Èduard Tigranovič Avanesov; Vladimir Alekseevič Gusev

Об одной проблеме Штейнгауза

Matematický časopis, Vol. 21 (1971), No. 1, 29--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126806

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ШТЕЙНГАУЗА

ЭДУАРД ТИГРАНОВИЧ АВАНЕСОВ и ВЛАДИМИР АЛЕКСЕЕВИЧ ГУСЕВ,
Иваново (СССР)

Пусть N натуральное число, $f(N)$ есть сумма s-х степеней цифр числа N, заданного в системе счисления с основанием g. Как известно [1] (стр. 268), последовательность

$$N,\ f(N),\ ff(N),\ fff(N),\ \ldots \tag{1}$$

периодическая для любого натурального N, то есть для любого N последовательность (1) содержит лишь конечное число различных членов.

Совокупность чисел $N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_k$ где

$$N_2 \quad f(N_1),\ N_3 = f(N_2) = ff(N_1),\ \ \ldots,\ N_1 = f(N_k),$$

назовем k-членным циклом (или периодом длины k в терминологии цитируемых статей) и обозначим:

$$(N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_k).$$

Проблема Штейнгауза заключается в определении для данных s и g всех возможных циклов. Исследование этой проблемы в случае $g - 10$ и s 2, 3, 4 и 5 дано в работах [2]—[6].

Мы приведем решение проблемы Штейнгауза для $g = 10$ и значений показателя степени $s = 6$ и 7.

Известно (см. например [4] или [1] стр. 268), что для всякого фиксированного показателя степени s существует целое $\mu_s > 0$, обладающее следующим свойством: при любом $\mu_1 > \mu_s$ справедливо строгое неравенство

$$\mu_2 = f(\mu_1) < \mu_1.$$

Из этого вытекает, что при определении всех возможных циклов, соответствующих данному значению s, достаточно найти все циклы для натуральных чисел, меньших, чем μ_s.

Несложные подсчеты, аналогичные проведенным в [4], позволили установить следующие значения μ_s в случаях $s = 6$ и 7:

$$\mu_6 = 3 \times 10^6, \quad \mu_7 - 3 \times 10^7.$$

Непосредственное нахождение циклов, использующее найденные выражения μ_6 и μ_7, осуществлено на ЭЦВМ „Урал-2". Числа в фигурных скобках, стоящие в конце строки после записи цикла, означают первые натуральные числа, приводящие к соответствующему циклу.

§ 1. Как установлено нами, при $s = 6$ существует точно 7 циклов, а именно:

два одночленных цикла
(1) —{1}
и (548834), —{344588}
один двучленный цикл
(63804, 313625), —{3468}
один трехчленный цикл
(282595, 824963, 845130), —{9}
один четырехчленный цикл
(93531, 548525, 313179, 650550), —{5556}
один десятичленный цикл
(239459, 1083396, 841700, 383890, 1057187,
513069, 594452, 570947, 786460, 477201) {2}
и один тридцатичленный цикл
(333347, 124661, 97474, 774931, 771565,
313205, 17148, 383891, 1057188, 657564,
246307, 169194, 1113636, 947730, 771564,
301676, 211691, 578164, 446171, 172499,
1184692, 844403, 275161, 179996, 1758629,
973580, 927588, 11189067, 957892, 1458364). —{3}

§ 2. При $s = 7$ найдено ровно 16 циклов, из которых пять одночленных циклов
(1), —{1}
(1741725), —{3558}
(4210818), —{112488}
(9800817), —{17889}
и (9926315), —{1259}
два двухчленных цикла
(2755907, 6586433) {255779}
и (8139850, 9057586), —{22}
один трехчленный цикл
(2767918, 8807272, 5841646), —{124}
один шестичленный цикл
(5345158, 2350099, 9646378, 8282107,
5018104, 2191663), —{7}

один двенадцатичленный цикл
(5141159, 4955606, 5515475, 1152428, 2191919,
14349038, 6917264, 6182897, 10080881, 6291458,
7254695, 6059210), —{11888}

