Matematicko-fyzikálny sborník

Ján Jakubík

Jednoznačnosť rozkladu svazu na direktný súčin

Matematicko-fyzikálny sborník, Vol. 1 (1951), No. 2,3,4, 45--50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126369

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1951

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

MATEMATICKO-FYZIKALNÝ SBORNÍK

Roč. I., čís. 2, 3, 4.

JÁN JAKUBÍK

JEDNOZNAČNOSŤ ROZKLADU SVÄZU NA DIREKTNÝ SÚČIN

Venované s. prof. Dr. J. Hroncovi k 70. narodeninám.

Pre čiastočne usporiadané systémy platí veta: Nech čiastočne usporiadaný systém S má najmenší a najväčší prvok. Ak sa S dá rozložiť na direktný súčin nerozložiteľných faktorov, je tento rozklad jednoznačný. Existujú čiastočne usporiadané systémy, nemajúce najmenší a najväčší prvok, ktorých rozklad na nerozložiteľné faktory nie je jednoznačný.[1]

Pre špeciálny prípad, keď S je sväz, majúci najmenší a najväčší prvok, dokázal túto vetu G. Birkhoff[2]. Zároveň G. Birkhoff[3] položil problém: vyšetriť, či jednoznačnosť rozkladu platí alebo neplatí pre sväzy obecne (aj bez predpokladu existencie najmenšieho a najväčšieho prvku).

Dokážeme, že odpoveď na Birkhoffov problém je kladná. Pritom pôvodný Birkhoffov problém zovšeobecníme v tom, že budeme uvažovať aj rozklady, v ktorých počet direktných faktorov môže byť nekonečný.

Najprv stručne uvedieme základné definície.

Definícia 1. Nech L_ι, $\iota \in \mathfrak{M}$ je systém sväzov. Priraďme každému indexu $\iota \in \mathfrak{M}$ nejaký prvok $x^\iota \in L_\iota$. Dostávame množinu dvojíc $\{(\iota, x^\iota)\} = x$. Pritom $x^\iota \in L_\iota$ a pre každé $\alpha \in \mathfrak{M}$ existuje presne jedna taká dvojica $(\iota, x^\iota) \in x$, pre ktorú platí $\iota = \alpha$. Kvôli stručnému označeniu budeme množinu dvojíc $x = \{(\iota, x^\iota)\}$ označovať symbolom $x = \{x^\iota\}$. Systém všetkých takýchto množín označme $\prod_\iota L_\iota = L$. Nech $x_1 = \{x_1{}^\iota\}$, $x_2 = \{x_2{}^\iota\}$, $x_1, x_2 \in L$. Definujeme v L operácie $x_1 \cap x_2$, $x_1 \cup x_2$ rovnicami $x_1 \cap x_2 = \{x_1{}^\iota \cap x_2{}^\iota\}$, $x_1 \cup x_2 = \{x_1{}^\iota \cup x_2{}^\iota\}$. Množina L s takýmito operáciami je zrejme sväz. Nazývame ho direktným súčinom sväzov L_ι. Sväzy L_ι voláme faktormi direktného súčinu.

[1] Junji Hashimoto, *On the product decomposition of partially ordered sets*, Math. Japonicae, 1, 1948. Referát v Math. Rewiews, January 1950.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, II. Ed., Theorem 2, 9, Cor. 1.

[3] Porov. pozn. 2, problém 11.

Budeme písať $L \simeq L'$, ak sväzy L, L' sú izomorfné. Ak v izomorfizme $L \simeq L'$ (i) prvky $x \in L$, $x' \in L'$ sú si navzájom priradené, píšeme $x \longleftrightarrow x'$.

Definícia 2. Ak $L \simeq \prod_\iota L_\iota$ (i) hovoríme, že izomorfizmus (i) určuje rozklad sväzu L na direktný súčin $\prod_\iota L_\iota$. Ak prvku $x \in L$ je priradený prvok $\{x^\iota\} \in \prod_\iota L_\iota$, nazývame x^ι priemetom prvku x do sväzu L_ι v rozklade (i). Ak $M \subset L$, nazývame priemetom množiny M do L_ι (vzhľadom na rozklad (i)) množinu všetkých priemetov prvkov $x \in M$ do sväzu L_ι. Priemet prvku x do L_ι budeme označovať $[x]_{L_\iota}$, priemet množiny M do L_ι označujeme $[M]_{L_\iota}$.

