{n}\mathbf{s}$ gilt (was möglich ist), so werden wir über *die* ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungskrümmungscharakteristik sprechen.*

Für die Grundtensoren

$$(2) \qquad {}^{on-p-1\,ss}_{on-p\ \ v}T_{ij} = {}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}\mathbf{s}_i\, {}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}\mathbf{s}_j \quad i, j = 1, \ldots, n-p-1\,,$$

$$(3) \qquad {}^{on-p-1\,ds}_{on-p\ \ v}T_{ij} = -{}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}\mathbf{d}_i\, {}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}\mathbf{s}_j \quad i, j = 1, \ldots, n-p-1$$

(in (3) eventuell bis auf das Vorzeichen) der Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}\mathbf{s}$ *der* ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit* ($n \geqq 3$, $0 \leqq p \leqq n-3$) *gelten auf* ${}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}\mathbf{s}$ *(im Punkt* ${}^{on}\mathbf{s}$ *die rechte Seite in (5) durch den angehörigen Grenzwert,* ${}^{on-p-1\,ds}_{on-p\ \ v}T_{ij}$ *eventuell bis auf das Vorzeichen) die Gleichungen*

$$(4) \qquad {}^{on-p-1\,ss}_{on-p\ \ v}T_{ij}(u^1, \ldots, u^{n-p-1}) = {}^{nss}T_{ij}(u^1, \ldots, u^{n-p-1}, u^{n-p} = 0, \ldots, u^n = 0)$$

$$i, j = 1, \ldots, n-p-1\,,$$

$$(5) \qquad {}^{on-p-1\,ds}_{on-p\ \ v}T_{ij}(u^1, \ldots, u^{n-p-1}) =$$

$$= {}^{nds}T_{ij}(u^1, \ldots, u^{n-p-1}, u^{n-p} = 0, \ldots, u^n = 0)\,.$$

$$\cdot \prod_{a=0}^{p}\left(1-\left[{}^{on-a}\mathbf{v}\;{}^{on-a}_{on-a+1}{}_{v}\mathbf{d}(u^1,\dots,u^{n-a-1},u^{n-a}=0)\right]^2\right)^{-1/2}$$

$i,j,\dots,n-p-1$,

$${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{d}(u^1,\dots,u^{n-p-1}) =$$

$$=\left(1-\left[{}^{on-p}\mathbf{v}\;{}^{on-p}_{on-p+1}{}_{v}\mathbf{d}(u^1,\dots,u^{n-p-1},u^{n-p}=0)\right]^2\right)^{-1/2}\cdot$$

$$\cdot\Big({}^{on-p}_{on-p+1}{}_{v}\mathbf{d}(u^1,\dots,u^{n-p-1},u^{n-p}=0)-$$

$$-\left[{}^{on-p}\mathbf{v}\;{}^{on-p}_{on-p+1}{}_{v}\mathbf{d}(u_1^1,\dots,u^{n-p-1},u^{n-p}=0)\right]{}^{on-p}\mathbf{v}\Big),\quad {}^{on}_{on+1}{}_{v}\mathbf{d}={}^{n}\mathbf{d}\,.$$

Die Tensoren ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}v$, ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}v_i$, ${}^{on-p-1\,ld}_{on-p}{}_{v}T_i$, ${}^{on-p-1\,ls}_{on-p}{}_{v}T_{ij}$, ${}^{on-p-1\,ll}_{on-p}{}_{v}T_{ij}$, ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}w$ $i,j=1,\dots,n-p-1$ *werden in den Krümmungsparametern der Mittelpunktmannigfaltigkeit* ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ *der* ${}^{on-p}\mathbf{v}\dots{}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik durch die Gleichungen*

(6) $${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}v = 2\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r\left(1-{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_q^2\,{}^{on-p-1\,ss}_{on-p}{}_{v}T^{qq}\right)^{1/2},$$

(7) $${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}v_i = 2\left(1-{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_q^2\,{}^{on-p-1\,ss}_{on-p}{}_{v}T^{qq}\right)^{1/2}\sum_{c=1}^{n-p-1}{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_c\,\cdot$$

$$\cdot\left({}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_t\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\Gamma^t_{ci}-{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_{ci}-\right.$$

$$\left.-{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_c\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_i+{}^{on-p-1\,ss}_{on-p}{}_{v}T_{ci}\right){}^{on-p-1\,ss}_{on-p}{}_{v}T^{cc},$$

