Mária Jakubíková

Über die B-Potenz einer teilweise geordneten Gruppe

Matematický časopis, Vol. 23 (1973), No. 3, 231--239

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126879`

Matematický časopis 23 (1973), No. 3

ÜBER DIE B-POTENZ EINER TEILWEISE GEORDNETEN GRUPPE

MÁRIA JAKUBÍKOVÁ, Košice

§1. Einführung

Es sei B eine verallgemeinerte Boolesche Algebra, und G sei eine teilweise geordnete Gruppe. Der Begriff der B-Potenz $H(B, G)$ der teilweise geordneten Gruppe G wurde von K. Neumann [8] eingeführt. Diese Note besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil (§§ 2, 3) wurden mit Hilfe der B-Potenz hinreichende Bedingungen untersucht, unter denen ein Verband V als Verband aller o-Ideale einer gerichteten Gruppe darstellbar ist. Im zweiten Teil (§ 4) benutzen wir die B-Potenz zur Untersuchung der Existenz von freien vollständigen Verbandsgruppen in der Kategorie $K_v = (\mathscr{G}_v, \mathscr{H}_v)$, wobei $\mathscr{G}_v$ die Klasse aller vollständigen Verbandsgruppen ist, und die Morphismen $\mathscr{H}_v$ vollständige Homomorphismen sind.

Es sei G eine gerichtete Gruppe. Wir bezeichnen mit $J_0(G)$ den Verband aller o-Ideale von G. Neumann [8] hat die folgenden Sätze bewiesen:

(A) ([8], Satz 2.2.) Es sei B eine verallgemeinerte Boolesche Algebra, und $J(B)$ sei der Verband aller Ideale von B. Dann gibt es sowohl kommutative als auch nichtkommutative gerichtete (sogar verbandsgeordnete Vektor-) Gruppen H, so dass die Verbände $J_0(H)$ und $J(B)$ isomorph sind.

(B) ([8], Satz 3.2.) Zu jeder teilweise geordneten Menge N existieren sowohl kommutative als auch nichtkommutative gerichtete Gruppen V, so dass die Verbände $J_0(V)$ und 2^N isomorph sind.

Die gerichtete Gruppe H aus dem Satz (A) wird mit Hilfe der B-Potenz $H(B, G)$ einer gerichteten Gruppe G konstruiert; die Verbandsgruppe V aus dem Satz (B) ist ein gemischtes Produkt ΓG_λ $(\lambda \in \Lambda)$, wobei G_λ o-einfache gerichtete Gruppen sind.

Neumann (loc. cit.) hat die folgende Frage gestellt: „Kann man eine Gruppenkonstruktion für teilweise geordnete Gruppen angeben, die jene der in §2 eingeführten B-Potenz und die des gemischten Produktes als Spezialfälle enthält? Wenn ja, lässt sich diese zum Beweis einer gemeinsamen Verallgemeinerung der Sätze 2.2 und 3.2 für gerichtete Gruppen verwenden und wie lautet diese?"

In §3 werden zwei „kombinierte" Gruppenkonstruktionen beschrieben, deren jede die der B-Potenz und des gemischten Produktes als Spezialfälle enthält.

Es seien G und G' vollständige Verbandsgruppen. Ein Homomorphismus φ von G in G' heisst vollständig, wenn für jede Teilmenge $X \subset G$, für die $\sup X$ in G existiert, die Gleichung φ $(\sup X) = \sup \varphi(X)$ gilt. Eine l-Untergruppe $B \subset G$ nennen wir abgeschlossen in G, wenn für jede Teilmenge $X \subset B$, für die $\sup X$ in G existiert, das Element $\sup X$ zu B gehört. Es sei α eine unendliche Kardinalzahl. Es wird bewiesen (Satz 4.7), dass keine freie vollständige Verbandsgruppe mit α freien Erzeugenden in der Kategorie $K_v = (\mathscr{G}_v, \mathscr{H}_v)$ existiert.

