Matematicko-fyzikálny časopis

Alexander Rosa; Štefan Znám

Замечание об одной комбинаторной задаче

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 15 (1965), No. 4, 313--316

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126444`

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 4, 1965

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧЕ

АЛЕКСАНДЕР РОСА (ALEXANDER ROSA), ШТЕФАН ЗНАМ (ŠTEFAN ZNÁM),
Братислава

Пусть k — натуральное число; пусть задано натуральное число n такое, что $n \equiv k \pmod{2k}$; обозначим $m = 2n + \dfrac{n}{k}$. Обозначим

$$M = \{1,2, \ldots, m-1\} - \left\{2k+1, 2(2k+1), \ldots, \left(\frac{n}{k} - 1\right)(2k+1)\right\};$$

очевидно, M содержит $2n$ элементов. Если $i \in M$, то, очевидно, также $m - i = i' \in M$.

Определение. *Множество* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \subset M$, $N \leqq n$, *будем называть множеством типа* (k), *если выполнены условия*

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \equiv 0 \pmod{m}, \tag{1}$$

$$a_i + a_j \not\equiv 0 \pmod{m} \quad \textit{для всех} \quad i,j = 1,2, \ldots, N. \tag{2}$$

Повторением рассуждений работы [1] можно легко показать, что остаются справедливыми утверждения (а), (б), (в), лемма и теорема из [1], которая приймет следующий вид:

Теорема. *Пусть* $W(n,k,A) = \sum_{i=3}^{n-3} q_i^{(A)}$, *где* $q_i^{(A)}$ *обозначает число разных подмножеств типа* (k) *с* i *элементами множества* A *типа* (k) *с* n *элементами. Тогда* $W(n,k,A)$ *зависит только от* n *и* k *и не зависит от выбранного множества* A *типа* (k) *с* n *элементами.*

Выведем теперь формулу для определения числа разных множеств типа (k) с n элементами. Обозначим это число через $Q(n,k)$.

Обозначим через $p_r(s,k)$ количество разбиений числа r на отличные друг от друга числа, не превосходящие s и не являющиеся кратным $(2k + 1)$. Легко доказать, что для $p_r(s,k)$ имеет место рекуррентная формула:

$$p_r(s,k) = \begin{cases} p_r(s-1,k)\,, \text{ если } s \text{ является кратным } (2k+1), \\ p_r(s-1,k) + p_{r-s}(s-1,k), \text{ если } s \text{ не является кратным } (2k+1). \end{cases}$$

При этом полагаем $p_0(s,k) \underset{\text{def}}{=} 1$; $p_r(s,k) \underset{\text{def}}{=} 0$ для $r < 0$.

В самом деле, если s — кратное $(2k + 1)$, то количество разбиений числа r на отличные друг от друга числа, не превосходящие s и не являющиеся кратным $(2k + 1)$, равно количеству разбиений числа r на отличные друг от друга числа, не превосходящие $(s - 1)$ и не являющиеся кратным $(2k + 1)$.

Если s не является кратным $(2k + 1)$, то все разбиения r на отличные друг от друга числа, не превосходящие s и не являющиеся кратным $(2k + 1)$, можно разбить на два класса. В первый класс включим разбиения, не содержащие число s; очевидно, их число равно $p_r(s - 1, k)$. Во второй класс включим разбиения, содержащие число s. Этих разбиений столько же, сколько имеется разбиений числа $r - s$ на отличные друг от друга числа, не превосходящие $s - 1$ и не являющиеся кратным $(2k + 1)$; их число равно, очевидно, $p_{r-s}(s - 1,k)$.

Возьмем произвольное множество $A \subset M$. Сумму всех $a_i \in A$, не превосходящих число $n + \dfrac{n-k}{2k}$, обозначим через α; для $a_i > n + \dfrac{n-k}{2k}$ обозначим $b_i = m - a_i$ $\left(\text{очевидно, } b_i \leqq n + \dfrac{n-k}{2k}\right)$; сумму всех b_i обозначим через β.