(8) $${}^{on-p-1\,ld}_{on-p}{}_{v}T_i = -\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_i\,{}^{on-p-1\,ds}_{on-p}{}_{v}T^i_i,$$

(9) $${}^{on-p-1\,ls}_{on-p}{}_{v}T_{ij} = {}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_t\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\Gamma^t_{ij}-{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r\,\cdot$$

$$\cdot\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_{ij}-{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_i\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_j+{}^{on-p-1\,ss}_{on-p}{}_{v}T_{ij},$$

(10) $${}^{on-p-1\,ll}_{on-p}{}_{v}T_{ij} = \sum_{c=1}^{n-p-1}\left({}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_t\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\Gamma^t_{ci}-{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_{ci}-\right.$$

$$\left.-{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_c\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_i+{}^{on-p-1\,ss}_{on-p}{}_{v}T_{ci}\right)\left({}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_t\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\Gamma^t_{cj}-\right.$$

$$\left.-{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_{cj}-{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_j\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_c+{}^{on-p-1\,ss}_{on-p}{}_{v}T_{cj}\right){}^{on-p-1\,ss}_{on-p}{}_{v}T^{cc}+$$

$$+\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r^2\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_i\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r_j\,{}^{on-p-1\,ds}_{on-p}{}_{v}T^i_i\,{}^{on-p-1\,ds}_{on-p}{}_{v}T^j_j,$$

(11) $$\det\left|-\,{}^{on-p-1\,ds}_{on-p}{}_{v}T_{ij}\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}w+{}^{on-p-1\,ls}_{on-p}{}_{v}T_{ij}\right|=0$$

ausgedrückt.

Die Menge von Kugelflächen $({}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}={}^{n}\mathbf{s}(u^1,\dots,u^{n-p-1},u^{n-p}=0,\dots,u^n=0);$ ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r={}^{n}r(u^1,\dots,u^{n-p-1},u^{n-p}=0,\dots,u^n=0))$ *bzw. von Linien* $({}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{l};$ ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{d})$ *bildet die* ${}^{on-p}\mathbf{v}\dots{}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik der n-dimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeit* [17](1) *bzw.* [17] (11) $(n\geqq 3,\ 0\leqq p\leqq n-3)$ *genau dann, wenn auf der Menge von Kugelflächen* $({}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s};\ {}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}r)$ *bzw. von Linien* $({}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{l};\ {}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{d})$

(12) $$\det\left|{}^{on-p-1\,ss}_{on-p}{}_{v}T_{ij}\right|\neq 0\quad i,j=1,\dots,n-p-1$$

bzw.

(13) $$\det\left|{}^{on-p-1\,ll}_{on-p}{}_{v}T_{ij}\right|\neq 0\quad i,j=1,\dots,n-p-1$$

gilt.

Für die Grundtensoren ${}^{on-p-1h}_{on-p\;vf}a_{ij}$, ${}^{on-p-1h}_{on-p\;vf}b_{ij}$ *bzw.* ${}^{on-p-1}_{on-p\;vg}a_{ij}$, ${}^{on-p-1}_{on-p\;vg}b_{ij}$ *der Brennmannigfaltigkeiten* ${}^{on-p-1h}_{on-p\;v}\mathbf{f}$ *bzw.* ${}^{on-p-1}_{on-p\;v}\mathbf{g}$ *der* ${}^{on-p}\mathbf{v}\ldots{}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik der n-dimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeit* $(n \geqq 3,\ 0 \leqq p \leqq n-3,\ i,j = 1,\ldots,n-p-1)$ *gelten (bei den zweiten Grundtensoren eventuell bis auf das Vorzeichen) die Gleichungen*