§2. Grundbegriffe und Bezeichnungen

Für die benutzten Begriffe bezüglich teilweise geordneter (= halbgeordneter) Gruppen sei auf die Bücher [2] und [4] verwiesen. Die Gruppenoperation in einer teilweise geordneten Gruppe G wird additiv geschrieben, die Kommutativität dieser Operation wird nicht vorausgesetzt. G ist gerichtet, wenn es für jedes $x \in G$ ein Element $y \in G$ gibt, so dass $0 \leqq y$, $x \leqq y$ ist. Eine Untergruppe H von G heisst konvex, wenn aus $0 \leqq g \leqq h \in H$, $g \in G$ stets $g \in H$ folgt. Ein konvexer gerichteter Normalteiler H von G heisst ein o-Ideal von G. Eine teilweise geordnete Gruppe ist o-einfach, wenn für jedes o-Ideal H von G entweder $H = \{0\}$ oder $H = G$ gilt.

Es sei M eine nichtleere Menge, und für jedes $\lambda \in M$ sei G_λ eine teilweise geordnete Gruppe. Wir bezeichnen mit $H = \Pi G_\lambda$ $(\lambda \in M)$ das vollständige direkte Produkt der Gruppen G_λ mit der Halbordnung $f \leqq g$ genau dann, wenn $f(\lambda) \leqq g(\lambda)$ für jedes $\lambda \in M$ gilt. Im Falle $M = \{1, 2\}$ bezeichnen wir $H = G_1 \times G_2$. Wenn $G_\lambda = G$ für jedes $\lambda \in M$ ist, setzen wir $H = G^M$.

Es sei I eine halbgeordnete Menge und für jedes $i \in I$ sei G_i eine teilweise geordnete Gruppe. Bezeichnen wir mit G_0 das vollständige direkte Produkt der Gruppen G_i und für jedes $f \in G_0$ sei $s(f) = \{i \in I : f(i) \neq 0\}$. Sei H die Menge derjenigen $f \in G_0$, für die jede Kette $K \subset s(f)$ wohlgeordnet ist. Für $f \in H$ sei $s'(f)$ die Menge aller minimalen Elemente von $s(f)$. Wir setzen $f > 0$, wenn $s'(f) \neq \emptyset$ und $f(i) > 0$ für jedes $i \in s'(f)$ gilt. Dann ist H eine halbgeordnete Gruppe; wir bezeichnen $H = \Gamma G_i$ $(i \in I)$. Die halbgeordnete Gruppe H heisst das gemischte Produkt der halbgeordneten Gruppen G_i. Wenn $I = \{\alpha, \beta\}$, $\alpha > \beta$ ist, bezeichnen wir $H = G_\beta \circ G_\alpha$.

Ein distributiver relativ komplementärer Verband mit dem kleinsten Element heisst eine verallgemeinerte Boolesche Algebra. Es sei M die Menge aller dualen Primideale $P \neq B$ einer verallgemeinerten Booleschen Algebra B, card $B > 1$. Ferner sei $B(M)$ die Boolesche Algebra aller Teilmengen der Menge M. Nach dem bekannten Satz von Stone ist der Verband B zu einem Teilverband $B_0(M)$ des Verbandes $B(M)$, $\emptyset \in B_0(M)$ isomorph; wenn B ein Boolescher Verband ist, so ist auch $M \in B_0(M)$ (vgl. [8]). Es sei G eine halbgeordnete Gruppe, $a \in B(M)$. Bezeichnen wir mit $G(a)$ die Menge derjenigen $f \in G^M$, die auf der Menge a konstant und in jedem Punkt $i \in M \setminus \{a\}$ gleich Null sind. Es sei $H(B, G)$ die durch die Menge $\cup\, G(a)(a \in B_0(M))$ erzeugte Untergruppe der Gruppe G^M. Die Halbordnung auf $H(B, G)$ ist durch die Halbordnung von G^M induziert. Die teilweise geordnete Gruppe $H(B, G)$ heisst eine B-Potenz der teilweise geordneten Gruppe G.(Vgl. [8].) Im Falle card $B = 1$ setzen wir $H(B, G) = \{0\}$.