Lemma 1. *Nech X je konvexný podsväz sväzu $L = \prod_\iota L_\iota$. Označme $[X]_{L_\alpha} = X_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{M}$. Potom X_α je konvexný podsväz sväzu L_α.*

Dôkaz. a) Nech $x_1{}^\alpha \in X_\alpha$, $x_2{}^\alpha \in X_\alpha$. Potom existujú prvky $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ také, že ich priemety do L_α sú $x_1{}^\alpha$ resp. $x_2{}^\alpha$. Keďže $x_1 \cap x_2 \in X$, $x_1 \cup x_2 \in X$, platí $x_1{}^\alpha \cap x_2{}^\alpha = [x_1 \cap x_2]_{L_\alpha} \in X_\alpha$, $x_1{}^\alpha \cup x_2{}^\alpha = [x_1 \cup x_2]_{L_\alpha} \in X_\alpha$.

b) Nech $x_1{}^\alpha \in X_\alpha$, $x_2{}^\alpha \in X_\alpha$, $z^\alpha \in L_\alpha$, $x_1{}^\alpha \leq z^\alpha \leq x_2{}^\alpha$. Potom existujú prvky $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ také, že $[x_1]_{L_\alpha} = x_1{}^\alpha$, $[x_2]_{L_\alpha} = x_2{}^\alpha$. Sostrojme prvok $z_1 = \{z_1{}^\iota\} \in L$ takto: $z_1{}^\iota = [x_1]_{L_\iota}$, ak $\iota \neq \alpha$, $z_1{}^\alpha = z^\alpha$. Zrejme platí $x_1 \cap x_2 \leq z_1 \leq x_1 \cup x_2$, teda $z_1 \in X$, $z_1{}^\alpha = z^\alpha \in X_\alpha$.

Lemma 2. *Nech $L = \prod_\iota L_\iota$, $\iota \in \mathfrak{M}$. Predpokladajme, že $\mathfrak{M}$ obsahuje viac ako jeden prvok. Nech $a \in L$, $a = \{a^\iota\}$, a nech systém prvkov $M = \{x_\iota\}$, $x_\iota \in L$ má nasledujúcu vlastnosť: $[x_\iota]_{L_\alpha} = a^\alpha$ pre $\alpha \neq \iota$ a pre každé $\iota \in \mathfrak{M}$. Potom existujú prvky $\bigcap_\iota x_\iota$, $\bigcup_\iota x_\iota$ a pri označení $[x_\iota]_{L_\iota} = x^\iota$ platí*

$$\bigcap_\iota x_\iota = \{a^\iota \cap x^\iota\}, \quad \bigcup x_\iota = \{a^\iota \cup x^\iota\}.$$

Dôkaz. Označme $\{a^\iota \cup x^\iota\} = \xi$. Zrejme platí pre každé ι a každé α $[x_\iota]_{L_\alpha} \leq x^\alpha \cup a^\alpha = [\xi]_{L_\alpha}$, teda $x_\iota \leq \xi$. Predpokladajme, že pre nejaký prvok $\eta \in L$ platí $x_\iota \leq \eta$ pre všetky $\iota \in \mathfrak{M}$.

Nech $\eta = \{\eta^\iota\}$. Teda $[x_\iota]_{L_\alpha} \leq [\eta]_{L_\alpha}$ pre všetky $\alpha \in \mathfrak{M}$, $\iota \in \mathfrak{M}$. Ak $\alpha = \iota$, dostávame z predchádzajúcej nerovnosti $x^\iota \leq \eta^\iota$. Ak $\alpha \neq \iota$, dostávame $a^\alpha \leq \eta^\alpha$ pre každé $\alpha \in \mathfrak{M}$. Vždy teda platí $x^\iota \cup a^\iota \leq \eta^\iota$, takže $\xi \leq \eta$. Tým je dokázané tvrdenie pre $\bigcup_\iota x_\iota$. Dôkaz pre $\bigcap_\iota x_\iota$ e duálny.

Lemma 3. *Nech X je konvexný podsväz sväzu $L = \prod_\iota L_\iota$, $\iota \in \mathfrak{M}$, nech $a \in X$, $x \in X$, $a = \{a^\iota\}$, $x = \{x^\iota\}$. Nech α je ľubovoľný index z množiny $\mathfrak{M}$. Utvorme prvok $y \in L$ tak, že $[y]_{L_\alpha} = x^\alpha$, $[y]_{L_\iota} = a^\iota$, pre $\iota \neq \alpha$. Tvrdíme: $y \in X$.*

Dôkaz. Prvky $a \cup x = \{a^\iota \cup x^\iota\}$, $a \cap x = \{a^\iota \cap x^\iota\}$ ležia v X. Zrejme platí $[a \cap x]_{L_\iota} \leq [y]_{L_\iota} \leq [a \cup x]_{L_\iota}$ pre každé $\iota \in \mathfrak{M}$, teda $a \cap x \leq y \leq a \cup x$. Z toho plynie $y \in X$.