$$\begin{aligned}
{}^{on-p-1h}_{on-p\;vf}a_{ij} &= {}^{on-p-1ll}_{on-p\;v}T_{ij} + \tfrac14\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}v_i\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}v_j + \tfrac14\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}v^2 \cdot \\
&\cdot {}^{on-p-1ss}_{on-p\;v}T_{kl}\,{}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^k_i\,{}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^l_j - \tfrac12(-1)^h\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}v \cdot \\
&\cdot \left({}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^k_i\,{}^{on-p-1ls}_{on-p\;v}T_{jk} + {}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^k_j\,{}^{on-p-1ls}_{on-p\;v}T_{ik}\right) + \\
&+ \tfrac12(-1)^h\left({}^{on-p-1ld}_{on-p\;v}T_i\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}v_j + {}^{on-p-1ld}_{on-p\;v}T_j\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}v_i\right),
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
{}^{on-p-1h}_{on-p\;vf}b_{ij} &= \sum_{k=1}^{n-p-1}\Big({}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_{ki} + \sum_{q=1}^{n-p-1}{}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_q\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}\Gamma^k_{qi} - \\
&- {}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_n\,{}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^k_i\Big)\,{}^{on-p-1ls}_{on-p\;v}T_{jk} + \\
&+ \Big({}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_{ni} + \sum_{q=1}^{n-p-1}{}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_q\,{}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T_{qi}\Big) \cdot \\
&\cdot \Big({}^{on-p-1ld}_{on-p\;v}T_j + \tfrac12(-1)^h\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}v_j\Big) - \tfrac12(-1)^h\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}v \sum_{k=1}^{n-p-1}\Big({}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_{ki} + \\
&+ \sum_{q=1}^{n-p-1}{}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_q\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}\Gamma^k_{qi} - {}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_n\,{}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^k_i\Big)\,{}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^l_j\,{}^{on-p-1ss}_{on-p\;v}T_{kl},
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{n-p-1}\Big({}^{on-p-1ls}_{on-p\;v}T_{jq} - \tfrac12(-1)^h\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}v\,{}^{on-p-1ss}_{on-p\;v}T_{kq}\,{}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^k_j\Big)\,{}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_q + \\
&+ \Big({}^{on-p-1ld}_{on-p\;v}T_j + \tfrac12(-1)^h\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}v_j\Big)\,{}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_n = 0, \\
&\sum_{a,q=1}^{n-p-1}{}^{on-p-1ss}_{on-p\;v}T_{aq}\,{}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_a\,{}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_q + {}^{on-p-1h}_{on-p\;v}c_p^2 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{on-p-1}_{on-p\;vg}a_{ij} &= {}^{on-p-1ll}_{on-p\;v}T_{ij} + {}^{on-p-1}_{on-p\;v}w_i\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}w_j + {}^{on-p-1}_{on-p\;v}w^2\,{}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^k_i \cdot \\
&\cdot {}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^l_j\,{}^{on-p-1ss}_{on-p\;v}T_{kl} - {}^{on-p-1}_{on-p\;v}w\Big({}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^k_i \cdot \\
&\cdot {}^{on-p-1ls}_{on-p\;v}T_{jk} + {}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^k_j\,{}^{on-p-1ls}_{on-p\;v}T_{ik}\Big) + \\
&+ {}^{on-p-1ld}_{on-p\;v}T_i\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}w_j + {}^{on-p-1ld}_{on-p\;v}T_j\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}w_i,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
{}^{on-p-1}_{on-p\;vg}b_{ij} &= \sum_{k=1}^{n-p-1}\Big({}^{on-p-1}_{on-p\;vg}c_{ki} + \sum_{q=1}^{n-p-1}{}^{on-p-1}_{on-p\;vg}c_q\,{}^{on-p-1}_{on-p\;v}\Gamma^k_{qi}\Big) \cdot \\
&\cdot \Big({}^{on-p-1ls}_{on-p\;v}T_{jk} - {}^{on-p-1}_{on-p\;v}w\,{}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^l_j\,{}^{on-p-1ss}_{on-p\;v}T_{kl}\Big) + \\
&+ \Big({}^{on-p-1ld}_{on-p\;v}T_j + {}^{on-p-1}_{on-p\;v}w_j\Big)\sum_{q=1}^{n-p-1}{}^{on-p-1}_{on-p\;vg}c_q\,{}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T_{qi},
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{n-p-1}\Big({}^{on-p-1ls}_{on-p\;v}T_{jq} - {}^{on-p-1}_{on-p\;v}w\,{}^{on-p-1ss}_{on-p\;v}T_{qk}\,{}^{on-p-1ds}_{on-p\;v}T^k_j\Big)\,{}^{on-p-1}_{on-p\;vg}c_q = 0, \\
&\sum_{a,q=1}^{n-p-1}{}^{on-p-1ss}_{on-p\;v}T_{aq}\,{}^{on-p-1}_{on-p\;vg}c_a\,{}^{on-p-1}_{on-p\;vg}c_q = 1.
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Gaussschen und mittleren Krümmungen definiert man auf übliche Weise (d.h. prinzipiell so wie in [17]).