Eine l-Untergruppe des vollständigen direkten Produktes von linear geordneten Gruppen heisst eine verbandsgeordnete Vektorgruppe. Neumann ([8], Lemma 2.3) hat die folgende Behauptung bewiesen:

(*) Ist G eine Verbandsgruppe (linear geordnete Gruppe), so ist $H(B, G)$ eine Verbandsgruppe (verbandsgeordnete Vektorgruppe).

Es seien A, B teilweise geordnete Mengen. Mit A^B bezeichnen wir die Menge aller ordnungserhaltenden Abbildungen der Menge B in die Menge A; für $f, g \in A^B$ setzen wir $f \leqq g$, wenn $f(b) \leqq g(b)$ in jedem Punkt $b \in B$ ist. (Vgl. [2].) Mit 2 bezeichnen wir eine zweielementige Kette. Es sei x_0 ein fest gewähltes Element von A. Wenn $B = \emptyset$ ist, setzen wir $A^B = \{x_0\}$. Das direkte Produkt $A \times B$ ist die Menge aller Paare (a, b) $(a \in A, b \in B)$ mit der koordinatenweise definierten Halbordnung. Wenn $A \cap B = \emptyset$ ist, so sei $C = A \cup B$, wobei $a < b$ für jedes $a \in A$ und jedes $b \in B$ gilt, und in A bzw. B bleibt die ursprüngliche Halbordnung in Kraft. Die halbgeordnete Menge C ist mit $A \oplus B$ bezeichnet; hier kann eine der Mengen A, B auch leer sein.

Es sei X eine teilweise geordnete Menge. Wenn card $X = 1$ gilt, dann setzen wir $X^* = \emptyset$. Falls card $X > 1$ ist, dann bezeichnen wir mit X^* die halbgeordnete Menge, die aus X durch Weglassung des kleinstes Elementes von X entsteht, wenn solches vorhanden ist; sonst setzen wir $X^* = X$. Es sei x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \leqq x_2$. Das Intervall $[x_1, x_2]$ ist die Menge $\{x \in X : x_1 \leqq x \leqq x_2\}$. Wenn zwei teilweise geordneten Mengen X und Y isomorph sind, schreiben wir $X \sim Y$.

§3. Zwei Gruppenkonstruktionen

Von den Konstruktionen des gemischten Produktes und der B-Potenz ausgehend werden in diesem Paragraph zwei „kombinierte" Gruppenkonstruktionen beschrieben.

Es sei N entweder eine leere oder eine teilweise geordnete Menge, und für jedes $\lambda \in N$ sei G_λ eine teilweise geordnete Gruppe. Ferner sei B eine verallgemeinerte Boolesche Algebra, und G sei eine fest gewählte teilweise geordnete Gruppe. Bezeichnen wir

$$F_1(N, B; G_\lambda, G) = H(B, G) \times (\Gamma_{\lambda \in N} G_\lambda),$$

$$F_2(N, B; G_\lambda, G) = H(B, G) \circ (\Gamma_{\lambda \in N} G_\lambda).$$

Es gibt nichtkommutative o-einfache linear geordnete Gruppen ([4], S. 32); sei G_0 eine fest gewählte linear gordnete Gruppe mit den erwähnten Eigenschaften. Ferner sei Z die linear geordnete additive Gruppe aller ganzen Zahlen. Wenn $G = G_0$, $G_\lambda = G_0$ für jedes $\lambda \in N$ bzw. $G = Z$, $G_\lambda = Z$ für jedes $\lambda \in N$ ist, setzen wir

$$F_1(N, B, G_\lambda, G) = F_{11}(N, B), \text{ bzw. } F_1(N, B, G_\lambda, G) = F_{12}(N, B).$$

In analoger Weise definieren wir $F_{21}(N, B)$ und $F_{22}(N, B)$.