Lemma 4. *Nech X je konvexný podsväz sväzu $L = \Pi L_\iota$. nech X_ι je priemet sväzu X do L_ι. Potom $X = \prod_\iota X_\iota$.*

Dôkaz. a) Označme $\prod_\iota X_\iota = Y$. X a Y sú podsväzy sväzu L. Stačí teda dokázať, že množiny X a Y sú si rovné. Nech $x = \{x^\iota\} \in X$. Potom $x^\iota \in X_\iota$, takže $x \in Y$. Dostávame množinovú nerovnosť $X \subset Y$.

b) Nech $y = \{x^\iota\} \in Y$, potom $x^\iota \in X_\iota$ a z definície množiny X_ι vyplýva, že existujú prvky $x_\iota \in X$ také, že pre každé ι platí $[x_\iota]_{L_\iota} = x^\iota$. Nech $a = \{a^\iota\}$ je ľubovoľný prvok podsväzu X. Ku každému x_ι sostrojme $u_\iota \in L$ takto: $[u_\iota]_{L_\alpha} = a^\alpha$ pre $\alpha \neq \iota$, $[u_\iota]_{L_\iota} = x^\iota$. Podľa lemmy 3 $u_\iota \in X$. Podľa lemmy 2 ležia aj prvky $\xi = \{x^\iota \cap a^\iota\}$, $\eta = \{x^\iota \cup a^\iota\}$ v množine X. Zrejme $\xi \leq y \leq \eta$, teda $y \in X$. Dostali sme množinovú nerovnosť $Y \subset X$, čo spolu s a) dáva $X = Y$.

Definícia 3. Nech $L \simeq \prod_\iota L_\iota\,(i)$, $u \in L$. Nech $M_\alpha \subset L_\alpha$. Sostrojme podmnožinu $M_\alpha(u)$ sväzu L [vzhľadom k rozkladu (i)] takto: prvok $x \in L$ je prvkom množiny $M_\alpha(u)$ vtedy a len vtedy, keď

$$1)\quad [x]_{L_\alpha} \in M_\alpha, \qquad 2)\quad [x]_{L_\iota} = [u]_{L_\iota} \text{ pre } \alpha \neq \iota.$$

Poznámka. Z predchádzajúcej definície vyplýva bezprostredne: 1. množina $L_\iota(u)$ je konvexný podsväz sväzu L. 2. Nech $x = \{x^\iota\}$, $x \in M_\alpha(u)$, t. j. $x^\alpha \in M_\alpha$. Potom jednojednoznačné priradenie $x \longleftrightarrow x^\alpha$ určuje izomorfizmus čiastočne usporiadaných systémov M_α a $M_\alpha(u)$.

Lemma 5. *Nech $L \simeq \prod_\iota A_\iota$, (i_1), $\iota \in \mathfrak{M}$ a súčasne $L \simeq \prod_\nu B_\nu\,(i_2)$, $\nu \in \mathfrak{N}$. Nech $u \in L$. Sostrojme množinu $A_\alpha(u)$ [vzhľadom k izomorfizmu (i_1)]. Priemet množiny $A_\alpha(u)$ do B_β [vzhľadom k izomorfizmu (i_2)] označme $A_\alpha{}^\beta$. Sostrojme množiny $A_\alpha{}^\beta(u)$, $B_\beta(u)$ [vzhľadom k izomorfizmu (i_2)]. Potom platí nasledujúca množinová rovnosť:*

$$A_\alpha{}^\beta(u) = A_\alpha(u) \cap B_\beta(u).$$

Dôkaz. a) Označme $A_\alpha(u) \cap B_\beta(u)$ znakom X[4]. Nech $x \in A_\alpha{}^\beta(u)$. Zrejme platí $A_\alpha{}^\beta \subset B_\beta$, teda $A_\alpha{}^\beta(u) \subset B_\beta(u)$. Z toho plynie $x \in B_\beta(u)$. Z predpokladu $x \in A_\alpha{}^\beta(u)$ dostávame ďalej, že existuje prvok $z \in A_\alpha(u)$ taký, že $[x]_{B_\beta} = [z]_{B_\beta}$.

