Jozef Moravčík

Über die Äquivalenz linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung $(n = 3, 4)$

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 1, 17--43

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126586`

Matematický časopis 19 (1969), No. 1

ÜBER DIE ÄQUIVALENZ LINEARER GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN n-TER ORDNUNG ($n = 3,4$)

JOZEF MORAVČÍK, Žilina

EINLEITUNG

1. Mit grundlegenden Fragen, welche im Zusammenhang mit dem Begriff der Äquivalenz linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen (im weiteren nur Gleichungen) sind befassen sich Z. Hustý in der Arbeit [4] und V. Šeda in der Arbeit [11]. In der vorliegenden Arbeit werden gewisse notwendige und hinreichende Bedingungen der Äquivalenz der Gleichungen 3. und 4. Ordnung gezeigt und durch deren Anwendung werden oszillatorische und asymptotische Eigenschaften der Lösungen bestimmter Klassen der äquivalenten Gleichungen studiert. Um die Betrachtungen zu vereinfachen, beschränken wir uns auf das Studium der Gleichungen in halbkanonischer Form, auf welche sich jede Gleichung unter den allbekannten Voraussetzungen von Koeffizienten übertragen lässt.

Definition 1. *Es seien zwei Gleichungen derselben Ordnung $n \geqq 2$ gegeben:*

$$(1) \qquad y^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) y^{(n-k)} = 0, \qquad y^{(s)} = \frac{d^s y}{dx^s}, \qquad s = 1, 2, \ldots, n;$$

$$y^{(0)} = y;$$

$$(2) \qquad v^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} q_k(\xi) v^{(n-k)} = 0, \qquad v^{(s)} = \frac{d^s v}{d\xi^s}, \qquad s = 1, 2, \ldots, n;$$

$$v = v;$$

wo $p_k(x) \in C_0(I_1)$, $q_k(\xi) \in C_0(I_2)$, $k = 2, 3, \ldots, n$; I_1 und I_2 *sind Intervalle.*

Wir werden sagen, dass die Gleichung (2) *im Intervall $I_{2\xi} \subset I_2$ der Gleichung* (1) *im Intervall $I_{1x} \subset I_1$ äquivalent ist, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

1) *Es existieren Funktionen $\xi(x) \in C_{n+1}$ (I_{1x}), $t(x) \in C_n(I_{1x})$ derart, dass $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}, \xi'(x) \, . \, t(x) \neq 0$ in I_{1x} ist.*

2) *Wenn* $v(\xi)$ *die Lösung der Gleichung* (2) *in* $I_{2\xi}$ *ist, dann ist die Funktion*

$$y(x) = t(x)\, v\,[\xi(x)] \tag{3}$$

eine Lösung der Gleichung (1) *im intervali* I_{1x}.

Das geordnete Paar der Funktionen $[\xi(x), t(x)]$ werden wir als Träger der Äquivalenz bezeichnen. Im Satz 5 der Arbeit [11] wird bewiesen, dass im Falle von Gleichungen ohne rechte Seite, mit welchen wir uns weiter ausschliesslich beschäftigen werden, die zweite Komponente des Trägers der Äquivalenz bis auf die Multiplikationskonstante durch die erste Komponente eindeutig bestimmt ist. Deshalb werden wir die Äquivalenz der Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ zu der Gleichung (1) in I_{1x} mit dem Träger der Äquivalenz $[\xi(x), t(x)]$ symbolisch derart (2) $I_{2\xi} \sim$ (1) I_{1x} $\{\xi(x)\}$ bezeichnen. Wenn uns der Träger der Äquivalenz nicht wichtig erscheinen wird, werden wir die Äquivalenz der Gleichungen ohne Symbol des Trägers der Äquivalenz schreiben, also (2) $I_{2\xi} \sim$ (1) I_{1x}.

Es ist klar, dass unter den angeführten Voraussetzungen von Funktionen $\xi(x)$, $t(x)$ durch die Beziehung (3) eine isomorphe Abbildung Z der Menge von Lösungen der Gleichung (2) auf die Menge von Lösungen der Gleichung (1) von folgender Eigenschaft: wenn $v(\xi)$ eine beliebige Lösung der Gleichung (2) in $I_{2\xi}$, und $y(x)$ deren Bild bei der Abbildung Z ist, bildet $\xi(x)$ die Menge der Nullstellen der Lösung $y(x)$ in I_{1x} auf die Menge der Nullstellen der Funktion $v(\xi)$ in $I_{2\xi}$ ab, auch mit der Erhaltung der Vielfachheit, definiert wird.

Aus den Resultaten, welche in der Arbeit [4], Teil III. bewiesen sind, folgt, dass unter den Voraussetzungen $p_k(x) \in C_{n-k}(I_1)$, $q_k(\xi) \in C_{n-k}(I_2)$, $k = 2, 3, \dots, n$; (2) $I_{2\xi} \sim$ (1) $I_{1x}\{\xi(x)\}$ genau dann ist, wenn die erste Komponente $\xi(x)$ des Trägers der Äquivalenz eine Lösung des Systems nichtlinearer Differentialgleichungen

$$\{\xi, x\} + \frac{3}{n+1}\, q_2(\xi)\xi'^2 = \frac{3}{n+1}\, p_2(x), \tag{4}$$

$$\Theta_k(\xi)\xi'^k = \vartheta_k(x), \qquad k = 3, 4, \dots, n;$$

im Intervall I_{1x} ist; wo $\{\xi, x\} = \frac{1}{2}\xi''' : \xi' - \frac{3}{4}\, \xi''^2 : \xi'^2$ die sog. Schwarzsche Ableitung der Funktion $\xi(x)$ im Punkte x ist, $' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\Theta_k(\xi)$ bzw. $\vartheta_k(x)$ sog. Fundamentalinvarianten (vgl. [9]) der Gleichung (2) bzw. der Gleichung (1) sind. Die zweite Komponente des Trägers der Äquivalenz ist dann beliebige Funktion $t(x)$, die durch die Beziehung $t(x) = c\,|\xi'(x)|^{(1-n)/2}$, wo $c \neq 0$ eine Konstante ist, definiert wird.

Die in der Definition 1 eingeführte Beziehung zwischen den Gleichungen ist reflexiv, symmetrisch und transitiv (vgl. [11]) und ermöglicht eine Zerlegung der Menge aller Gleichungen n-ter Ordnung in Klassen äquivalenter Gleichungen zu definieren. Im weiteren Abschnitten dieser Arbeit werden Eigenschaften der Lösungen gewisser Klassen von Gleichungen 3. und 4. Ordnung studiert.

I. DIE LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 3. ORDNUNG

2. Es sei eine Gleichung der dritten Ordnung

$$y''' + 3p_2(x)y' + p_3(x)y = 0 \tag{1,1}$$

gegeben, wo $p_2(x) \in C_1(I_1)$, $p_3(x) \in C_0(I_1)$ ist. Weil (sei [9]) $\vartheta_3(x) = p_3(x) - \frac{3}{2}p_2'(x)$ ist, bezeichnen wir $\vartheta_3(x) = b(x)$, $\frac{3}{2}p_2(x) = A(x)$, um zu vereinfachen. Nachher geht die Gleichung (1,1) in die Form

$$y''' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0, \tag{a}$$

wo $A(x) \in C_1(I_1)$, $b(x) \in C_0(I_1)$ ist, über.

Es sei weiter eine Gleichung

$$\dddot{v} + 2A_1(\xi)\dot{v} + [\dot{A}_1(\xi) + b_1(\xi)]v = 0 \tag{b}$$

gegeben, wo $\cdot = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$, $A_1(\xi) \in C_1(I_2)$, $b_1(\xi) \in C_0(I_2)$ ist.

Aus den in der Einleitung angeführten Resultaten folgt für die Äquivalenz der Gleichungen (a) und (b) die folgende Behauptung, welche wir als einen Hilfssatz formulieren:

Hilfssatz 1,1. $(b)I_{2\xi} \sim (a)I_{1x}\{\xi(x)\}$, *wo* $I_{1x} \subset I_1$, $I_{2\xi} \subset I_2$ *ist; gilt genau dann, wenn* $\xi(x)$ *eine Lösung des Systems nichtlinearer Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \{\xi, x\} + \tfrac{1}{2}A_1(\xi)\xi'^2 &= \tfrac{1}{2}A(x), \\ b_1(\xi)\xi'^3 &= b(x); \end{aligned} \tag{1,2}$$

im Intervall I_{1x} *ist. Der Träger der Äquivalenz ist dann ein geordnetes Paar der Funktionen* $[\xi(x), c(\xi'(x))^{-1}]$, *wo* $c \neq 0$ *eine Konstante ist.*

Definition 2. *Wir werden sagen, dass die Funktion* $f_1(x)$ *im Intervall* I_{1x} *eine fastgleiche Struktur (eine gleiche Struktur) der Nullstellen hat wie die Funktion* $f_2(\xi)$ *im Intervall* $I_{2\xi}$, *wenn eine schlichte Abbildung* $\xi(x)$ *des Intervalls* I_{1x} *auf* $I_{2\xi}$ *existiert, welche in jedem Punkte* $x \in I_{1x}$ *die Ableitung* $\xi'(x) \neq 0$ *besitzt und die Menge der Nullstellen der Funktion* $f_1(x)$ *in* I_{1x} *auf die Menge der Nullstellen der Funktion* $f_2(\xi)$ *in* $I_{2\xi}$ *(mit der Erhaltung der Vielfachheit jeder Nullstelle) abbildet.*

Aus dem Hilfssatz 1,1 folgt unmittelbar:

Hilfssatz 1,2. *Es sei* $(b)I_{2\xi} \sim (a)I_{1x}\{\xi(x)\}$ *und* $b_1(\xi) \in C_r(I_{2\xi})$, *wo* r *irgendeine natürliche Zahl ist. Wenn* $\xi(x) \in C_{r+1}(I_{1x})$ *ist, dann besitzt die Funktion* $b(x)$ *im Intervall* I_{1x} *die gleiche Struktur der Nullstellen wie die Funktion* $b_1(\xi)$ *im Intervall* $I_{2\xi}$. *Wenn* $r \geqq 4$ *und* $\xi(x) \notin C_{r+1}(I_{1x})$ *ist, dann besitzt die Funktion* $b(x)$ *in* I_{1x} *die fastgleiche Struktur der Nullstellen wie die Funktion* $b_1(\xi)$ *in* $I_{2\xi}$.

Beweis. Wenn $(b)I_{2\xi} \sim (a)I_{1x}\{\xi(x)\}$ gilt, dann erfüllt die erste Komponente $\xi(x)$ des Trägers der Äquivalenz nach dem Hilfssatz 1,1 das System (1,2). Die Behauptung des Hilfssatzes 1,2 folgt aus der zweiten Gleichung des Systems und aus der Formel

$$b^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{m} P_j^m(\eta)\xi'^{m-j+3}[b_1(\xi)]^{[m-j]},$$

wo $\xi = \xi(x)$, $\eta = \xi'' : \xi'$, $P_j^m(\eta)$ ein bestimmtes Polynom von Variablen $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(j-1)}$, $' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ist, $[b_1(\xi)]^{[s]} = \dfrac{\mathrm{d}^s b_1(\xi)}{\mathrm{d}\xi^s}$, $s = 1, 2, \ldots, m$; $[b_1(\xi)]^{[0]} = b_1(\xi)$. Die Richtigkeit dieser Formel beweisst sich leicht durch die vollständige Induktion nach der Ordnung m der Ableitung.