Lemma 3.1. *Es seien G_1, G_2 teilweise geordnete Gruppen. Dann sind die Verbände $J_0(G_1 \times G_2)$ und $J_0(G_1) \times J_0(G_2)$ isomorph.*

Beweis. Es sei $H \in J_0(G_1 \times G_2)$. Bezeichnen wir mit H_1 die Projektion der Menge H in G_1; H_1 ist also die Menge aller $x \in G_1$, für die es ein $y \in G_2$ gibt, so dass $(x, y) \in H$. In analoger Weise definieren wir die Menge H_2. Offensichtlich ist $H_i \in J_0(G_i)$ $(i = 1,2)$. Es sei $x_1 \in H_1$, $y_2 \in H_2$. Es gibt Elemente $y_1 \in H_2$, $x_2 \in H_1$ mit $a = (x_1, y_1) \in H$, $b_2 = (x_2, y_2) \in H$. Da H gerichtet ist, gibt es in H Elemente $u = (x_3, y_3)$, $v = (x_4, y_4)$ mit $\{a, b, 0\} \subset [u, v]$. Daraus ergibt sich

$$(x_3, y_3) \leqq (x_1, 0) \leqq (x_4, y_4),$$

$$(x_3, y_3) \leqq (0, y_2) \leqq (x_4, y_4).$$

Aus der Konvexität von H folgt nun, dass die Elemente $(x_1, 0)$ und $(0, y_2)$ zu H gehören. Deshalb ist

$$(x_1, y_2) = (x_1, 0) + (0, y_2) \in H.$$

Damit haben wir $H = H_1 \times H_2$ bewiesen. Aus dem schon bewiesenen folgt, dass die Abbildung

$$\varphi : H \to (H_1, H_2)$$

ein Isomorphismus des Verbandes $J_0(G_1 \times G_2)$ in den Verband $J_0(G_1) \times J_0(G_2)$ ist. Da ferner für jedes $X \in J_0(G_1)$ und jedes $Y \in J_0(G_2)$ die teilweise geordnete Gruppe $X \times Y$ zu $J_0(G_1 \times G_2)$ gehört, ist φ ein Isomorphismus des Verbandes $J_0(G_1 \times G_2)$ auf den Verband $J_0(G_1) \times J_0(G_2)$.

Satz 3.2. *Es sei N entweder eine teilweise geordnete oder eine leere Menge. B sei eine verallgemeinerte Boolesche Algebra. Dann gibt es gerichtete Gruppen H derart, dass $J_0(H)$ isomorph zu $J(B) \times 2^N$ ist. Wenn $N = \emptyset$ ist, so gibt es H mit den erwähnten Eigenschaften, so dass H eine verbandsgeordnete Vektorgruppe ist. Wenn* $\operatorname{card} B > 1$ *oder $N \neq \emptyset$ ist, so gibt es solche sowohl kommutative als auch nichtkommutative Verbandsgruppen H.*

Beweis. Es sei H beliebige der Gruppen F_{11}, F_{12}. Nach [8] (Satz 2.1 und 3.1) gilt

$$J_0(H(B, G)) \sim J(B), \quad J_0(\Gamma_{\lambda \in N} G_\lambda) \sim 2^N.$$

Also ist nach Lemma 3.1

$$J_0(F_{1i}(N, B)) \sim J(B) \times 2^N \quad (i = 1, 2).$$

Im Falle $i = 1$ ($i = 2$) und $\operatorname{card} B > 1$ oder $N \neq \emptyset$ ist $F_{1i}(N, B)$ nichtkommutativ (kommutativ). Wenn $N = \emptyset$, so ist $F_{1i}(N, B)$ eine verbandsgeordnete Vektorgruppe (vgl. (*), §2).