Nech v izomorfizme (i_2) $u \longleftrightarrow \{u^\nu\}$, $z = \{z^\nu\}$, $x = \{x^\nu\}$. Z predchádzajúceho plynie: $x^\nu = u^\nu$ pre $\nu \neq \beta$, $x^\beta = z^\beta$.

[4] Množina X je neprázdna, keďže $u \in X$.

Zrejme $u \in A_\alpha(u)$. Sostrojme prvky $\xi = u \cap z$, $\eta = u \cup z$. Keďže pre každý index $\nu \in \mathfrak{N}$ platí $[\xi]_{B_\nu} \leq [x]_{B_\nu} \leq [\eta]_{B_\nu}$, dostávame $\xi \leq x \leq \eta$. Podľa lemmy 1 a poznámky za definíciou 3 je množina $A_\alpha(u)$ konvexným podsväzom sväzu L, teda prvky ξ, η, x patria do $A_\alpha(u)$. Zistili sme: $x \in A_\alpha(u) \cap B_\beta(u) = X$, teda $A_\alpha{}^\beta(u) \subset X$.

b) Nech $x \in X$. Teda $x \in A_\alpha(u)$, $[x]_{B_\beta} \in [A_\alpha(u)]_{B_\beta} = A_\alpha{}^\beta$. Ďalej, keďže $x \in B_\beta(u)$, platí $[x]_{B_\nu} = [u]_{B_\nu}$ pre $\nu \neq \beta$. Teda podľa definície 3 $x \in A_\alpha{}^\beta(u)$. Dostávame $X \subset A_\alpha{}^\beta(u)$. Úhrnne podľa a) máme rovnosť $X = A_\alpha{}^\beta(u)$.

Poznámka. Podľa predchádzajúcej lemmy a lemmy 4 dostávame $A_\alpha \simeq \prod\limits_\nu A_\alpha{}^\nu(u)$. Ak definujeme analogickým spôsobom $B_\beta{}^\alpha(u)$, platí $B_\beta \simeq \prod\limits_\iota B_\beta{}^\iota(u)$. Pritom je podľa predchádzajúcej lemmy $B_\beta{}^\alpha(u) = A_\alpha{}^\beta(u)$.

Poznámka. Ak $L \simeq \prod\limits_\iota L_\iota$ a ak všetky L_ι okrem najviac jedného (napr. L_1) obsahujú jediný prvok, je zrejme $L \simeq L_1$. Je teda prirodzená nasledujúca definícia:

Definícia 4. Hovoríme, že sväz L je nerozložiteľný, ak z izomorfizmu $L \simeq \prod\limits_\iota L_\iota$ vyplýva, že existuje najviac jeden taký faktor L_ι, ktorý obsahuje viac ako jeden prvok.

Veta. *Nech $L \simeq \prod\limits_\iota A_\iota$, $\iota \in \mathfrak{M}$, $L \simeq \prod\limits_\nu B_\nu$, $\nu \in \mathfrak{N}$. Nech každý faktor A_ι, B_ν obsahuje viac ako jeden prvok a nech sú všetky tieto faktory nerozložiteľné. Potom existuje jednojednoznačné zobrazenie množiny $\mathfrak{M}$ na množinu $\mathfrak{N}$, ktoré má túto vlastnosť: ak sa prvok $\alpha \in \mathfrak{M}$ zobrazí na prvok $\beta \in \mathfrak{N}$, potom sú sväzy A_α, B_β izomorfné.*

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady, uvedené vo vete. Podľa poznámky za lemmou 5 môžeme písať pre každé $\alpha \in \mathfrak{M}$, $\beta \in \mathfrak{N}$:

$$A_\alpha \simeq \prod_\nu A_\alpha{}^\nu(u), \qquad B_\beta \simeq \prod_\iota B_\beta{}^\iota(u),$$

pričom $A_\alpha{}^\nu(u) = B_\nu{}^\alpha(u)$. Keďže sväz A_α je nerozložiteľný a má viac ako jeden prvok, existuje presne jeden taký sväz $A_\alpha{}^\nu(u)$ [označme ho $A_\alpha{}^\beta(u)$], ktorý má viac ako jeden prvok. Potom $A_\alpha \simeq A_\alpha{}^\beta(u)$. Prvku $\alpha \in \mathfrak{M}$ priraďme prvok $\beta \in \mathfrak{N}$.