Если A — множество типа (k), то, очевидно, $\alpha \equiv \beta \pmod m$. Числа a_i и b_i пробегают все числа $1, 2, \ldots, n + \dfrac{n-k}{2k}$ за исключением кратных $(2k + 1)$ (см. (в) в [1]), значит,

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}\left(n + \frac{n-k}{2k}\right)\left(n + \frac{n+k}{2k}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{n-k}{2k}\cdot\frac{n+k}{2k}\,(2k+1) =$$

$$= \frac{1}{4k}\,(2kn^2 + n^2 + k^2).$$

Если A — множество типа (k), то α должно удовлетворять соотношениям

$$2\alpha \equiv \frac{1}{4k}(2kn^2 + n^2 + k^2) \pmod m, \tag{3}$$

$$0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{4k}\,(2kn^2 + n^2 + k^2)\,. \tag{4}$$

Легко показать и обратное:

Пусть $A \subset M$, пусть элементы из A удовлетворяют (2) и пусть α удовлетворяет (3) и (4). Тогда A есть множество типа (k).

Пусть некоторое число α удовлетворяет (3) и (4). Пусть $\alpha = x_1 + x_2 + \ldots + x_t$, $t \leqq n$, — некоторое разбиение числа α на отличные друг от друга числа, не превосходящие $n + \frac{n-k}{2k}$ и не являющиеся кратным $(2k+1)$. Всякому такому разбиению можно поставить в соответствие множество типа (k) с n элементами. Двум разным α или двум разным разбиениям одного и того же α при этом поставлены в соответствие разные множества. Таким образом, для $Q(n,k)$ получаем формулу

$$Q(n,k) = \sum p_\alpha \left(n + \frac{n-k}{2k}, k\right),$$

где α пробегает все решения сравнения (3), удовлетворяющие неравенству (4).

Аналогично тому, как это сделано в [1], раздел IV, можно показать, что

$$Q(n,k) = W(n,k) + 2.$$

В таблицах 1, 2, 3 приводится несколько значений $W(n,k)$ для $k = 1,2,3$.

Примечание. К исследованию множеств типа (k) привела задача из теории графов, состоящая в определении циклического разложения полного графа $\langle 2kn + n \rangle$ на окружности с n ребрами (см. [2]).

Таблица 1

$k = 1$

n	3	5	7	9	11
$Q(n,1)$	0	2	6	18	62
$W(n,1)$	0	0	4	16	60

Таблица 2

$k = 2$

n	2	6	10	14	18
$Q(n,2)$	0	4	40	468	5 828
$W(n,2)$	0	2	38	466	5 826

Таблица 3

$k = 3$

n	3	9	15	21	27
$Q(n, 3)$	2	26	938	42 800	2 130 458
$W(n, 3)$	0	24	936	42 798	2 130 456

ЛИТЕРАТУРА

[1] Роса А., Знам Ш., *Об одной комбинаторной задаче из теории сравнений*, Mat.-fyz. časop. *15* (1965), 49—59.

[2] Rosa A., *O cyklických rozkladoch kompletného grafu na nepárnouholníky*, Časop. pěstov. mat. *91* (1966) (v tlači).

Поступило 29. 12. 1964.

ČSAV, Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied, Bratislava
Katedra matematiky Chemicko-technologickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej, Bratislava

REMARK ON A COMBINATORIAL PROBLEM

Alexander Rosa, Štefan Znám

Summary

Let n, k be natural numbers such that $n \equiv k \pmod{2k}$. Denote $m = 2n + n/k$ and denote

$$M = \{1,2, \ldots, m - 1\} - \left\{2k + 1, 2(2k + 1), \ldots, \left(\frac{n}{k} - 1\right) (2k + 1)\right\}.$$

The set $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \subset M$, $N \leqq n$, is said to be of the type (k), if (1) holds and if (2) holds for all $i, j = 1, \ldots, N$.

If the set A with n elements is of the type (k), then $q_i^{(A)}$ denotes the number of its subsets of the type (k) with i elements. The following theorem is valid:

The sum $\sum_{i=1}^{n} q_i^{(A)}$ does not depend on the choice of the set A, but only on the number of its elements n and on k (this sum is denoted by $W(n,k)$).

Further the formula for determining $Q(n, k)$, the number of different sets of the type (k) with n elements, is given.

It can be shown by the method analogous to one used in [1], that the following relation holds:

$$Q(n,k) = W(n,k) + 2\,.$$