Bemerkung 1. Die Gleichung dritter Ordnung

$$y''' + 2A(x)y' + A'(x)y = 0,$$

deren fundamentale Invariante identisch gleich Null in ihrem Definitionsbereich I_1 ist, heisst die selbstadjungierte Gleichung. Es folgt aus dem Hilfssatz 1,2, dass die selbstadjungierte Gleichung im Intervall I_1 oder in einem Intervall $I \subset I_1$ wieder nur der selbstadjungierten Gleichung dritter Ordnung im gewissen entsprechenden Intervall äquivalent sein kann. In der Arbeit [1] bewies O. Borůvka die Existenz der durch die Cauchysche Anfangsbedingungen bestimmten Lösung der ersten Differentialgleichung (sog. Kummersche) des Systems (1,2), welche ein Intervall $i_1 \subset I_1$ auf ein Intervall $i_2 \subset I_2$ abbildet, wobei das Intervall i_1 bzw. i_2 immer im bestimmten Sinne bis zur Grenze des Intervalls I_1 bzw. I_2 langt. Das bedeutet, dass zwei beliebige selbstadjungierte Gleichungen 3. Ordnung immer in bestimmten Intervallen äquivalent sind. Dieses Ergebnis folgt auch aus der Arbeit [6], die sich mit gewissen Fragen der Theorie der Transformationen der selbstadjungierten Gleichungen 3. Ordnung beschäftigt. Darum werden wir uns im weiteren nur mit solchen Gleichungen 3. Ordnung der Form (a) beschäftigen, für die in keinem Teil des Intervalls I_1 $b(x) \equiv 0$ gilt.

Unter der Voraussetzung, dass $b(x) \in C_2(I_1)$, $b(x) \neq 0$ für alle $x \in I_1$ ist, definiert man im Intervall I_1 die Funktion $B(x)$ durch die Beziehung

$$B(x) = \left\{A(x) - \left[\frac{1}{3}\frac{b'(x)}{b(x)}\right]' + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\frac{b'(x)}{b(x)}\right]^2\right\} : [b(x)]^{2/3}. \tag{1,3}$$

Von der Äquivalenz der Gleichungen (a) und (b) gilt

Satz 1,1. *Es sei*

$$(b)I_{2\xi} \sim (a)I_{1x}\{\xi(x)\}, \tag{1,4}$$

wo $I_{2\xi} \subset I_2$, $I_{1x} \subset I_1$ *und* $b(x) \neq 0$ *in* I_{1x}, $b(x) \in C_3(I_{1x})$ *ist. Dann gilt* $b_1(\xi) \neq 0$ *in* $I_{2\xi}$, $b_1(\xi) \in C_3(I_{2\xi})$ *und folgende zwei Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die erste Komponente* $\xi(x)$ *des Trägers der Äquivalenz ist eine beliebige Lösung des Systems der Differentialgleichungen*

$$\{\xi, x\} + \tfrac{1}{2}A_1(\xi)\xi'^2 = \tfrac{1}{2}A(x), \qquad x \in I_{1x}; \tag{1,5}$$

$$\xi'(x) = [b(x)]^{1/3} \,.\, [b_1(\xi)]^{-1/3}, \qquad x \in I_{1x}. \tag{1,6}$$

2. *Die erste Komponente* $\xi(x)$ *des Trägers der Äqnivalenz ist eine beliebige Lösung des Systems der Funktionalgleichungen, das aus den Gleichungen* (1,6) *und*

$$B_1[\xi(x)] = B(x), \qquad x \in I_{1x}, \tag{1,7}$$

wo $B_1(\xi) = \left\{A_1(\xi) - \left[\dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{b}_1(\xi)}{b_1(\xi)}\right]^{\cdot} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{b}_1(\xi)}{b_1(\xi)}\right]^2\right\} : [b_1(\xi)]^{2/3}$ *ist, besteht.*

Beweis. Wenn (1,4) und $b(x) \neq 0$ in I_{1x} gilt, dann folgt aus dem Hilfssatz 1,2, dass $b_1(\xi) \neq 0$ in $I_{2\xi}$ ist. Wenn ausserdem $b(x) \in C_3(I_{1x})$ ist, dann erhalten wir aus dem Hilfssatz 1,1 mit Benützung der zweiten Gleichung des Systems (1,2), dass $b_1(\xi) \in C_3(I_{2\xi})$ ist. Dem Hilfssatz 1,1 nach erfüllt die erste Komponente $\xi(x)$ des Trägers der Äquivalenz in I_{1x} das System (1,2), das unter den gegebenen Voraussetzungen sichtlich mit dem System (1,5), (1,6) identisch ist. Es sei nun $\xi(x)$ eine beliebige Lösung der Gleichung (1,6) in I_{1x}. Die Kummersche Gleichung (1,5) übertragen wir in die Form

$$2\{\xi, x\} + A_1(\xi)\xi'^2 = A(x). \tag{1,8}$$

Aus der Gleichung (1,6) erhalten wir stufenweise durch zweifache Differentiation:

$$\xi''(x) = \frac{1}{3}\frac{b'(x)}{b(x)}\left[\frac{b(x)}{b_1(\xi)}\right]^{1/3} - \frac{1}{3}\frac{\dot{b}_1(\xi)}{b_1(\xi)}\left[\frac{b(x)}{b_1(\xi)}\right]^{2/3};$$

$$\xi'''(x) = \left[\frac{1}{3}\frac{b'(x)}{b(x)}\right]'\left[\frac{b(x)}{b_1(\xi)}\right]^{1/3} + \left[\frac{1}{3}\frac{b'(x)}{b(x)}\right]^2\left[\frac{b(x)}{b_1(\xi)}\right]^{1/3} - \left[\frac{1}{3}\frac{\dot{b}_1(\xi)}{b_1(\xi)}\right]^{\cdot}\frac{b(x)}{b_1(\xi)} -$$

$$- \frac{1}{3}\frac{\dot{b}_1(\xi)}{b_1(\xi)} \cdot \frac{b'(x)}{b(x)}\left[\frac{b(x)}{b_1(\xi)}\right]^{2/3} + 2\left[\frac{1}{3}\frac{\dot{b}_1(\xi)}{b_1(\xi)}\right]^2\frac{b(x)}{b_1(\xi)}.$$

Wenn wir diese Resultate in die Formel $2\{\xi, x\} = \xi''' : \xi' - \frac{3}{2}\,\xi''^2 : \xi'^2$ einsetzen, erhalten wir

$$2\{\xi, x\} = \left[\frac{1}{3}\frac{b'(x)}{b(x)}\right]' - \frac{1}{2}\left[\frac{b'(x)}{3b(x)}\right]^2 - \left[\frac{b(x)}{b_1(\xi)}\right]^{2/3}\left\{\left[\frac{\dot{b}_1(\xi)}{3b_1(\xi)}\right]^{\cdot} - \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{b}_1(\xi)}{3b_1(\xi)}\right]^2\right\}.$$

Nach der Einsetzung in (1,8) und einer einfachen Umformung erhalten wir die Beziehung

$$\left[\frac{b'(x)}{3b(x)}\right]' - \frac{1}{2}\left[\frac{b'(x)}{3b(x)}\right]^2 + \left[\frac{b(x)}{b_1(\xi)}\right]^{2/3}\left\{A_1(\xi) - \left[\frac{\dot{b}_1(\xi)}{3b_1(\xi)}\right]^{\cdot} + \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{b}_1(\xi)}{3b_1(\xi)}\right]^2\right\} = A(x),$$

aus der es sichtbar ist, dass die Lösung der Gleichung (1,6) eine Lösung der Differentialgleichung (1,5) dann und nur dann ist, wenn sie die Funktionalgleichung (1,7) erfüllt. Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen.

Bemerkung 2. Aus der Behauptung des Satzes 1,1 ist es offenbar, dass bei der Punktabbildung

$$\xi = \xi(x), \qquad y = t(x)v; \tag{1,9}$$

welche die Form der Gleichung (a) erhält, sich weder die Form noch der Wert der durch die Beziehung (1,3) definierten Funktion $B(x)$ ändert. Darum werden wir sie die absolute Invariante der Gleichung (a) nennen.

Aus den Hilfssätzen 1,1 und 1,2 und aus dem Satz 1,1 erhalten wir gleich diesen Satz:

Satz 1,2. *Dann und nur dann, wenn* (1,4) *gilt,* $b(x) \neq 0$ *in* I_{1x}, $b(x) \in C_3(I_{1x})$ *ist, gilt* $b_1(\xi) \neq 0$ *in* $I_{2\xi}$, $b_1(\xi) \in C_3(I_{2\xi})$, (1,6), (1,7).

3. Die obenangeführten Resultate benützen wir jetzt bei der Untersuchung der Bedingungen unter welchen die Gleichung (a) im Intervall $I = (a,b)$, $-\infty \leqq a < b \leqq \infty$; einer Gleichung

$$\ddot{v} + 2a\dot{v} + bv = 0 \tag{1,10}$$

einer gleichen Form mit konstanten Koeffizienten; wo $b \neq 0$ ist; im gewissen Interval I_0 äquivalent ist. Es ist leicht erkennbar, dass die absolute Invariante $B_1(\xi)$ der Gleichung (1,10) identisch gleich der Konstante $K = a : b^{2/3}$ für alle $\xi \in (-\infty; \infty)$ ist. Darum ist es natürlich mit Berücksichtigung auf die Behauptung des Satzes 1,2 die folgende Definition einzuführen:

Definition 3. *Wir werden sagen, dass die Gleichung* (a) *zur Klasse* K *im Intervall* I *gehört, wenn in* I: $b(x) \neq 0$, $b(x) \in C_3(I)$ *und* $B(x) \equiv K$ *gilt.*

Offenbar ist es am geeignetsten als den Repräsentanten der Klasse K die Gleichung

$$(K) \qquad \dddot{v} + 2K\dot{v} + v = 0,$$

wo K eine Konstante ist, zu wählen.

Aus dem Satze 1,2 folgt umgehend

Satz 1,3. *Die Gleichung* (a) *gehört zur Klasse* K *im Intervall* I *dann und nur dann, wenn* $(K)I_0 \sim (a)I\{\xi(x)\}$ *ist, wobei*

$$(1{,}11) \qquad \xi(x) = \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} dt + c,\ x_0 \in I; \quad t(x) = c_1[b(x)]^{-1/3},$$

wo $c_1 \neq 0$, c *Konstanten sind*;

$$(1{,}12) \qquad I_0 \equiv (\alpha, \beta), \quad \text{bzw.} \quad I_0 \equiv (\beta, \alpha),$$

wo $\alpha = \xi(a)$, $\beta = \xi(b)$ *ist, gilt.*

Bemerkung 3. In der Behauptung des Satzes 1,3 und im weiteren verstehen wir unter dem Symbol $\xi(a)$, bzw. $\xi(b)$ im Falle, wenn a, bzw. b eine uneigentliche Zahl ist, die Grenze in dieser Zahl, die entweder eigen oder uneigen offenbar immer existiert.

Aus dem Satze 1,3 ergeben sich diese Folgerungen:

Folgerung 1. *Die Gleichung* (a) *gehört zur Klasse* K *im Intervall* I *dann und nur dann, wenn sie ein Fundamentalsystem der Lösungen dieser Form*

$$(1{,}13) \qquad y_i(x) = t(x)v_i[\xi(x)], \qquad i = 1, 2, 3 \ \textit{ist; hat,}$$

wo $v_i(\xi)$, $i = 1, 2, 3$ *ein Fundamentalsystem der Lösungen der Gleichung* (K) *im Intervall* I_0 *bilden, wobei* $\xi(x)$, $t(x)$, *bzw.* I_0 *durch die Beziehung* (1,11) *bzw.* (1,12) *bestimmt sind.*

Beweis. Es folgt aus dem Satz 1,3, dass die Funktionen (1,13) Lösungen der Gleichung (a) in I sind und nach der Behauptung des Hilfssatzes 1 der Arbeit [11] sind sie dann und nur dann linear unabhängig, wenn die Gleichung (a) zur Klasse K im Intervall I gehört.