один четырнадцатичленный цикл
(6896889, 16417266, 1679865, 8341662, 2675724,
2021787, 3744495, 5735976, 6868428, 6867840,
5594103, 4957791, 11307534, 922428), —{3}

один двадцатиодночленный цикл
(8543719, 7800361, 3202819, 6882565, 4910554,
4971988, 14600170, 1119865, 7238185, 5098288,
11152678, 3278887, 7940857, 8621716, 3480697,
8002171, 2920825, 6958630, 7520305, 982108,
8977402), —{19}

один двадцатисемичленный цикл
(11695860, 7518120, 2998950, 16524312, 376890,
7985787, 11526027, 1181862, 4474371, 1698426,
7456506, 1556049, 5235540, 253074, 920367,
5888763, 7475247, 2581650, 2533467, 1202490,
4799610, 10685802, 4552494, 4988499, 18575979,
13466427, 1418499), —{18}

один тридцатичленный цикл
(9803005, 6960433, 5363599, 10006498, 7176442,
1959919, 19210003, 4785286, 5392420, 4879921,
12503146, 376762, 2209273, 5609083, 7240369,
5905147, 5779147, 7348108, 5036419, 5159602,
5219284, 6974887, 10920679, 10669546, 5717287,
4646035, 672952, 5964829, 12037663, 1387918), —{3589}

один пятидесятишестичленный цикл
(844431, 2148492, 6913146, 5361414, 393018,
6884496, 9569913, 14709156, 5980959, 16602309,
5345157, 1076490, 5902833, 6962748, 8280048,
6307968, 8265723, 3281199, 11665407, 1477926,
6726504, 1478052, 3015333, 86874, 5314167,
1200177, 1647216, 1399929, 19134192, 9584640,
7270950, 6508308, 4554552, 345396, 5161788,
5375910, 5764950, 6059082, 7238310, 2925198,
11741472, 1679985, 12844695, 7271079, 7253727,
2551197, 5762892, 8061981, 9257211, 5684895,
9429843, 11698173, 7985790, 13388301, 4200867,
3217143) —{11277}

и один девяностодвухчленный цикл

(5643782, 3297455, 5781461, 3295142, 4879922,
12503273, 906299, 14628971, 8000114, 2113538,
2179781, 8527337, 3826865, 4834616, 2691980,
11943155, 4957793, 11309720, 5608829, 9335462,
5161916, 5420969, 9940511, 9660449, 10158578,
5174099, 10483991, 11681663, 2939150, 9646379,
10967924, 10685930, 7240370, 1665785, 3636818,
4758551, 3171455, 998366, 12225149, 4877864,
6154094, 5173799, 11293337, 5613203, 362564,
656696, 5980838, 11154737, 1743785, 3840935,
6979004, 10685801, 4552367, 1278428, 5034488,
4307384, 2957837, 8607647, 4320494, 4834436,
2430614, 315020, 80441, 2129921, 9566324,
5439665, 5517662, 1539794, 10486178, 5314169,
5159603, 5221343, 99140, 9582323, 6962876,
8543600, 2473784, 3779321, 6434558, 2568293,
7240625, 1198244, 6913019, 9848063, 9275780,
8605460, 2751533, 984296, 11959538, 11821529,
6958505, 7394432). —{2}

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sierpiński W., *Elementary theory of numbers*, Warszawa (1964), 268—269.

[2] Porges A., *A set of eight numbers*, Amer. Mathem. Monthly, *52* (1945), 379—382.

[3] Iséki K., *A problem of number theory*, Proc. Japan Acad. *36* (1960), 578—583.

[4] Iséki K., *Necessary results for computation of cyclic parts in Steinhaus problem*, Proc. Japan Acad. *36* (1960), 650—651.

[5] Chikawa K., Iséki K. and Kusakabe T., *On a problem by H. Steinhaus*, Acta Arithm. *7* (1962), 251—252.

[6] Iséki K., Chikawa K., Kusakabe T. and Shibamura K., *Computation of cyclic parts of Steinhaus problem for power 5*, Acta Arithm. *7* (1962), 253—254.

Поступило 7. 1. 1969

Кафедра математики
Ивановского педагогического института
Иваново, СССР