Ak by sa pri takomto zobrazení aj prvok $\alpha_1 \in \mathfrak{M}$, $\alpha_1 \neq \alpha$ zobrazil na prvok β, vystupovaly by v rozklade sväzu B_β aspoň dva faktory, a to $B_\beta{}^\alpha(u) = A_\alpha{}^\beta(u)$ a $B_\beta{}^{\alpha_1}(u) = A_{\alpha_1}{}^\beta(u)$, z ktorých každý by obsahoval viac ako jeden prvok. To je v rozpore s predpokladom o nerozložiteľnosti sväzu B_β. Z toho plynie ďalej $B_\beta \simeq B_\beta{}^\alpha(u) \simeq A_\alpha$.

Nech $\beta_1 \in \mathfrak{N}$. Keďže sväz $B_{\beta 1}$ obsahuje viac ako jeden prvok a je nerozložiteľný, musí v jeho rozklade vystupovať presne jeden faktor, ktorý obsahuje viac ako jeden prvok. Označme tento faktor $B_{\beta 1}{}^{\alpha 1}(u)$. Podľa lemmy 5 platí $B_{\beta 1}{}^{\alpha 1}(u) = B_{\alpha 1}{}^{\beta 1}(u)$. Keďže $B_{\alpha 1}{}^{\beta 1}(u)$ má viac ako jeden prvok, index $\alpha_1 \in \mathfrak{M}$ sa zobrazí na index $\beta_1 \in \mathfrak{N}$. Teda každý prvok $\beta \in \mathfrak{N}$ má pri uvedenom zobrazení vzor v $\mathfrak{M}$. Previedli sme dôkaz, že zobrazenie má všetky vlastnosti, vyslovené v predchádzajúcej vete. Tým je dôkaz jednoznačnosti rozkladu sväzu na nerozložiteľné faktory vykonaný.

ВЫВОДЫ

Г. Биркгоф доказал однозначность разложения в прямое произведение для структур, в которых находятся самый больший и самый меньший элементы. В монографии „Lattice theory“ Биркгоф положил проблему: имеет-ли место теорема об однозначности разложения для всех структур. В настоящей работе мы даем положительный ответ на проблему Биркгофа. При этом мы обобщаем теорему в том смысле, что мы допускаем разложения, имеющие бесконечное число факторов.

Мы будем употреблять следующие определения и обозначения: если $L \simeq \prod_\iota L_\iota$ (i) и если в изоморфизме (i) $x \longleftrightarrow \{x^\iota\}$, $x \in L$, $\{x^\iota\} \in \prod_\iota L_\iota$, $x^\iota \in L_\iota$, то мы будем называть элемент x^ι проскцией x на структуру L_ι и писать $x^\iota = (x)_{L_\iota}$. Если $M \subset L$, то множество всех проекций элементов $x \in M$ на L_ι обозначаем $[M]_{L_\iota}$. Заметим, что слово проекция употребляем относительно изоморфизма (i). Если $u \in L$, $M_\alpha \subset L_\alpha$, определим множество $M_\alpha(u)$ следующим образом: $x \in M_\alpha(u)$ тогда и только тогда, если 1. $[x]_{L_\alpha} \in M_\alpha$, 2. $[x]_\iota = [u]_{L_\iota}$ для $\iota \neq \alpha$. Очевидно, что частично упорядоченные множества M_α, $M_\alpha(u)$ изоморфны.

Основная теорема: Пусть $L \simeq \prod A_\iota$, $\iota \in \mathfrak{M}$, $L \simeq \prod B_\nu$, $\nu \in \mathfrak{N}$. Пусть в каждом множестве A_ι, B_ν находится более чем один елемент н пусть все факторы A_ι, B_ν неразложимы. То существует взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{M}$ на множество $\mathfrak{N}$ обладающие следующим свойством: если $\beta \in \mathfrak{N}$ — образ элемента $\alpha \in \mathfrak{M}$, то структуры A_α, B_β изоморфны.

Доказательство основной теоремы опирается на следующие леммы:

1. Естои X — конвексная подструктура структуры $L = \prod L_\iota$, то $[X]_{L_\iota}$ — конвексная подструктура структуры L_ι (лемма 1). 2. Имеет место изоморфизм $X \simeq \prod [X]_{L_\iota}$ (лемма 4). 3. Теорема об однозначности разложения вытекает без трудностей из следующей леммы 5: Пусть $L \simeq \prod A_\iota$, (i_1), $L \simeq \prod B_\iota (i_2)$. Построим множество $A_\alpha(u)$ [относительно (i_2)]. Проекцию $A_\alpha(u)$ на B_β [относительно (i_2)] обозначим A_α^β. Построим множества $A_\alpha^\beta(u)$, $B_\beta(u)$ [относительно (i_2)]. Имеет место равенство $A_\alpha^\beta(u) = A_\alpha(u) \cap B_\beta(u)$.