Folgerung 2. *Die Gleichung* (a) *gehört dann und nur dann zur Klasse* K *im Intervall* I, *wenn sie folgende Form*

$$(1{,}14) \qquad y''' + 2\left\{\left[\frac{b'(x)}{3b(x)}\right]' - \frac{1}{2}\left[\frac{b'(x)}{3b(x)}\right]^2 + K\,[b(x)]^{2/3}\right\}y' +$$
$$+ \left\{\left[\frac{b'(x)}{3b(x)}\right]'' - \left[\frac{b'(x)}{3b(x)}\right]\cdot\left[\frac{b'(x)}{3b(x)}\right]' + \frac{2}{3}\,K[b(x)]^{-1/3}b'(x) + b(x)\right\} y = 0$$

hat.

Beweis. Die Form (1,14) erhalten wir aus der Form (a) durch Anwendung der Beziehung (1,3), wo $B(x) \equiv K$ ist.

Bemerkung 4. Die Gleichung (1,14) lässt sich durch die Substitution $b(x) = bf^{3(\nu-1)}(x)$, wo $b \neq 0$, $\nu \neq 1$ Konstanten, $f(x) \in C_3(I)$, $f(x) > 0$ für alle $x \in I$ sind, in die Form

$$(1,15) \qquad \begin{aligned} &f^3(x)y''' + f(x)[af^{2\nu}(x) + (1-\nu^2)f'^2(x) + 2(\nu-1)f(x)f''(x)]y' + \\ &+ \{bf^{3\nu}(x) + (\nu-1)\,[af^{2\nu}(x)f'(x) + (\nu+1)f'^3(x) - \\ &- (\nu+2)f(x)f'(x)f''(x) + f^2(x)f'''(x)]\}y = 0, \end{aligned}$$

wo $a = Kb^{2/3}$ ist, übertragen. Jede Gleichung der Form (1,15) lässt sich durch die Transformation der Form (1,9), wo $\xi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f^{\nu-1}(t)\mathrm{d}t + c$, $x_0 \in I$, c eine Konstante bedeutet, $t(x) = f^{1-\nu}(x)$, ist, auf die Gleichung (1,10) mit konstanten Koeffizienten übertragen.

Wenn wir in einem speziellen Falle in der Gleichung (1,15) $f(x) = x$ ersetzen, erhalten wir für $x > 0$ die Gleichung

$$x^3y''' + x(ax^{2\nu} + 1 - \nu^2)y' + [bx^{3\nu} + a(\nu-1)x^{2\nu} + \nu^2 - 1]y = 0,$$

die sich für $\nu \neq 0$ auf die Gleichung (1,10) durch Transformation von $\xi = \nu^{-1}x^\nu$, $y = x^{1-\nu}v$ sich übertragen lässt. (Wenn $\nu = 0$ ist, ist die betreffende Gleichung eine Eulersche Gleichung mit denselben Dimensionen, die sich auf die Gleichung *mit konstanten Koeffizienten durch die allbekannte Transformation übertragen lässt.) Dieses spezielle Ergebnis ist* — wie E. Kamke (vgl. [5], Teil III., 3.62) anführt — in der Arbeit A. Chiellini, Rendiconti Cagliari 9 (1939), S. 142—155 abgeleitet worden.

Die Gleichung

$$(\bar{a}) \qquad z''' + 2A(x)z' + [A'(x) - b(x)]z = 0,$$

wo $A(x) \in C_1(I)$, $b(x) \in C_0(I)$ ist, nennt man eine adjungierte Gleichung zur Gleichung (a). Weil die absolute Invariante der Gleichung (a) mit der absoluten Invariante der Gleichung (a) identisch ist, ist es klar, dass die Gleichung $(\bar{a})$ zur Klasse K im Intervall I dann und nur dann gehört, wenn die Gleichung (a) zur Klasse K im Intervall I gehört. Daraus und aus dem Satz 1,3 ergibt sich gleich die

Folgerung 3. *Es gilt* $(K)I_0 \sim (a)I\{\xi(x)\}$ *dann und nur dann, wenn* $(K)\bar{I}_0 \sim (\bar{a})I\{\bar{\xi}(x)\}$ *ist, wo* $\bar{\xi}(x) = -\xi(x)$, $\bar{I}_0$ *eine Menge eines solchen* $\xi \in (-\infty; \infty)$ *ist, wo* $-\xi \in I_0$ *ist, wobei* $\xi(x)$ *bzw.* I_0 *durch die Beziehung* (1.11) *bzw.* (1,12) *gegeben sind.*

4. In diesem Abschnitt der Arbeit werden wir uns mit dem Studium der oszillatorischen und asymptotischen Eigenschaften der Lösungen der Gleichungen der Form (a), die zur Klasse K im Intervall $I = (a; \infty)$ gehören, wo a eine Konstante bzw. $-\infty$ ist, beschäftigen. Unter der Lösung der Gleichung werden wir nur eine nichttriviale Lösung verstehen. Die Lösung der Gleichung werden wir nichtoszillatorisch im Intervall I nennen, wenn sie in diesem Intervall höchstens eine endliche Zahl von Nullstellen hat. Wenn die Lösung der Gleichung im Intervall I eine unendliche Zahl von Nullstellen hat, werden wir sie oszillatorisch im Intervall I nennen. Von der Gleichung, die im Intervall I alle Lösungen nichtoszillatorisch hat, werden wir sagen, dass sie im Intervall I nichtoszillatorisch ist. Eine solche Gleichung, die im Intervall I sowohl oszillatorische als auch nichtoszillatorische Lösungen hat, werden wir oszillatorisch im Intervall I nennen. Wir werden eigentlich oszillatorisch im Intervall I eine solche Gleichung nennen, die im Intervall I alle Lösungen oszillatorisch hat.

Hilfssatz 1,3. *Die Gleichung* (K) *ist nichtoszillatorisch im Intervall* (α, ∞), $\alpha \geqq -\infty$, *bzw. im Intervall* $(-\infty; \beta)$, $\beta \leqq \infty$ *dann und nur dann, wenn* $K \leqq -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ *ist.*

Wenn $K > -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ *ist, hat die Gleichung* (K) *im Intervall* (α, ∞), $\alpha \geqq -\infty$ *eine einzige Lösung (bis auf die Multiplikationskonstante) ohne Nullstellen, welche gegen Null für* $\xi \to \infty$ *strebt und deren alle sonstigen Lösungen oszillatorisch und unbegrenzt in diesem Intervall sind.*

Beweis. Alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 + 2K\lambda + 1 = 0 \tag{1,16}$$

der Gleichung (K) sind bei $K \leqq -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ reell (vgl. [10], S. 114). Es ist offenbar, dass in diesem Fall das Fundamentalsystem der Lösungen der Gleichung (K) nichtoszillatorische Lösungen bilden und so sind alle Lösungen der Gleichung (K) nichtoszillatorisch.

Wenn $K > -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ ist, hat die charakteristische Gleichung (1,16) die einzige reelle Wurzel λ_1, die man dem Descartesschen Satz nach als negativ beweisen kann und zwei nichtreelle komplexe konjugierte Wurzeln: $\lambda_{2,3} = \mu \pm i\nu$, $\nu \neq 0$. Nach der Faktorzerlegung der linken Seite der Gleichung (1,16) wird es leicht bewiesen, dass $\mu = -\frac{1}{2}\lambda_1 > 0$, $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{3\lambda_1^2 + 8K}$ ist. Darum hat die allgemeine Lösung der Gleichung (K) in diesem Fall die Form:

$$v = c_1 \exp(\lambda_1 \xi) + \exp(-\tfrac{1}{2}\lambda_1\xi) \,.\, (c_2 \cos \nu\xi + c_3 \sin \nu\xi), \tag{1,17}$$

wo c_i, $i = 1, 2, 3$ beliebige Konstanten sind. Es ist ersichtlich, dass die nichtoszillatorische Lösung $v_1 = \exp(\lambda_1 \xi)$ gegen Null für $\xi \to \infty$ strebt und jede Lösung der Form (1,17), für welche $c_1 = 0$ ist, oszillatorisch ist, wobei $\overline{\lim\limits_{\xi \to \infty}} |v(\xi)| = \infty$ ist. Daraus folgt, dass jede Lösung der Form (1,17), für welche wenigstens eine Konstante aus c_2, c_3 von Null verschieden ist, oszillatorisch und unbegrenzt im Intervall (α, ∞) ist. Damit ist die Behauptung des Hilfssatzes bewiesen.

Bemerkung 5. Es ist offenbar, dass im Fall $K > -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ die Behauptung des Hilfssatzes 1,3 für das Intervall $(-\infty, \beta)$, wo $\beta < \infty$ ist, nicht gilt. In diesem Intervall ist nämlich jede Lösung der Form (1,17) der Gleichung (K), für welche $c_1 \neq 0$ ist, nichtoszillatorisch und man kann von oszillatorischen Lösungen der Gleichung (K) in diesem Intervall nur soviel sagen, dass sie ein System mit zwei Parametern bilden.

Satz 1,4. *Es gehöre die Gleichung* (a) *zur Klasse* K *im Intervall* I. *Dann gilt:*

1. *Sie ist nichtoszillatorisch im Intervall* I *dann und nur dann, wenn entweder* a) $K \leqq -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ *oder* b) $K > -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ *ist und* $\int_a^\infty [b(t)]^{1/3}\,dt$ *konvergiert.*

2. *Sie ist oszillatorisch im Intervall* I *dann und nur dann, wenn* $K > -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ *ist und* $\int_a^\infty [b(t)]^{1/3}\,dt$ *divergiert, wobei es gilt:*

a) *Wenn* $b(x) > 0$ *ist, hat die Gleichung* (a) *im Intervall* I *die einzige Lösung ohne Nullstellen bis auf den Multiplikationsfaktor.*

b) *Wenn* $b(x) < 0$ *ist, bildet die Menge der Lösungen der Gleichung* (a), *welche im Intervall* I *oszillatorisch sind, ein System mit zwei Parametern.*

Beweis. Die Richtigkeit der Behauptungen des Satzes folgt vor allem aus dem Satz 6 der Arbeit [11], dem Satz 1,3 und dem Hilfssatz 1,3. Die Behauptung 1. unter der Voraussetzung b) folgt weiter daraus, dass die durch die Beziehung (1,11) definierte Abbildung $\xi(x)$ das Intervall I auf das durch die Beziehung (1,12) definierte Intervall I_0, worauf jede Lösung der Gleichung (K) höchstens eine endliche Zahl von Nullstellen hat, abbildet.

Nach dem Satz 9 der Arbeit [2] besitzt jede Lösung der Gleichung (a) mit einer Nullstelle im Intervall I eine unendliche Zahl von Nulstellen in diesem Intervall bei $b(x) \geqq 0$ dann und nur dann, wenn wenigstens eine Lösung der Gleichung (a) eine unendliche Zahl von Nullstellen im Intervall I besitzt.