Lemma 3.3. *Es seien A, B gerichtete Gruppen, $G = A \circ B$. Dann gilt $J_0(G) \sim$ $\sim J_0(B) \oplus J_0(A)^*$.*

Beweis. Es sei $H \in J_0(G)$. Bezeichnen wir mit H_1 die Menge aller $x \in A$, für die es ein $y \in B$ gibt, so dass $(x, y) \in H$ ist. In analoger Weise definieren wir H_2. Dann haben wir $H_1 \in J_0(A)$. Wenn $H_1 \neq \{0\}$ gilt, dann gibt es $(x, y) \in H$ mit $x > 0$, also ist $(0, z) \in H$ für jedes $z \in B$. In diesem Fall ist also $H_2 = B$. Wenn $H_1 = \{0\}$, $b_1 \in B, b_2 \in H_2$, $0 \leqq b_1 \leqq b_2$ gilt, so ist $0 \leqq (0, b_1) \leqq (0, b_2) \in$ $\in H$ und daraus ergibt sich $(0, b_1) \in H$, $b_1 \in H_2$; also ist $H_2 \in J_0(B)$. Wir definieren die Abbildung φ von $J_0(G)$ in die Menge $J_0(B) \oplus J_0(A)^*$ folgendermassen: wenn $H \in J_0(B)$ und $H_1 \neq \{0\}$ ist, setzen wir $\varphi(H) = H_1$; sonst setzen wir $\varphi(H) = H_2$. Die Abbildung φ ist monoton. Wenn $P \in J_0(B)$ gilt, bezeichnen wir $\bar{P} = \{(0, y) \in G : y \in P\}$. Wir haben $\bar{P} \in J_0(G)$ und $\varphi(\bar{P}) = P$. Für $Q \in J_0(A)$, $Q \neq \{0\}$ sei $\bar{Q} = \{(x, y) \in G : x \in Q\}$. Dann ist $\bar{Q} \in J_0(G)$ und $\varphi(\bar{Q}) = Q$. Also ist φ eine monotone Abbildung des Verbandes $J_0(G)$ auf den Verband $J_0(B) \oplus$ $\oplus J_0(A)^*$. Man verifiziert leicht, dass auch die inverse Abbildung φ^{-1} monoton ist. Also ist φ ein Isomorphismus.

Satz 3.4. *Es sei N entweder eine teilweise geordnete Menge oder eine leere Menge. B sei eine verallgemeinerte Boolesche Algebra. Dann gibt es eine gerichtete Gruppe H derart, dass $J_0(H)$ isomorph zu $2^N \oplus J_0(B)^*$ ist. Wenn $N =, \emptyset$ so ist H eine vektorgeordnete Verbandsgruppe. Im Falle* $\operatorname{card} B > 1$ *oder $N \neq \emptyset$ existieren sowohl kommutative als auch nichtkommutative Gruppen H mit den erwähnten Eigenschaften.*

Der Beweis folgt aus Lemma 3.3 und aus [8], Satz 2.1 und 3.1 in analoger Weise wie im Beweis des Satzes 3.2.

Im Falle $N = \emptyset$ bzw. $\operatorname{card} B = 1$ reduzieren sich die Behauptungen der Sätze 3.2 und 3.4 auf die Behauptung des Satzes 2.1 [8] bzw. 3.1 [8].

§4. Die vollständigen Homomorsphismen von Verbandsgruppen

Es seien G und G' vollständige Verbandsgruppen. Eine Abbildung f der Menge G in die Menge G' heisst ein vollständiger Homomorphismus, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $f(g_1 + g_2) = f(g_1) + f(g_2)$ für je zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$.

(2) Wenn $A \subset G$ und $\sup A$ existiert in G, so ist $f(\sup A) = \sup f(A)$.

Lemma 4.1. *Sei f ein vollständiger Homomorphismus von G in G'. Wenn $A \subset G$ und* $\inf A$ *existiert in G, so ist* $f(\inf A) = \inf f(A)$.