Alle auf der ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungscharakteristik der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit festgestellte Eigenschaften gelten auf der ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungscharakteristik der speziellen n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit und zwar für ${}^{on-p-1}_{on-pv}r = {}^{n}r = \text{const} > 0$, ${}^{on-p-1}_{on-pv}\mathbf{l} = {}^{on-p-1}_{on-pv}\mathbf{s}$, ${}^{on-p-1}_{on-pv}v = 2{}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}r$, ${}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}v_i = 0$, ${}^{on-p-1\,ld}_{on-p\ \ v}T_i = 0$, ${}^{on-p-1\,ls}_{on-p\ \ v}T_{ij} = {}^{on-p-1\,ll}_{on-p\ \ v}T_{ij} = {}^{on-p-1\,ss}_{on-p\ \ v}T_{ij}$, $\det\left|-{}^{on-p-1\,ds}_{on-p\ \ v}T_{ij}{}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}w + {}^{on-p-1\,ss}_{on-p\ \ v}T_{ij}\right| = 0$.

Die spezielle n-dimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigkeit, welche mit der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit die Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^{n}\mathbf{s}(u^1, \dots, u^n)$ und die Kugelfläche $({}^{n}\mathbf{s}({}^{o}u^1, \dots, {}^{o}u^n);\ {}^{n}r({}^{o}u^1, \dots, {}^{o}u^n))$ gemeinsam hat, wollen wir als *die zur n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit im Punkt* ${}^{n}\mathbf{s}({}^{o}u^1, \dots, {}^{o}u^n)$ *beigeordnete n-dimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigkeit* bezeichnen. Wir sprechen auch über *die beigeordneten n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten.*

Die Gausssche Krümmung der Brennmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit bzw. ihrer ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik ist genau dann gleich Null, wenn die Gausssche Krümmung der Mittelpunktmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensioqalen Kugelmannigfaltigkeit bzw. ihrer* ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik gleich Null ist.*

Die beigeordneten n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten besitzen die gemeinsame ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik genau dann, wenn die* ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit die spezielle* $(n-p-1)$*-dimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigfaltigkeit darstellt.*

Die ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristiken der beigeordneten n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten stellen die beigeordneten* $(n-p-1)$*-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten dar.*

Der Begriff der beigeordneten Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten ist gegenüber der ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungsoperation invariant.*

Die Asymptotenkurven der Mittelpunktmannigfaltigkeit der ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik werden genau durch alle Asymptotenkurven der Mittelpunktmannigfaltigkeit der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit gebildet, die auf der Mittelpunktmannigfaltigkeit der* ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungscharakteristik liegen.*

Wenn wir die Brennmannigfaltigkeit ${}^{on-p-1\,k}_{on-p\ \ v}\mathbf{g} = {}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}\mathbf{g}({}^{on-p-1}_{on-p\ \ v}w = {}^{on-p-1\,k}_{on-p\ \ v}w = {}^{on-p-1\,ss}_{on-p\ \ v}T_{kk}{}^{on-p-1\,ds}_{on-p\ \ v}T_{kk}^{-1}$, ${}^{on-p-1\,ds}_{on-p\ \ v}T_{kk} \neq 0$ ((1) in Krümmungsparametern der ${}^{n}\mathbf{s}$) als *die k-te Brennmannigfaltigkeit der* ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungskrümmungscharakteristik der speziellen n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit* bezeichnen, bekommen wir:

Für die ${}^{on-p}\mathbf{v} \dots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungskrümmungscharakteristik der speziellen n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit gelten die Gleichungen, die aus den Gleichungen* (31) *bis* (36) *in* [17] *durch die Verwechslung* ${}^{nh}_{f}$ *gegen* ${}^{on-p-1\,h}_{on-p\ \ vf}$ *bzw.* ${}^{nk}_{g}$ *gegen* ${}^{on-p-1\,k}_{on-pv\ \ g}$ *entstehen.*

Die Gausssche Krümmung der Brennmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit bzw. der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik ist genau dann *gleich Null, wenn die Gausssche Krümmung der Mittelpunktmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit bzw. der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik gleich Null ist.*

Die Gausssche Krümmung der k-ten Brennmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit bzw. der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik ist genau dann gleich Null, wenn auf der Mittelpunktmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit bzw. der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots$ $\ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik $\left({}^{nss}T_{kk}\,{}^{nds}T^{-1}_{kk}\right)_k\,{}^{n}\Gamma^{i}_{ki} = 0$ bzw. $\left({}^{on-p-1}_{on-p}{}^{ss}_{v}T_{kk}\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}^{ds}_{v}T^{-1}_{kk}\right)_{k}\,{}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\Gamma^{i}_{ki} = 0$ (im Fall ${}^{n}\Gamma^{i}_{ki} = 0$ bzw. ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\Gamma^{i}_{ki} = 0$ für irgendein $i \neq k$) gilt.

Wenn die Gausssche Krümmung der Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik der speziellen n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit gleich Null ist, so sind auf ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ gleich Null die Gaussschen Krümmung sowie der Mittelpunktmannigfaltigkeiten so der Brennmannigfaltigkeiten der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik bis der ${}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik und der speziellen n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit.

Wenn auf der Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on-p'}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik der speziellen n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit $\prod_{a=0}^{p} {}^{nds}T_{n-an-a} \neq 0,\ 0 \leqq p \leqq n-3$ bzw. $\prod_{a=p'+1}^{p} {}^{nds}T_{n-an-a} \neq 0,\ 0 \leqq p' <$ $< p \leqq n-3$ ist, so sind auf ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ die Gaussschen Krümmungen sowie der Mittelpunktmannigfaltigkeiten so der Brennmannigfaltigkeiten der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik bis der ${}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik und der speziellen n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit bzw. der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots$ $\ldots {}^{on-p'}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik bis der ${}^{on-p'}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik gleizeitig entweder gleich oder ungleich Null.

Wenn auf der Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on-p'}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik der speziellen n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit $\sum_{a=0}^{p} {}^{nss}T^{-1}_{n-an-a}\,{}^{nds}T_{n-an-a} = 0\ \ 0 \leqq p \leqq n-3$ bzw. $\sum_{a=p'+1}^{p} {}^{nss}T^{-1}_{o-an-a}\,{}^{nds}T_{n-an-a} = 0\ \ 0 \leqq p' < p \leqq n-3$ ist, so sind auf ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ die mittleren Krümmungen der Mittelpunktmannigfaltikeiten der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$- Richtungskrümmungscharakteristik und der speziellen n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit bzw. der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on-p'}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik und der ${}^{on-p'}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik gleizeitig entweder gleich oder ungleich Null.

Wenn auf der Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$-Richtungskrümmungscharakteristik der speziellen n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit *für irgendein* $i \neq k$ $(\partial/\partial u^k)\,{}^{nss}T_{ii} = 0$ *ist, so sind auf* ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ *die Gaussschen Krümmungen der k-ten Brennmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit und der* ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungskrümmungscharakteristik gleich Null.*

Wenn auf der Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ *der* ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungskrümmungscharakteristik der speziellen n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit* $\partial/\partial u^k \left(\prod_{a=0}^{p} (1 - [{}^{on-a}\mathbf{v}^{on-a}_{on-a+1}\mathbf{d}(u^1, \ldots, u^{n-a-1}, u^{n-a} = 0)]^2)^{1/2} \right) = 0$ *ist, so sind auf* ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ *die Gaussschen Krümmungen der k-ten Brennmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit und der* ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungskrümmungscharakteristik gleichzeitig entweder gleich oder ungleich Null.*