Im Falle 2. hat die Gleichung (a) nach der Folgerung 1 des Satzes 1,3 das Fundamentalsystem der Lösungen:

$$(1,18) \quad y_1(x) = [b(x)]^{-1/3} \exp [\lambda_1 (\int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3}\,dt + c)],$$

$$y_2(x) = [b(x)]^{-1/3} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\lambda_1\left(\int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} dt + c\right)\right] \cos\left[\nu\left(\int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} dt + c\right)\right],$$

$$y_3(x) = [b(x)]^{-1/3} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\lambda_1\left(\int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} dt + c\right)\right] \sin\left[\nu\left(\int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} dt + c\right)\right];$$

wo $\lambda_1 < 0$ die reelle Wurzel der Gleichung (1,16), $\nu \neq 0$ der Imaginärteil ihrer komplexen Wurzel ist. Die Lösung y_1 ist offenbar nichtoszillatorisch im Intervall I, y_2, y_3 sind jedoch lineare unabhängige oszillatorische Lösungen in diesem Intervall.

a) Wenn $b(x) > 0$ ist, ist es leicht festzustellen, dass jede Lösung der Gleichung (a) der Form $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$, wo wenigstens eine der Zahlen c_2, c_3 von Null verschieden ist, wenigstens eine Nullstelle im Intervall I hat und darum ist sie oszillatorisch im Intervall I nach dem obenangeführten Satz von M. Greguš.

b) Im Falle $b(x) < 0$ ist offensichtlich jede Lösung der Form $c_2y_2 + c_3y_3$ oszillatorisch, und aus der Bemerkung 5 folgt es, dass unter dieser Voraussetzung im allgemeinen keine kräftigere Behauptung gilt.

Bemerkung 6. Aus dem Obenangeführten folgt es, dass die Gleichung (a), die zur Klasse K in einem begrenzten Intervall $I = (a; b)$, $-\infty < a < b < \infty$, gehört, in diesem Intervall dann und nur dann oszillatorisch ist, wenn $K > -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ ist und das Integral $\int_a^b [b(t)]^{1/3}dt$ divergiert.

Beachten wir zunächst die asymptotischen Eigenschaften der Lösungen der Gleichung (a) für einen nichtoszillatorischen Fall. Es gilt:

Satz 1,5. *Es gehöre die Gleichung (a) zur Klasse K im Intervall I, wobei $K \leqq -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ ist. Es konvergiere $\int_a^\infty [b(t)]^{1/3}\, dt$ und es gelte:*

$$\lim_{x\to\infty} b(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{b'(x)}{b(x)} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{b'(x)}{b(x)}\right]' [b(x)]^{-1/3} = 0.$$

Dann gilt es von jeder nichttrivialen Lösung $y(x)$ der Gleichung (a): $\lim_{x\to\infty} y(x) = \pm\infty$.

Beweis. Betrachten wir zuerst den Fall, wenn $K < -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$. Dann gilt es von Wurzeln der charakteristischen Gleichung (1,16), die alle reel sind: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2, \lambda_3 > 0$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Darum besitzt die allgemeine Lösung $y(x)$ der Gleichung (a) nach der Folgerung 1 des Satzes 1,3 die Form:

$$(1{,}19)\qquad y(x) = [b(x)]^{-1/3}[C_1 \exp(\lambda_1 \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3}dt) + C_2 \exp(\lambda_2 \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3}dt) + $$
$$+ C_3 \exp(\lambda_3 \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3}dt)] = [b(x)]^{-1/3}u(x);\ x_0 \in I.$$

Es sei $y(x)$ eine beliebige nichttriviale Lösung der Gleichung (a). Bezeichnen wir $L_i = \lim\limits_{x\to\infty} \exp(\lambda_i \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3}dt)$, $i = 1, 2, 3$. Offenbar gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = \sum\limits_{i=1}^{3} C_i L_i$. Wenn $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) \neq 0$ ist, dann ist $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \pm\infty$, denn nach der Voraussetzung $\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = 0$, daher auch $\lim\limits_{x\to\infty} [b(x)]^{1/3} = 0$. Es sei $\sum\limits_{i=1}^{3} C_i L_i = 0$. Dann gilt nach der l'Hospitalschen Regel $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3u'(x)}{[b(x)]^{-2/3}b'(x)}$. Weil $u'(x) = [b(x)]^{1/3} \sum\limits_{i=1}^{3} C_i\lambda_i \exp(\lambda_i \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3}dt) = [b(x)]^{1/3}v(x)$ gilt, wird es $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 3 \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{v(x)}{\dfrac{b'(x)}{b(x)}}$ sein. Wenn $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = \sum\limits_{i=1}^{3} C_i\lambda_i L_i \neq 0$ ist, dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \pm\infty$, denn nach der Voraussetzung ist $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b'(x)}{b(x)} = 0$. Wenn doch $\sum\limits_{i=1}^{3} C_i\lambda_i L_i = 0$ ist dann gilt wieder nach der l'Hospitalschen Regel: $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 3 \lim\limits_{x\to\infty} \left\{v'(x) : \left[\dfrac{b'(x)}{b(x)}\right]'\right\}$. Weil $v'(x) = [b(x)]^{1/3} \sum\limits_{i=1}^{3} C_i\lambda_i^2 \exp(\lambda_i \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3}dt) = [b(x)]^{1/3} z(x)$ ist, ist $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 3 \lim\limits_{x\to\infty} \left\{z(x) : \left[\dfrac{b'(x)}{b(x)}\right]' \cdot b(x)]^{-1/3}\right\}$.

Wenn $\lim\limits_{x\to\infty} z(x) = \sum\limits_{i=1}^{3} C_i\lambda_i^2 L_i \neq 0$ ist, dann ist $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \pm\infty$, weil die Grenze des Nenners des letzten Bruchs nach der Voraussetzung verschwindet. Der Fall $\sum\limits_{i=1}^{3} C_i\lambda_i^2 L_i = 0$ ist nicht möglich, weil in einem derartigen Fall folgendes gelten würde

$$(1.20)\qquad \begin{aligned} L_1C_1 + L_2C_2 + L_3C_3 &= 0,\\ \lambda_1 L_1C_1 + \lambda_2 L_2C_2 + \lambda_3 L_3C_3 &= 0,\\ \lambda_1^2 L_1C_1 + \lambda_2^2 L_2C_2 + \lambda_3^2 L_3C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die Determinante des Systems (1,20) der linearen algebraischen Gleichungen ist doch, wie man leicht feststellt, von Null verschieden, weil sie kein Nullfaktor der Vandermondschen Determinante der von einander verschiedenen Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 ist. Das bedeutet, dass das System (1,20) nur eine triviale

Lösung hat. Das steht im Gegensatz zur Voraussetzung, dass die betrachtete Lösung $y(x)$ der Gleichung (a) nichttrivial ist.

Im Fall $K = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ hat die charakteristische Gleichung (1,16) eine negative Wurzel λ_1 und eine positive Doppelwurzel λ_2. Darum wird die Gleichung (a) die allgemeine Lösung der Form:

$$y(x) = [b(x)]^{-1/3}[C_1 \exp(\lambda_1 \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} dt) + (C_2 + C_3 \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} dt) \cdot \exp(\lambda_2 \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} dt)]$$

haben. Die Behauptung des Satzes beweisst man durch ein gleichartiges Verfahren wie im vorigen Fall mit dem Unterschied, dass wir den abschliessenden Gegensatz aus dem System

$$\begin{aligned} L_1C_1 + \quad L_2C_2 + \qquad\qquad\qquad\qquad LL_2C_3 &= 0, \\ \lambda_1 L_1 C_1 + \lambda_2 L_2 C_2 + \qquad\qquad (1 + \lambda_2 L) L_2 C_3 &= 0, \\ \lambda_1^2 L_1 C_1 + \lambda_2^2 L_2 C_2 + [\lambda_2 + \lambda_2(1 + \lambda_2 L)] L_2 C_3 &= 0; \end{aligned}$$

wo $L_i = \lim_{x\to\infty} \exp(\lambda_i \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} dt)$; $i = 1, 2$; $L = \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} dt$, dessen Determinante, wie man leicht feststellt, den Wert $L_1 L_2^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \neq 0$ hat, ableiten.

Bemerkung 7. Die Menge Funktionen $b(x)$, die die Voraussetzungen des Satzes 1,5 zum Beispiel im Intervall $(1; \infty)$ erfüllen, nicht leer ist. Wie man leicht feststellt, gehört zu ihr z. B. die Funktion $b(x) = x^{-4}$.

Satz 1,6. *Es gehöre die Gleichung* (a) *zur Klasse* K *im Intervall* I, *wobei* $K < -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ *ist. Es divergiere* $\int_a^\infty [b(t)]^{1/3} dt$, $b(x)$ *sei begrenzt im Intervall* I *und* $\lim_{x\to\infty} b(x)$ *(wenn es existiert) sei verschieden von Null. Dann:*

1. *Wenn* $b(x) > 0$ *ist, hat die Gleichung* (a) *gerade eine solche Lösung (bis auf die Multiplikationskonstante), für die* $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ *gilt. Wenn ausser den obenangeführten Voraussetzungen auch* $b'(x)$ *und* $b''(x)$ *im Intervall* I *begrenzt sind, ist für diese Lösung* $\lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} y''(x) = 0$.

2. *Wenn* $b(x) < 0$ *ist, existiert ein zweiparametrisches System der gegen Null für* $x \to \infty$ *strebenden Lösungen der Gleichung* (a).

Beweis. Unter den angeführten Voraussetzungen hat die Gleichung (a) die durch die Beziehung (1,19) definierte allgemeine Lösung.

1. Wenn $b(x) > 0$ ist, gilt offenbar $\lim_{x\to\infty} y_1(x) = 0$, wo

$$y_1(x) = [b(x)]^{-1/3} \exp(\lambda_1 \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} dt).$$

Es ist leicht zu beweisen, dass jede Lösung der Form (1,19), wo wenigstens eine der Zahlen C_i, $i = 2, 3$, von Null verschieden ist, eine uneigentliche Grenze für $x \to \infty$ hat. Die Lösung $y_1(x)$ ist darum mit der angeführten Eigenschaft bis auf die lineare Abhängigkeit einzig.

Es seien auch $b'(x)$ und $b''(x)$ im Intervall I begrenzt. Da

$$y_1'(x) = \{\lambda_1 - \tfrac{1}{3}b'(x)[b(x)]^{-4/3}\} \exp\,(\lambda_1 \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3}\mathrm{d}t),$$

$$y_1''(x) = [b(x)]^{-8/3}\{\lambda_1^2[b(x)]^3 - \tfrac{1}{3}\,\lambda_1 b'(x)[b(x)]^{5/3} + \tfrac{4}{9}[b'(x)]^2[b(x)]^{1/3} -$$

$$- \tfrac{1}{3}b''(x)[b(x)]^{4/3}\} \exp\,(\lambda_1 \int_{x_0}^{x}[b(t)]^{1/3}\mathrm{d}t);$$

gilt offenbar $\lim\limits_{x\to\infty} y_1'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} y_1''(x) = 0$, weil $\lim\limits_{x\to\infty} \exp\,(\lambda_1 \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3}\mathrm{d}t) = 0$ ist.

2. Wenn $b(x) < 0$ ist, wird es $\lim\limits_{x\to\infty} \exp\,(\lambda_i \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3}\,\mathrm{d}t) = 0$ für $i = 2,3$ sein, und darum strebt jede Lösung der Form (1,19) der Gleichung (a), für die $C_1 = 0$ ist, gegen Null für $x \to \infty$.

Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen.

Der Hilfssatz 1,3 stellt den asymptotischen Charakter der Lösungen der Gleichung (K) im oszillatorischen Fall dar. Die dort angeführten Eigenschaften kann man auf die Lösungen der zur Klasse K im Intervall I gehörenden Gleichung (a) nur teilweise übertragen, wie

Satz 1,7. beweist. *Es gehöre die Gleichung* (a) *zur Klasse K im Intervall I, wobei* $K > -\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ *ist. Es divergiere* $\int_a^\infty [b(t)]^{1/3}\mathrm{d}t$ *,es sei* $b(x)$ *begrenzt im Intervall I und* $\lim\limits_{x\to\infty} b(x)$ *(wenn es existiert) verschieden von Null. Dann*:

1. *Wenn* $b(x) > 0$ *ist, strebt die Lösung der Gleichung* (a) *ohne Nullstellen gegen Null für* $x \to \infty$ *und jede Lösung der Gleichung* (a), *die wenigstens eine Nullstelle im Intervall I hat, ist unbegrenzt.*

2. *Wenn* $b(x) < 0$ *ist, ist jede nichtoszillatorische Lösung der Gleichung* (a) *im Intervall I unbegrenzt und jede oszillatorische Lösung strebt gegen Null für* $x \to \infty$.