Beweis. Bezeichnen wir $B = \{-a : a \in A\}$, $\inf A = a$. Dann ist $-a = \sup B$, also nach (2) $f(-a) = \sup f(B)$. Da $f(-a) = -f(a)$, $f(B) = \{-f(a) : a \in A\}$ gilt, bekommen wir $f(a) = \inf f(A)$.

Es sei $\mathscr{G}_v$ die Klasse aller vollständigen Verbandsgruppen, und $\mathscr{H}_v$ sei die Klasse aller vollständigen Homomorphismen $\varphi : G \to G'$ $(G, G' \in \mathscr{G}_v)$. Eine Verbandsgruppe $G_0 \in \mathscr{G}_v$ heisst frei in der Kategorie $K_v = (\mathscr{G}_v; \mathscr{H}_v)$, wenn es eine Teilmenge $\emptyset \neq A \subset G_0$ gibt, so dass (1) für jede abgeschlossen l-Untergruppe G_1 der Verbandsgruppe G_0 mit $A \subset G_1$ stets $G_1 = G_0$ gilt, und (2) für jede Verbandsgruppe $G \in \mathscr{G}_v$ und jede Abbildung φ der Menge A in die Menge G gibt es einen vollständigen Homomorphismus ψ der Verbandsgruppe G_0 in die Verbandsgruppe G, so dass $\varphi(a) = \psi(a)$ für jedes $a \in A$ ist. In solchem Fall sagen wir, dass die vollständige Verbandsgruppe G_0 durch die Menge A frei erzeugt ist, oder dass A eine Menge von freien Erzeugenden der vollständigen Verbandsgruppe G_0 ist. In analoger Weise definiert man die freie Verbandsgruppe in den Kategorien $K = (\mathscr{G}, \mathscr{H})$ bzw. $K_A = (\mathscr{G}_A, \mathscr{H}_A)$, wobei $\mathscr{G}$ (bzw. $\mathscr{G}_A$) die Klasse aller Verbandsgruppen (aller abelschen Verbandsgruppen) ist, und $\mathscr{H}$ ($\mathscr{H}_A$) die Klasse aller Homomorphismen $\varphi : G \to G'$ mit $G, G' \in \mathscr{G}$ (bzw. $G, G' \in \mathscr{G}_A$) bezeichnet (in der Bedingung (1) steht jetzt „für jede l-Untergruppe G_1“ anstatt „für jede abgeschlossene l-Untergruppe G_1“). Da $\mathscr{G}$ und $\mathscr{G}_A$ primitive Klassen von Algebren sind, existieren in K und in K_A für jede Kardinalzahl m freie Verbandsgruppen H_m mit einer Menge von freien Erzeugenden A_m, $\operatorname{card} A_m = m$. Die Eigenschaften der freien Verbandsgruppen und der freien abelschen Verbandsgruppen wurden von Weinberg [11], Conrad [3], Bernau [1] untersucht.

Wir werden zeigen, dass keine freie vollständige Verbandsgruppe G existiert, die durch eine unendliche Teilmenge $A \subset G$ frei erzeugt ist. Ein analoges Ergebnis gilt für die vollständigen Booleschen Verbände: es gibt keinen freien vollständigen Booleschen Verband mit einer unendlichen Menge von freien Erzeugenden (Hales [6]).

Wir brauchen die folgenden Begriffe über die vollständigen Booleschen Verbände.

Es sei B_1 ein Boolescher Teilverband eines vollständiges Booleschen Verbandes B. B_1 heisst abgeschlossen in B, wenn für jede Teilmenge $X \subset B_1$ auch sup X zu B_1 gehört (die Operation sup wird bezüglich B gerechnet). Es sei $A \subset B$. Wenn jeder abgeschlossene Boolesche Teilverband B_1 von B mit $A \subset B_1$ gleich B ist, so sagen wir, dass B durch A vollständig erzeugt ist.