Die Gaussschen Krümmungen der k-ten Brennmannigfaltigkeiten der ${}^{on-p}\mathbf{v} \ldots$ $\ldots {}^{on}\mathbf{v}$*-Richtungskrümmungscharakteristik (mit der Mittelpunktmannigfaltigkeit* ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$*) und der speziellen n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit sind auf* ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ *gleich Null genau dann, wenn auf* ${}^{on-p-1}_{on-p}{}_{v}\mathbf{s}$ $(\partial/\partial u^k)\,({}^{nss}T_{kk}\,{}^{nds}T_{kk}^{-1}) \,.$ $.\,(\partial/\partial u^k)\,{}^{nss}T_{ii} = 0$ *(im Fall* $(\partial/\partial u^k)\,{}^{nss}T_{ii} = 0$ *für irgendein* $i \neq k$*),* $(\partial/\partial u^k) \left(\prod_{a=1}^{p} (1 - [{}^{on-a}\mathbf{v}^{on-a}_{on-a+1}\mathbf{d}(u^1, \ldots, u^{n-a-1}, u^{na} = 0)]^2)^{1/2} \right) = 0$ *gilt.*

Literatur

[1] *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie III. Berlin 1929.

[2] *S. P. Finikov:* Теория конгруэнции. Moskva–Leningrad 1950.

[3] *V. Hlavatý:* Zur Lie'schen Kugelgeometrie: I. Kanalflächen. Věstník Král. čes. společnosti společnosti nauk, Praha 1941.

[4] *V. Hlavatý:* Zur Lie'schen Kugelgeometrie: Kongruenzen. Elementare Eigenschaften. Rozpravy II. tř. České akademie roč. LI, č. 33.

[5] *V. Hlavatý:* Differentialgeometrie der Linienmannigfaltigkeiten I, II. Rozpravy II. tř. České akademie, roč. L, č. 27.

[6] *V. Hlavatý:* Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung. JČMF Praha 1937.

[7] *V. F. Kagan:* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Moskva–Leningrad 1947, 1948.

[8] *V. I. Šulikovskij:* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. Moskva 1963.

[9] *Z. Vančura:* Les cogruences de Lie-sphères (*L*-sphères). Spisy přír. fak. Karlovy univ., Praha 1950.

[10] *Z. Vančura:* Die Brennflächen der Kugelkongruenz. Časopis pěst. mat. *80* (1955).

[11] *Z. Vančura:* Kugelkongruenzen und ihre Brennflächen. Adjungierte Linienkongruenzen und ihre Brennflächen. Rozpravy ČSAV, *78*, Praha 1968.

[12] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum I. Commentationes Mathemat. Univ. Carol. *16*, 2 (1975).

[13] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum II. Commentationes Univ. Carol. *16*, 3 (1975).

[14] *Z. Vančura:* Adjunktionsfähige zweidimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Časopis pěst. mat. *105* (1980).

[15] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Časopis pěst. mat. *108* (1983).

[16] *Z. Vančura:* Zur Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Časopis pěst. mat. 111 (1986).

[17] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum. Časopis pěst. mat. *114* (1989), 45—52.

Souhrn

K DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRII n-ROZMĚRNÝCH KULOVÝCH A PŘÍMKOVÝCH VARIET V $(n + 1)$-ROZMĚRNÉM EUKLEIDOVSKÉM PROSTORU

ZDENĚK VANČURA

Ve své práci [17] pokusil se autor vytvořit koncepci, obsah, formu diferenciální geometrie n-rozměrných kulových a přímkových variet v $(n + 1)$-rozměrném eukleidovském prostoru.

K této, teorémem v [17] charakterizované diferenciální geometrii, pokouší se autor v předložené práci stručně formulovat a v hlavních rysech realizovat některé ideje, které by tuto diferenciální geometrii výrazně geometricky prohloubily a motivicky rozvinuly.

Anschrift des Autors: ul. Osvoboditelů 1214/11, 74221 Kopřivnice.