Beweis. Wie wir schon wissen, besitzt die Gleichung (a) in diesem Fall das durch die Beziehung (1,18) definierte Fundamentalsystem.

Wenn $b(x) > 0$ ist, besitzt jede Lösung der Gleichung (a), die die Form C_1y_1, $C_1 \neq 0$ hat, keine Nullstelle. Jede Lösung der Form $C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$, wo wenigstens eine von den Konstanten C_2, C_3 verschieden von Null ist, ist oszillatorisch.

Wenn $b(x) < 0$ ist, ist jede Lösung der Form $C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$, wo $C_1 \neq 0$

ist, nichtoszillatorisch und jede Lösung der angeführten Form, wo $C_1 = 0$ und C_2 bzw. C_3 verschieden von Null ist, ist oszillatorisch.

Die Behauptungen des Satzes erhalten wir aus dem obenerwähnten durch die einfache Anwendung der Sätze über Grenzwerte.

II. DIE LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 4. ORDNUNG

In diesem Kapitel werden wir uns mit den mit der Äquivalenz der Gleichungen vierter Ordnung zusammenhängenden Fragen beschäftigen. Weil die angeführten Resultate in den meisten Fällen durch ähnlichen Betrachtungen, wie im Falle der Gleichungen dritter Ordnung abgeleitet werden, werden wir Beweise der Behauptungen entweder gar nicht oder nur in einer abgekürzten Form anführen.

5. Betrachten wir die Gleichung

$$y^{(4)} + 6p_2(x)y'' + 4p_3(x)y' + p_4(x)y = 0, \tag{2.1}$$

wo $p_k(x) \in C_{4-k}(I_1)$, $k = 2, 3, 4$ ist. Wir wissen schon, dass $\vartheta_3(x) = p_3(x) - \frac{3}{2}p_2'(x)$ ist. Es ist nach [9] $\vartheta_4(x) = p_4(x) - 2p_3'(x) + \frac{6}{5}p_2''(x) - [\frac{9}{2}p_2(x)]^2$. Wenn man $A(x) = \frac{3}{5}p_2(x)$, $b(x) = 2\,\vartheta_3(x)$ und $\omega(x) = \vartheta_4(x)$ bezeichnen wird, kann man die Gleichung (2,1) in die Form

$$\begin{aligned} y^{(4)} + 10A(x)y'' + [10A'(x) + 2b(x)]y' + \\ + \{3[3A^2(x) + A''(x)] + b'(x) + \omega(x)\}y = 0, \end{aligned} \tag{A}$$

wo $A(x) \in C_2(I_1)$, $b(x) \in C_1(I_1)$, $\omega(x) \in C_0(I_1)$, $' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ist, übertragen.

Es seien die Gleichung (A) und die Gleichung

$$\begin{aligned} v^{(4)} + 10A_1(\xi)\ddot{v} + [10\dot{A}_1(\xi) + 2b_1(\xi)]\dot{v} + \\ + \{3[A_1^2(\xi) + \ddot{A}_1(\xi)] + \dot{b}_1(\xi) + \omega_1(\xi)\}v = 0, \end{aligned} \tag{B}$$

wo $A_1(\xi) \in C_2(I_2)$, $b_1(\xi) \in C_1(I_2)$, $\omega_1(\xi) \in C_0(I_2)$, $. = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$ ist, gegeben.

Wieder werden wir als einen Hilfssatz die aus den in der Einleitung erwähnten allgemeinen Resultaten der Arbeit [4] hervorgehende notwendige und hinreichende Bedingung der Äquivalenz der Gleichungen (A) und (B) formulieren.

Hilfssatz 2,1. *$(B)I_{2\xi} \sim (A)I_{1x}\{\xi(x)\}$, wo $I_{2\xi} \subset I_2$, $I_{1x} \subset I_1$ ist, dann und nur dann, wenn die erste Komponente $\xi(x)$ des Trägers der Äquivalenz eine Lösung* *des Systems nichtlinearer Differentialgleichungen*

$$\{\xi, x\} + A_1(\xi)\xi'^2 = A(x), \tag{2,2}$$

$$b_1(\xi)\xi'^3 = b(x), \tag{2,3}$$

$$\omega_1(\xi)\xi'^4 = \omega(x) \tag{2,4}$$

im Intervall I_{1x} ist. Der Träger der Äquivalenz ist dann ein geordnetes Paar der Funktionen $[\xi(x), c\,|\xi'(x)|^{-3/2}]$, wo $c \neq 0$ eine Konstante ist.

Unmittelbar aus dem Hilfssatz leitet man ähnlich wie den Hilfssatz 1,2 leicht den Hilfssatz 2,2 ab:

Hilfssatz 2,2. *Es sei $(B)I_{2\xi} \sim (A)I_{1x}\{\xi(x)\}$ und $b_1(\xi) \in C_r(I_{2\xi})$ $[\omega_1(\xi) \in C_r(I_{2\xi})]$, wo r irgendeine natürliche Zahl ist. Wenn $\xi(x) \in C_{r+1}(I_{1x})$ ist, dann besitzt die Funktion $b(x)[\omega(x)]$ im Intervall I_{1x} die gleiche Struktur der Nullstellen wie die Funktion $b_1(\xi)$ $[\omega_1(\xi)]$ im Intervall $I_{2\xi}$.*

Wenn $r \geqq 5$ und $\xi(x) \notin C_{r+1}(I_{1x})$ ist, dann besitzt die Funktion $b(x)[\omega(x)]$ in I_{1x} die fastgleiche Struktur der Nullstellen wie die Funktion $b_1(\xi)[\omega_1(\xi)]$ in $I_{2\xi}$.

In beiden Fällen gilt für alle $x \in I_{1x}$

$$\operatorname{sgn} \omega_1[\xi(x)] = \operatorname{sgn} \omega(x). \tag{2,5}$$

Bemerkung 8. Die Gleichung (A), für die im Interval $I \subset I_1$ $b(x) \equiv 0$ und $\omega(x) \equiv 0$ ist, nennt man die Gleichung mit Nullinvarianten bzw. die iterierte Gleichung (vgl. [3]) vierter Ordnung im Intervall I. Aus dem Hilfssatz 2,2 folgt es, dass die iterierte Gleichung wieder nur der iterierten Gleichung äquivalent sein kann, und wie die Resultate der Arbeit [7] beweisen, sind zwei iterierte Gleichungen vierter Ordnung auf gewissen Teilen ihrer Intervalle der Definition immer äquivalent. Weil die Gleichungen mit Nullinvarianten in einigen Arbeiten von Z. Hustý und in der Arbeit [12] von V. Šeda behandelt worden sind, werden wir uns mit ihnen im weiteren nicht beschäftigen. Wir werden voraussetzen, dass $b(x) \equiv \omega(x) \equiv 0$ für die Gleichung (A) gleichzeitig in keinem Teil des Intervalls I_1 gilt.

Unter der Voraussetzung, dass $b(x) \neq 0$ für alle $x \in I_1$ ist, kann man in I_1 eine Funktion

$$\Phi(x) = |\omega(x)|^{1/4} \,.\, [b(x)]^{-1/3} \tag{2,6}$$

und, wenn ausserdem $b(x) \in C_2(I_1)$ ist, auch eine Funktion

$$\Psi(x) = \left\{A(x) - \left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]' + \left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]^2\right\} : [b(x)]^{2/3} \tag{2,7}$$

definieren.

Es gilt

Satz 2,1. *Es sei*

$$(B)I_{2\xi} \sim (A)I_{1x}\{\xi(x)\}, \tag{2,8}$$

wo $I_{2\xi} \subset I_2$, $I_{1x} \subset I_1$ *ist; und es gelte* $b(x) \neq 0$ *in* I_{1x}, $b(x) \in C_4(I_{1x})$. *Dann gilt* $b_1(\xi) \neq 0$ *in* $I_{2\xi}$, $b_1(\xi) \in C_4(I_{2\xi})$, (2,5) *und folgende zwei Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die erste Komponente* $\xi(x)$ *des Trägers der Äquivalenz ist im Intervall* I_{1x} *eine beliebige Lösung des Systems der Gleichungen* (2,2),

$$\xi'(x) = [b(x)]^{1/3} \,.\, [b_1(\xi)]^{-1/3}, \tag{2,9}$$

$$\Phi_1[\xi(x)] = \Phi(x); \tag{2,10}$$

wobei $\Phi_1(\xi) = |\omega_1(\xi)|^{1/4} \,.\, [b_1(\xi)]^{-1/3}$ *ist.*

2. *Die erste Komponente* $\xi(x)$ *des Trägers der Äquivalenz ist im Intervall* I_{1x} *eine beliebige Lösung des Systems der Gleichungen* (2,9), (2,10) *und*

$$\Psi_1[\xi(x)] = \Psi(x), \tag{2,11}$$

$$\textit{wo } \Psi_1(\xi) = \left\{A_1(\xi) - \left[\frac{\dot b_1(\xi)}{6b_1(\xi)}\right]^{\cdot} + \left[\frac{\dot b_1(\xi)}{6b_1(\xi)}\right]^2\right\} : [b_1(\xi)]^{2/3} \textit{ ist.}$$

Beweis. Es gelte (2,8) und $b(x) \neq 0$ in I_{1x}. Dann folgt aus dem Hilfssatz 2,2, dass $b_1(\xi) \neq 0$ in $I_{2\xi}$ ist. Wenn $\xi(x)$ die erste Komponente des Trägers der Äquivalenz ist, erfüllt sie in I_{1x} nach dem Hilfssatz 2,1 das System (2,2) — (2,4) und es gilt die Beziehung (2,5) nach dem Hilfssatz 2,2. Unter den angeführten Voraussetzungen ist die Gleichung (2,3) mit der Gleichung (2,9) offenbar äquivalent. Aus der Gleichung (2,4) bzw. (2,3) erhalten wir nach einer einfachen Umformung $|\omega_1(\xi)|^{1/4}\xi' = |\omega(x)|^{1/4}$, bzw. $[b_1(\xi)]^{1/3}\xi' = [b(x)]^{1/3}$. Nach der Division der ersten Gleichheit durch die zweite erhalten wir aus diesen Gleichheiten die Identität (2,10). Das System (2,2) — (2,4) ist also unter den angeführten Voraussetzungen mit dem System (2,2), (2,9), (2,10) äquivalent.

Wenn $b(x) \in C_4(I_{1x})$ ist, folgt aus der Gleichung (2, 3), dass $b_1(\xi) \in C_4(I_{2\xi})$ ist. Es sei jetzt $\xi(x)$ eine beliebige Lösung der Gleichung (2,9) im Intervall I_{1x}. Man zeigt ähnlich, wie im Beweis des Satzes 1,1, dass sie die Gleichung (2,2) dann und nur dann erfüllt, wenn die Beziehung (2,11) gilt.

Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen.

Bemerkung 9. Aus dem Satz 2,1 folgt es, dass die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$, welche durch die Beziehung (2,6), bzw. (2,7) definiert sind bei der Transformation (1,9), die die allgemeinste Punkttransformation, die die Form der Gleichung (A) erhält, ist — weder die Form noch den Wert ändert. Darum werden wir sie die erste bzw. die zweite absolute Invariante der Gleichung (A) nennen.