Satz 4.2. (Gaifman—Hales [5], [6]; vgl. auch [7], S. 46 und [9], S. 157—160.) *Es sei m eine unendliche Kardinalzahl. Es gibt eine Boolesche Algebra B mit* card $B \geqq m$ *und eine abzählbare Teilmenge $A \subset B$, so dass B durch A vollständig erzeugt ist.*

Es sei B eine Boolesche Algebra und $G = Z$. Die Symbole M, $B_0(M)$, $G(a)$ und $H(B, Z)$ haben dieselbe Bedeutung wie in §2. Da die Booleschen Verbände B und $B_0(M)$ isomorph sind, werden wir B und $B_0(M)$ identifizieren; wir setzen also $B = B_0(M)$. Das grösste (bzw. kleinste) Element von $B_0(M)$ sei mit $\bar{1}$ bzw. $\bar{0}$ bezeichnet; offenbar ist $\bar{1} = M$, $\bar{0} = \emptyset$. Setzen wir $a = \bar{1}$. Es gibt $f_1 \in G(\bar{1})$ mit $f_1(x) = 1$ für jedes $x \in M$. Eine Menge $A \subset B_0(M)$ heisst disjunkt, wenn $a > \bar{0}$ für jedes $a \in A$ und $a_1 \wedge a_2 = \bar{0}$ für je zwei Elemente $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ ist.

Es sei H_1 die Menge aller Funktionen $f: B_0(M) \to Z$ mit der folgenden Eigenschaft: es gibt eine endliche disjunkte Teilmenge $A(f) \subset B_0(M)$, so dass f auf jeder Menge $a \in A(f)$ konstant ist und $f(x) = 0$ für jedes $x \in B_0(M)$, das nicht zu $\cup a(a \in A(f))$ gehört. Offensichtlich ist H_1 eine l-Untergruppe von G^M und $G(a) \subset H_1$ für jedes $a \in B_0(M)$; also ist $H(B, Z) \subset H_1$. Sei $f \in H_1$, $A(f) \neq \emptyset$. Für jedes $a \in A(f)$ gibt es $f_a \in G(a)$ mit $f(x) = f_a(x)$ für jedes $x \in a$. Dann haben wir $f = \sum f_a(a \in A(f)) \in H(B, Z)$. Daraus folgt $H_1 = H(B, Z)$.

Wir bezeichnen mit 0 das Nullelement der Verbandsgruppe $H(B, Z)$.

Lemma 4.3. *Das Intervall $[0, f_1]$ der Verbandsgruppe $H(B, Z)$ is eine Boolesche Algebra und $[0, f_1] \sim B$.*

Beweis. Es sei $f \in [0, f_1]$, $f \neq 0$. Da $H(B, Z) = H_1$ gilt, gibt es $a_1, \ldots, a_n \in B_0(M)$ und $g_i \in G(a_i)(i = 1, \ldots, n)$, so dass die Menge $\{a_1, \ldots a_n\}$ disjunkt ist und $f = g_1 + \ldots + g_n$. Nach Weglassung der eventuellen Elemente $g_i = 0$ können wir voraussetzen, dass $g_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. Aus $x \in M \setminus \cup a_i$ ergibt sich $g_i(x) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, also $f(x) = 0$. Wenn $x \in \cup a_i$ ist, dann gehört x genau zu einem a_k, also haben wir $f(x) = g_k(x)$ und $g_i(x) = 0$ für jedes $i \neq k$. Aus $0 \leqq f \leqq f_1$ bekommen wir $0 \leqq f(x) \leqq 1$ für jedes $x \in M$. Daher ist $g_i(x) = 1$ für jedes $x \in a_i$ und jedes $i = 1, \ldots, n$. Bezeichnen wir $a = \cup a_i$. Offensichtlich ist $f(x) = 1$ für jedes $x \in a$ und $f(y) = 0$ für jedes $y \in M \setminus a$. Bezeichnen wir $\psi(f) = a$. Dann ist ψ eine monotone

Abbildung des Verbandes $[0, f_1]$ auf $B_0(M)$, und die inverse Abbildung ψ^{-1} ist auch monoton. Daher ist ψ ein Isomorphismus. Daraus folgt, dass $[0, f_1]$ eine Boolesche Algebra ist und $[0, f_1] \sim B$ gilt.