Aus den Hilfssätzen 2,1; 2,2 und aus dem Satz 2,1 erhalten wir gleich die folgende Behauptung:

Satz 2,1'. *Dann und nur dann, wenn* $b(x) \neq 0$ *in* I_{1x}, $b(x) \in C_4(I_{1x})$, (2,8) *gilt, gilt* $b_1(\xi) \neq 0$ *in* $I_{2\xi}$, $b_1(\xi) \in C_4(I_{2\xi})$ *und* $\xi(x)$ *ist eine beliebige Lösung des Systems der Gleichungen* (2,9), (2,10), (2,11).

Unter der Voraussetzung, dass $\omega(x) \neq 0$ in I_1 ist, definieren wir in I_1 eine Funktion

$$X(x) = [b(x)]^{1/3} |\omega(x)|^{-1/3} \tag{2,12}$$

und wenn ausserdem $\omega(x) \in C_2(I_1)$ ist, definieren wir auch eine Funktion $\Omega(x)$ durch die Beziehung

$$\Omega(x) = \left\{ A(x) - \left[\frac{\omega'(x)}{8\omega(x)}\right]' + \left[\frac{\omega'(x)}{8\omega(x)}\right]^2 \right\} : |\omega(x)|^{1/2}. \tag{2,13}$$

Durch einen analogischen Weg wie der Satz 2,1 lässt sich der

Satz 2,2 *beweisen. Es gelte* (2,8) *und es sei* $\omega(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I_{1x}$, $\omega(x) \in C_4(I_{1x})$. *Dann gilt* $\omega_1(\xi) \neq 0$ *in* $I_{2\xi}$, $\omega_1(\xi) \in C_4(I_{2\xi})$, (2,5) *und folgende zwei Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die erste Komponente* $\xi(x)$ *des Trägers der Äquivalenz ist im Intervall* I_{1x} *eine beliebige Lösung des Systems der Gleichungen* (2,2),

$$\xi'(x) = [\omega(x) : \omega_1(\xi)]^{1/4}, \tag{2,14}$$
$$X_1[\xi(x)] = X(x), \tag{2,15}$$

wo $X_1(\xi) = [b_1(\xi)]^{1/3} \, . \, |\omega_1(\xi)|^{-1/4}$ *ist.*

2. *Die erste Komponente* $\xi(x)$ *des Trägers der Äquivalenz ist im Intervall* I_{1x} *eine beliebige Lösung des Systems der Gleichungen* (2,14), (2,15) *und*

$$\Omega_1[\xi(x)] = \Omega(x), \tag{2,16}$$

$$\textit{wo } \Omega_1(\xi) = \left\{ A_1(\xi) - \left[\frac{\dot{\omega}_1(\xi)}{8\omega_1(\xi)}\right]^{\cdot} + \left[\frac{\dot{\omega}_1(\xi)}{8\omega_1(\xi)}\right]^2 \right\} : |\omega_1(\xi)|^{1/2} \textit{ ist.}$$

Mit Rücksicht auf die Behauptungen des Satzes 2,2 ist es natürlich die durch die Beziehung (2,12) definierte Funktion $X(x)$, bzw. die durch die Beziehung (2,13) definierte Funktion $\Omega(x)$ die dritte bzw. die vierte absolute Invariante der Gleichung (A) zunennen.

Aus den Hilfssätzen 2,1; 2,2 und aus dem Satz 2,2 erhalten wir wieder leicht eine Behauptung:

Satz 2,2'. *Dann und nur dann, wenn* (2,8), $\omega(x) \neq 0$ *in* I_{1x}, $\omega(x) \in C_4(I_{1x})$ *gilt, gilt* $\omega_1(\xi) \neq 0$ *in* $I_{2\xi}$, $\omega_1(\xi) \in C_4(I_{2\xi})$, (2,5) *und* $\xi(x)$ *ist eine beliebige Lösung des Systems* (2,14), (2,15), (2,16).

Bemerkung 10. Es ist offenbar, dass beide Funktionen (2,6) und (2,12) in I_{1x} definiert werden und $\Phi(x)X(x) = 1$ für alle $x \in I_{1x}$ gilt, wenn $b(x)\omega(x) \neq 0$ in I_{1x} ist. Wenn ausserdem sonstige Voraussetzungen des Satzes 2,1 und des Satzes 2,2 ebenfalls gleichzeitig erfüllt werden, lässt es sich beweisen, dass $\xi(x)$ die Gleichung (2,9) und (2,14) gleichzeitig erfüllt und die Identitäten (2,10), (2,15), bzw. (2,11), (2,16) gleichzeitig erfüllt werden.

6. Befassen wir uns jetzt mit den Bedingungen unter welchen die Gleichung (A), die in keinem Teil des Intervalls I_1 selbstadjungiert ist — d. h. wo $b(x) \equiv 0$ in keinem Teil des Intervalls I_1 gilt — auf einem gewissen Intervall $I_{1x} \subset I_1$ zur Klasse der Gleichungen gehört, die eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten der Form

$$(C) \quad v^{(4)} + 10a\ddot{v} + 2b\dot{v} + (9a^2 + \omega)v = 0,$$

wo a, b, ω Konstanten sind, enthält.

Aus dem Hilfssatz 2,2 folgt es, dass $(C)I_{2\xi} \sim (A)I_{1x}$, wo (A) in $I_{1x} \subset I_1$ nicht selbstadjungiert ist, nur dann gilt, wenn $b \neq 0$ und $b(x) \neq 0$ für alle $x \in I_{1x}$ ist. Darum werden wir in diesem und nachstehendem Abschnitt voraussetzen, dass die Konstante b in der Gleichung (C) von Null verschieden ist.

Mit Rücksicht darauf, dass sich aus dem Hilfssatz 2,2 für die fundamentale Invariante $\omega(x)$ folgendes ergibt: wenn $(C)I_{2\xi} \sim (A)I_{1x}$ ist, dann haben wir entweder $\omega \neq 0$ und $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in I_{1x}$ ist, wobei $\operatorname{sgn} \omega(x) = \operatorname{sgn} \omega$ ist oder $\omega = 0$ und $\omega(x) \equiv 0$ in I_{1x} — wird es notwendig sein in weiteren Betrachtungen drei Fälle zu unterscheiden.

Unter der Voraussetzung $b \neq 0$ gilt für die absoluten Invarianten der Gleichung (C) im Intervall $(-\infty; \infty) : \Phi_1(\xi) = |\omega|^{1/4} : b^{1/3}$, $\Psi_1(\xi) = a : b^{2/3}$ und wenn auch $\omega \neq 0$ ist, dann ist $X_1(\xi) = b^{1/3} : |\omega|^{1/4}$, $\Omega_1(\xi) = a : |\omega|^{1/2}$. Es ist offenbar, dass zur Klasse der nichtselbstadjungierten Gleichungen der Form (A), welche eine Gleichung der Form (C) enthält, eine unendliche Zahl Gleichungen mit konstanten Koeffizienten gehört. Es sind alle diejenigen Gleichungen, für die $\Phi_1(\xi) \equiv L(= |\omega|^{1/4} : b^{1/3})$, $\Psi_1(\xi) \equiv M(= a : b^{2/3})$ gilt. Von den erwähnten Betrachtungen, den Behauptungen der Sätze 2,1′, 2,2′ und von der Bemerkung 10 ausgehend, definieren wir drei Kategorien der Klassen von nichtselbstadjungierten Gleichungen vierter Ordnung folgenderweise:

Definition 4. *Wir werden sagen, dass die Gleichung (A) im Intervall $I \subset I_1$*

zur Klasse M gehört, wenn $b(x) \in C_4(I)$, $b(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $\omega(x) \equiv 0$, $\Psi(x) \equiv M$ im Intervall I;

zur Klasse LM der ersten Art gehört, wenn $b(x)$, $\omega(x) \in C_4(I)$, $b(x) \neq 0$, $\omega(x) > 0$ für alle $x \in I$, $\Phi(x) \equiv L$, $\Psi(x) \equiv M$ im Intervall I;

zur Klasse LM der zweiten Art gehört, wenn $b(x)$, $\omega(x) \in C_4(I)$, $b(x) \neq 0$, $\omega(x) < 0$ *für alle* $x \in I$, $\Phi(x) \equiv L$, $\Psi(x) \equiv M$ *im Intervall* I.

Für die Repräsentanten der einzelnen Klassen in der angeführten Ordnung ist es offenbar am geeignetsten diese Gleichungen

$$\begin{array}{ll} (M) & v^{(4)} + 10M\ddot{v} + 2\dot{v} + 9M^2 v = 0, \\ (LM) & v^{(4)} + 10M\ddot{v} + 2\dot{v} + (9M^2 + L^4)v = 0, \\ (\overline{LM}) & v^{(4)} + 10M\ddot{v} + 2\dot{v} + (9M^2 - L^4)v = 0; \end{array}$$

zu wählen.

Aus dem Satz 2,1′ folgt unmittelbar

Satz 2,3. *Die Gleichung* (A) *gehört im Intervall* $I = (a, b)$, $-\infty \leqq a < b \leqq \infty$ *zur Klasse* M [LM *der ersten Art*; LM *der zweiten Art*] *dann und nur dann, wenn* $(M)I_0 \sim (A)I\{\xi(x)\}[(LM)I_0 \sim (A)I\{\xi(x)\}$; $(\overline{LM})I_0 \sim (A)I\{\xi(x)\}]$, *gilt, wobei*

$$(2,17) \qquad \xi(x) = \int_{x_0}^{x} [b(t)]^{1/3} \mathrm{d}t + c, \quad x_0 \in I, \quad t(x) = c_1 |b(x)|^{-1/2},$$

wo $c_1 \neq 0$, c *Konstanten sind*;

$$(2,18) \qquad I_0 \equiv (\alpha, \beta), \quad \text{bzw.} \quad I_0 \equiv (\beta, \alpha),$$

wo $\alpha = \xi(a)$, $\beta = \xi(b)$ *ist.*

Der Satz 2,3 besitzt, ähnlich wie der Satz 1,3, die nachstehenden Folgerungen:

Folgerung 1. *Die Gleichung* (A) *gehört im Intervall* I *zur Klasse* M [LM *der ersten Art, bzw. der zweiten Art*] *dann und nur dann, wenn sie ein Fundamentalsystem der Form* $y_i(x) = t(x)v_i[\xi(x)]$, $i = 1,2,3,4$ *hat, wo* $v_i(\xi)$, $i = 1,2,3,4$; *ein Fundamentalsystem der Lösungen der Gleichung* (M) [(LM), *bzw.* $(\overline{LM})$] *im Intervall* I_0 *bilden, wobei* $\xi(x)$, $t(x)$, *bzw.* I_0 *durch die Beziehungen* (2,17) *bzw.* (2,18) *bestimmt sind.*

Folgerung 2. *Die Gleichung* (A) *gehört im Intervall* I *zur Klasse* M [LM *der ersten Art, bzw. der zweiten Art*] *dann und nur dann, wenn sie eine Form*

$$\begin{aligned} (2,19) \qquad & y^{(4)} + \tfrac{1}{2} f^{-2}(x)[20af^{2\nu}(x) + 5(1 - \nu^2)f'^2(x) + \\ & + 10(\nu - 1)f(x)f''(x)]y'' + f^{-3}(x)[2bf^{3\nu}(x) + \\ & + 20a(\nu - 1)f^{2\nu}(x)f'(x) + 5(1 - \nu)(\nu + 2)f(x)f'(x)f''(x) + \\ & + 5(\nu - 1)f^2(x)f'''(x) + 5(\nu^2 - 1)f'^3(x)]y' + \\ & + \tfrac{1}{16} f^{-4}(x)[16(\omega + 9a^2)f^{4\nu}(x) + 48b(\nu - 1)f^{3\nu}(x)f'(x) + \\ & + 240a(\nu - 1)f^{2\nu+1}(x)f''(x) + 120a(\nu - 1)(\nu - 3)f^{2\nu}(x)f'^2(x) + \\ & + 9(\nu^2 - 1)(\nu^2 - 9)f'^4(x) - 12(\nu - 1)(3\nu^2 - 10\nu - 17) \times \\ & \times f(x)f'^2(x)f''(x) + 12(\nu - 1)(\nu - 7)f^2(x)f''^2(x) - \\ & - 24(\nu - 1)(\nu + 3)f^2(x)f'(x)f'''(x) + 24(\nu - 1)f^3(x)f^{\mathrm{IV}}(x)]y = 0, \end{aligned}$$

wo $b \neq 0$, ν reelle Konstanten sind; $a = Mb^{2/3}$, $\omega = 0[\omega = L^4b^{4/3}$, bzw. $\omega = -L^4b^{4/3}]$; $f(x) \in C_4(I)$, $f(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist, hat.

Beweis. Aus dem Satz 2,1′ folgt, dass $(M)I_0 \sim (A)I[(LM)I_0 \sim (A)I; (\overline{LM})I_0 \sim (A)I]$ dann und nur dann gilt, wenn $\Phi(x) \equiv L$, $\Psi(x) \equiv M$ im Intervall I ist. Wenn man aus den letzten Identitäten durch die Anwendung der Beziehungen (2,6) und (2,7) $A(x)$ und $\omega(x)$ ausdrückt und die Resultate in die Gleichung (A) einsetzt, erhält man

$$y^{(4)} + 10\left\{\left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]' - \left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]^2 + M[b(x)]^{2/3}\right\} y'' +$$

$$+ 10\left\{\left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]'' - 2\left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]' \cdot \left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right] + \frac{2}{3} M[b(x)]^{-1/3}b'(x) + \frac{1}{5} b(x)\right\} y' +$$

$$+\left\{3\left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]''' - 6\left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]'' \cdot \left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right] + 3\left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]'^2 - 18\left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]' \cdot \left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]^2 + \right.$$

$$+ 18M\left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]'[b(x)]^{2/3} + 9\left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]^4 - 18\left[\frac{b'(x)}{6b(x)}\right]^2 \cdot [b(x)]^{2/3} +$$

$$\left. + 2Mb''(x)[b(x)]^{-1/3} - \tfrac{2}{3} Mb'^2(x)[b(x)]^{-4/3} + b'(x) + (9M^2 \pm L^4)[b(x)]^{4/3}\right\}y = 0.$$

Wenn man jetzt in diese Gleichung $b(x) = bf^{3(\nu-1)}(x)$ einsetzt, wo $b \neq 0$, $\nu \neq 1$ reelle Konstanten sind und $f(x)$ eine positive Funktion im Intervall I, $f(x) \in \in C_4(I)$ ist, erhält man die Form (2,19). Für $\nu = 1$ ist die Gleichung (2,19) identisch mit der Gleichung (C), die unter den angeführten Voraussetzungen von Koeffizienten sichtlich zur Klasse $M[LM$ der ersten Art, bzw. der zweiten Art] gehört.

Bemerkung 11. Aus dem Satz 2,3 folgt offenbar, dass jede Gleichung der Form (2,19) durch die Transformation (1,9) wo

$$\xi(x) = \int_{x_0}^{x} f^{\nu-1}(t)\mathrm{d}t; \quad x_0 \in I; \quad t(x) = f^{3(1-\nu)/2}(x);$$

ist, auf die Gleichung (C) mit konstanten Koeffizienten sich übertragen lässt.

Bemerkung 12. Wenn man in der Gleichung (2,19) in einem speziellen Falle $f(x) = x$ setzt, erhält man die Gleichung

$$(2,20) \qquad y^{(4)} + \frac{1}{2x^2}[20ax^{2\nu} + 5(1 - \nu^2)]y'' +$$

$$+ \frac{1}{x^3}[2bx^{3\nu} + 20a(\nu - 1)x^{2\nu} + 5(\nu^2 - 1)]y' +$$

$$+\frac{1}{16x^4}[16(\omega+9a^2)x^{4\nu}+48b(\nu-1)x^{3\nu}+$$
$$+120a(\nu-1)(\nu-3)x^{2\nu}+9(\nu^2-1)(\nu^2-9)]y=0,$$

die sich für $x \in (0, \infty)$ bei $\nu \neq 0$ auf die Gleichung (C) durch die Transformation der Form (1,9), wo $\xi(x) = x^\nu : \nu$, $t(x) = x^{3(1-\nu)/2}$ ist, übertragen lässt. Für $\nu = 0$ ist die Gleichung (2,20) sichtlich eine Eulersche Gleichung mit denselben Dimensionen.

7. In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Untersuchung der oszillatorischen Eigenschaften der Lösungen der Gleichungen vierter Ordnung der Form (A), die im Intervall $I = (a, \infty)$, $a \geqq -\infty$ zur Klasse M [LM der ersten Art, bzw. der zweiten Art] gehören, beschäftigen. Zuerst beachten wir den oszillatorischen Charakter der Gleichungen (M), (LM) und $(\overline{LM})$, welche wir im Intervall (α, ∞), $\alpha \geqq -\infty$, bzw. $(-\infty; \beta)$, $\beta \leqq \infty$ betrachten werden.

Bezeichnen wir: $D_0 = 36\,864\, M^6 + 8\,960\, M^3 - 27$;

$$D_1 = 36\,864\, M^6 + 512\, L^4M^4 + 8\,960\, M^3 - 368\, L^8M^2 + 1\,440\, L^4M +$$
$$+ 16\, L^{12} - 27;$$
$$D_2 = 36\,864\, M^6 + 512\, L^4M^4 + 8\,960\, M^3 - 368\, L^8M^2 - 1\,440\, L^4M -$$
$$- 16\, L^{12} - 27;$$

wo $L \neq 0$, M Konstanten aus Gleichungen (M), (LM), bzw. $(\overline{LM})$ sind.

Es gilt:

Hilfssatz 2,3. *Die Gleichung* (M) [(LM); $(\overline{LM})$] *ist auf einem beliebigen unbeschränkten Intervall*

1) *nichtoszillatorisch dann und nur dann, wenn* $D_0 \geqq 0$, $M < 0$ [$D_1 \geqq 0$, $M < -\frac{1}{4}L^2$; $D_2 \geqq 0$, $M < 0$] *ist;*

2) *oszillatorisch dann und nur dann, wenn entweder* a) $D_0 < 0$ [$D_1 < 0$; $D_2 < 0$] *oder* b) $D_0 = 0$, $M \geqq 0$ [$D_1 = 0$ *und entweder* $M \geqq 0$ *oder* $-\frac{1}{4}L^2 \leqq$ $\leqq M < 0$ *ist*; $D_2 = 0$, $M \geqq 0$] *ist;*

3) *eigentlich oszillatorisch dann und nur dann, wenn* $D_0 > 0$, $M \geqq 0$ [$D_1 > 0$, $M \geqq -\frac{1}{4}L^2$; $D_2 > 0$, $M \geqq 0$] *ist.*

Beweis. Charakteristische Gleichungen der betrachtenden Differentialgleichungen sind reihenweise

$$\lambda^4 + 10M\lambda^2 + 2\lambda + 9M^2 = 0, \tag{2,21}$$
$$\lambda^4 + 10M\lambda^2 + 2\lambda + 9M^2 + L^4 = 0, \tag{2,22}$$
$$\lambda^4 + 10M\lambda^2 + 2\lambda + 9M^2 - L^4 = 0. \tag{2,23}$$

Eine algebraische Gleichung $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ besitzt eine Diskriminante $D = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144prq^2 + 256r^3 - 27q^4$ (vgl. [10]). Von ihren Wurzeln gilt im Falle $D \neq 0$ und $q \neq 0$ nach [10] (Satz 4,10, S. 127):

a) Wenn $D < 0$ ist, hat sie zwei reelle verschiedene Wurzeln und zwei nichtreelle komplexe konjugierte Wurzeln. b) Wenn $D > 0$ ist und $p < 0$, $p^2 - - 4r > 0$ gilt, hat sie vier reelle voneinander verschiedene Wurzeln. c) Wenn $D > 0$ ist und wenigstens eine der Bedingungen $p < 0$, $p^2 - 4r > 0$ nicht erfüllt ist, hat sie zwei Paare nichtreeller komplexer konjugierter Wurzeln. Durch eine leichte obwohl zeitraubende Berechnung stellt man fest, dass in dem Fall, wenn $D = 0$ ist, die obenangeführte algebraische Gleichung eine doppelte reelle Wurzel und zwei nichtreelle komplexe konjugierte Wurzeln hat, wenn entweder $p \geqq 0$ oder $p < 0$, $p^2 - 4r \leqq 0$ ist, und eine doppelte reelle Wurzel und zwei einfache verschiedene reelle Wurzeln, wenn $p < 0$ $p^2 - 4r > 0$ gilt.

Wenn man in die Beziehung für D Koeffizienten der Gleichungen (2,21)—(2,23) reihenweise einsetzt, erhält man: $D = 16D_i$, wo $i = 0,1,2$ ist. Wir wissen, dass für alle drei Gleichungen $p = 10M$ ist und von $p^2 - 4r$ in der angeführten Ordnung gilt: $p^2 - 4r = 64M^2$ [$64M^2 - 4L^4$; $64M^2 + 4L^4$].

Aus dem obenangeführten ist es offenbar, dass, wenn die Voraussetzungen 1) erfüllt werden, die Gleichungen (2,21)—(2,23) alle Wurzeln reell haben und darum sind die Differentialgleichungen nichtoszillatorisch auf jedem unbeschränkten Intervall.

Wenn die Voraussetzungen 2) gelten, haben die Gleichungen (2,21)—(2,23) zwei Wurzeln reell und zwei Wurzeln nichtreell komplex konjugiert, das heisst, dass die Differentialgleichungen in diesem Fall oszillatorisch sind.

Wenn die Voraussetzungen 3) erfüllt werden, haben die Gleichungen (2,21)—(2,23) je zwei Paare der nichtreellen komplexen konjugierten Wurzeln, das heisst, dass die Differentialgleichungen in diesem Fall ein aus oszillatorischen Lösungen bestehendes Fundamentalsystem der Lösungen haben. Man sieht aber leicht, dass alle Lösungen danach oszillatorisch sind, weil die allgemeine Lösung jeder der Gleichungen (M), (LM), $(\overline{LM})$ in diesem Fall sich in der Form $v(\xi) = C_1 e^{\alpha\xi} \sin(\beta\xi + C_2) + C_1 e^{-\alpha\xi} \sin(\delta\xi + C_4)$ ausdrücken lässt, wo C_i, $i = 1,2,3,4$ beliebige Konstanten, $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\beta \neq \delta$ Imaginärteile und $\alpha > 0$ der Absolutwert der reellen Teile der komplexen Wurzeln der betreffenden charakteristischen Gleichung sind.

Weil wir alle möglichen Fälle erwägt haben und die Voraussetzungen 1)—3) sich gegenseitig ausscheiden, wird die Behauptung des Hilfssatzes damit bewiesen.

Aus der Folgerung 1 des Satzes 2,3 und aus dem Hilfssatz 2,3 folgt unmittelbar

Satz 2,4. *Es gehöre die Gleichung* (A) *im Intervall* $I = (a, \infty)$, $a \geqq -\infty$ *zur Klasse* M [LM *der ersten Art, bzw. der zweiten Art*].

Dann ist sie auf diesem Intervall:

1) *nichtoszillatorisch dann und nur dann, wenn entweder* a) $\int\limits_a^\infty [b(t)]^{1/3}\mathrm{d}t$ *konvergiert oder* b) *Bedingungen* 1) *aus dem Hilfssatz* 2,3 *gelten*;

2) *oszillatorisch dann und nur dann, wenn* $\int\limits_a^\infty [b(t)]^{1/3}\mathrm{d}t$ *divergiert und Bedingungen* 2) *aus dem Hilfssatz* 2,3 *gelten*;

3) *eigentlich oszillatorisch dann und nur dann, wenn* $\int\limits_a^\infty [b(t)]^{1/3}\mathrm{d}t$ *divergiert und Bedingungen* 3) *aus dem Hilfssatz* 2,3 *gelten.*

Bemerkung 13. Mit der Betrachtung der asymptotischen Eigenschaften der Lösungen der Gleichungen aus den studierten Klassen beschäftigen wir uns in dieser Arbeit nicht, wegen der grossen Anzahl möglicher Fälle, deren Analyse zu langwierig ist. Wir möchten bloss bemerken, dass für den nichtoszillatorischen Fall eine dem Satze 1,5 analogische Behauptung gilt.

8. Es bleibt uns noch übrig, sich mit der selbstadjungierten Gleichung vierter Ordnung zu beschäftigen. Das ist die Gleichung der Form (A), für die $b(x) \equiv 0$ im Intervall I_1 ist. Sie lässt sich also in der Form

$$(A, \omega) \quad y^{(4)} + 10A(x)y'' + 10A'(x)y' + \{3[A''(x) + 3A^2(x)] + \omega(x)\}y = 0$$

schreiben, wo wir mit Rücksicht auf die Bemerkung 8 von der Fundamentalinvariante $\omega(x)$ voraussetzen werden, dass $\omega(x) \equiv 0$ in keinem Teil des Intervalls I_1 gilt.

Aus dem Hilfssatz 2,2 folgt es, dass die Gleichung (A, ω) unter der angeführten Voraussetzung im Intervall $I \subset I_1$ der Gleichung (C) nur dann in einem Intervall äquivalent sein kann, wenn $b = 0$, $\omega \neq 0$ ist. Betrachten wir also die Gleichung

$$(C) \qquad v^{(4)} + 10a\ddot{v} + (9a^2 + \omega)v = 0,$$

wo $\omega \neq 0$, a Konstanten sind. Für die Gleichung (C) sind offenbar nur die dritte und die vierte absolute Invariante definiert, von denen gilt: $X_1(\xi) \equiv 0$, $\Omega_1(\xi) \equiv N(= a : |\omega|^{1/2})$, wo N eine Konstante ist.

Weil für die Gleichung (A, ω) die Identität $X(x) \equiv 0$ offenbar erfüllt ist, wenn $\omega(x) \neq 0$ ist, scheint es richtig zu sein, die zwei Kategorien der Klassen der selbstadjungierten Gleichungen vierter Ordnung folgenderweise zu definieren:

Definition 5. *Wir werden sagen, dass die Gleichung* (A, ω) *im Intervall* I *zur Klasse* N *der ersten Art* [*der zweiten Art*] *gehört, wenn* $\omega(x) \in C_4(I)$, $\Omega(x) \equiv N$, $\omega(x) > 0$ [$\omega(x) < 0$] *für alle* $x \in I$ *ist.*

Für einen Repräsentant der Klasse N der ersten Art wählen wir die Gleichung

$$(N) \qquad v^{(4)} + 10N\ddot{v} + (9N^2 + 1)v = 0,$$

für einen Repräsentant der Klasse N der zweiten Art wählen wir die Gleichung

$$(\bar{N}) \qquad v^{(4)} + 10N\ddot{v} + (9N^2 - 1)v = 0.$$

Aus dem Satz 2,2′ folgt gleich

Satz 2,5. *Die Gleichung* (A, ω) *gehört zur Klasse* N *der ersten Art* [*der zweiten Art*] *im Intervall* $I = (a, b)$, $-\infty \leqq a < b \leqq \infty$ *dann und nur dann, wenn* $(N)I_0 \sim (A, \omega)I\{\xi(x)\}[(\bar{N})I_0 \sim (A, \omega)I\{\xi(x)\}]$, *gilt, wo*

$$(2,24) \qquad \xi(x) = \int_{x_0}^{x} |\omega(t)|^{1/4}\,\mathrm{d}t + c, \quad x_0 \in I; \quad t(x) = c_1|\omega(x)|^{-3/8}$$

wo $c_1 \neq 0$, c *Konstanten sind*; $I_0 = (\alpha, \beta)$, $\alpha = \xi(a)$, $\beta = \xi(b)$.

Aus dem Satz 2,5 folgen, ähnlich wie aus dem Satz 2,3 diese Folgerungen:

Folgerung 1. *Die Gleichung* (A, ω) *gehört im Intervall* I *zur Klasse* N *der ersten* [*der zweiten*] *Art dann und nur dann, wenn sie im Intervall* I *ein Fundamentalsystem der Form* $y_i(x) = t(x)v_i[\xi(x)]$, $i = 1,2,3,4$ *hat, wo* $v_i(\xi)$, $i = 1,2,3,4$ *ein Fundamentalsystem der Lösungen der Gleichung* $(N)[(\bar{N})]$ *bilden und* $\xi(x)$, $t(x)$ *durch die Beziehungen* (2,24) *bestimmt sind.*

Folgerung 2. *Die Gleichung* (A, ω) *gehört im Intervall* I *zur Klasse* N *der ersten* [*der zweiten*] *Art dann und nur dann, wenn sie die Form* (2,19) *hat, wo* $b = 0$, $\omega \neq 0$, ν *reelle Konstanten sind,* $a = N|\omega|^{1/2}$; $f(x) \in C_4(I)$, $f(x) > 0$ *für alle* $x \in I$ *ist.*

Mit Rücksicht auf die Folgerung 1 des Satzes 2,5 ist es offenbar, dass wir den oszillatorischen Charakter der zur Klasse N der ersten, bzw. der zweiten Art im Intervall $I = (a, \infty)$, $a \geqq -\infty$ gehörenden Gleichungen leicht bestimmen, wenn wir die oszillatorischen Eigenschaften der Lösungen der Gleichungen (N), bzw. $(\bar{N})$ im Intervall (α, ∞), $\alpha \geqq -\infty$ kennen werden. Darum beweisen wir zuerst einen folgenden

Hilfssatz 2,4. *Die Gleichung* (N) *ist im Intervall* (α, ∞) *nichtoszillatorisch dann und nur dann, wenn* $N \leqq -\frac{1}{4}$ *ist und eigentlich oszillatorisch dann und nur dann, wenn* $N > -\frac{1}{4}$ *ist.*

Die Gleichung $(\bar{N})$ *ist im Intervall* (α, ∞) *nichtoszillatorisch dann und nur dann, wenn* $N \leqq -\frac{1}{3}$ *ist*; *oszillatorisch dann und nur dann, wenn* $-\frac{1}{3} < N \leqq \frac{1}{3}$ *ist, und eigentlich oszillatorisch dann und nur dann, wenn* $N > \frac{1}{3}$ *ist.*

Beweis. Behauptungen des Hilfssatzes beweisst man durch die Form einer Diskussion über die Eigenschaften der Wurzeln der charakteristischen Gleichungen

$$\lambda^4 + 10N\lambda^2 + 9N^2 \pm 1 = 0,$$

die beide biquadratisch sind. Durch Substitution $\lambda^2 = \mu$ übertragen wir sie auf die quadratischen Gleichungen

$$\mu^2 + 10N\mu + 9N^2 \pm 1 = 0.$$

Aus den Behauptungen des Hilfssatzes 2,4 und aus der Folgerung 1 des Satzes 2,5 folgt unmittelbar

Satz 2,6. *Wenn die Gleichung* (A, ω) *im Intervall* $I = (a, \infty)$, $a \geqq -\infty$; *zur Klasse N der ersten Art gehört, ist sie in diesem Intervall dann und nur dann:*

1) *nichtoszillatorisch, wenn entweder* a) *ein Integral*

$$\int_a^\infty |\omega(t)|^{1/4} \mathrm{d}t \tag{2,25}$$

konvergiert oder b) *das Integral* (2,25) *divergiert und* $N \leqq -\frac{1}{4}$ *ist;*

2) *eigentlich oszillatorisch, wenn das Integral* (2,25) *divergiert und* $N > -\frac{1}{4}$ *ist.*

Wenn die Gleichung (A, ω) *im Intervall I zur Klasse N der zweiten Art gehört, ist sie in diesem Intervall dann und nur dann:*

1) *nichtoszillatorisch, wenn entweder* a) *das Integral* (2,25) *konvergiert oder* b) *das Integral* (2,25) *divergiert und* $N \leqq -\frac{1}{3}$ *ist;*

2) *oszillatorisch, wenn das Integral* (2,25) *divergiert und* $-\frac{1}{3} < N \leqq \frac{1}{3}$ *ist;*

3) *eigentlich oszillatorisch, wenn das Integral* (2,25) *divergiert und* $N > \frac{1}{3}$ *ist.*

Bemerkung 14. Ein spezieller Fall der selbstadjungierten Gleichung vierter Ordnung ist eine zweigliedrige Gleichung $y^{(4)} + \omega(x)y = 0$, die zur Klasse N der ersten, bzw. der zweiten Art in einem Intervall I offenbar dann und nur dann gehört, wenn $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $\omega(x) \in C_4(I)$ ist und in I eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $\left(\frac{z'}{z}\right)' - \frac{1}{8}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + 8N|z|^{1/2} = 0$ erfüllt.

Am Schluss ist es dem Verfasser eine liebe Pflicht Herrn Prof. Dr. Hustý und Herrn Doz. Dr. Šeda, die das Manuskript gelesen haben, für ihre anregenden Bemerkungen herzlich zu danken.

LITERATUR

[1] Borůvka O., *Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du seconde ordre*, Ann. mat. pura ed appl. *41* (1956), 325—342.

[2] Greguš M., *Über die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung*, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle—Wittenberg. Math.-natur-wiss. Reihe *12* (1963), 265—286.

[3] Hustý Z., *O některých vlastnostech homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu*, Časop. pěstov. mat., *83* (1958), 202—212.

[4] Hustý Z., *Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung, I. Teil*, Czechosl. Math. J. *15* (*90*) (1965), 479—502; *II. Teil*, Czechosl. Math. J. *16* (*91*) (1966), 1—13; *III. Teil*, Czechosl. Math. J. *16* (*91*) (1966), 161—180.

[5] Kamke E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I*, Leipzig 1959.

[6] Лайтох М., *О преобразованиях решений линейных дифференциальных уравнений*, Чехослов. матем. ж. *10* (85) (1960), 258—270.

[7] Moravčík J., *Poznámka k transformácii riešení lineárnych diferenciálnych rovníc*, Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae. Math. *6* (1961), 327—334.

[8] Сансоне Дж., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, *Т. 1*, Moskva 1953.

[9] Schlesinger L., *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen II*, Leipzig 1897.

[10] Schwarz Š., *Základy náuky o riešení rovníc*, Praha 1958.

[11] Šeda V., *Über die Transformation der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung I*, Časop. pěstov. mat. *90* (1965), 385—412; *II*, Časop. pěstov. mat. *92* (1967), 418—433.

[12] Šeda V., *On a class of linear differential equations of order n, $n \geqq 3$*, Časop. pěstov. mat. *92* (1967), 247—259.

Eingegangen am 26. 1. 1967.

Katedra matematiky
a deskriptívnej geometrie
Fakulty
strojno-elektrotechnickej
Vysokej školy dopravnej,
Žilina