Es sei C eine l-Untergruppe einer Verbandsgruppe G. Wir nennen C schwach abgeschlossen in G, wenn folgendes gilt: ist X eine Teilmenge von C, die in C eine untere und eine obere Schranke besitzt, und existiert $\sup X$ in G, dann gehört das Element $\sup X$ zu C.

Lemma 4.4. *Es sei B eine vollständige Boolesche Algebra, die durch eine Teilmenge $A \subset B$ vollständig erzeugt ist. Bezeichnen wir $A_1 = \psi^{-1}(A)$, wobei die Bedeutung von ψ dieselbe wie in 4.3 ist. Es sei H_0 eine schwach abgeschlossene l-Untergruppe von $H(B, Z)$ mit $A_1 \subset H_0$, $f_1 \in H_0$. Dann ist $[0, f_1] \subset H_0$.*

Beweis. Setzen wir $[0, f_1] \cap H_0 = D$. Offenbar ist $0, f_1 \in D$. Die Menge D ist ein Teilverband von $[0, f_1]$, also ist D distributiv. Es sei $f \in D$, $0 < f < f_1$. Bezeichnen wir $f_1 - f = g$. Weil $f(x) = 0$ oder $f(x) = 1$ für jedes $x \in M$ ist, haben wir $f \wedge g = 0$ und $f \vee g = f_1$. Da H_0 eine l-Untergruppe von $H(B, Z)$ ist, gehört g zu H_0 und da $0 < g < f_1$ gilt, ist $g \in [0, f_1]$; also ist $g \in D$. Daraus folgt, dass D eine Boolesche Algebra ist. Da ψ^{-1} einen Isomorphismus der Booleschen Algebra B auf die Boolesche Algebra $[0, f_1]$ darstellt (vgl. 4.3), ist die Boolesche Algebra $[0, f_1]$ vollständig erzeugt durch die Menge A_1. Offenbar gilt $A_1 \subset D$. Aus der Tatsache, dass H_0 eine schwach abgeschlossene l-Untergruppe von $H(B, Z)$ ist, bekommen wir, dass die Menge D ein abgeschlossener Boolescher Teilverband von $[0, f_1]$ ist. Daraus ergibt sich $[0, f_1] \subset$ $\subset D \subset H_0$.

Bezeichnen wir mit $\bar{H}(B, Z)$ die Dedekindsche Erweiterung von $H(B, Z)$ (vgl. [4]). $\bar{H}(B, Z)$ ist relativ vollständig und wir können voraussetzen, dass $H(B, Z)$ eine l-Untergruppe der l-Gruppe $\bar{H}(B, Z)$ ist. Für jedes $y \in \bar{H}(B, Z)$ gibt es eine Teilmenge $Y \subset H(B, Z)$ mit $y = \sup Y$. Wenn $X \subset H(B, Z)$ und das Element $x_0 \in H(B, Z)$ das Supremum der Menge X in $H(B, Z)$ ist, so ist x_0 auch das Supremum der Menge X in $\bar{H}(B, Z)$.

Es sei nun α eine unendliche Kardinalzahl und $A_0 \subset G_0 \in \mathscr{G}_v$, card $A_0 = \alpha$. Setzen wir voraus, dass die vollständige Verbandsgruppe G_0 durch die Menge A_0 frei erzeugt ist. Es sei card $G_0 = \beta$ und m sei eine Kardinalzahl, $m > \beta$. Es sei B eine Boolesche Algebra, die die Behauptung aus Satz 4.2 befriedigt. A_1 hat dieselbe Bedeutung wie in 4.3. Setzen wir $H = H(B, Z)$, $\bar{H} = \bar{H}(B, Z)$ und untersuchen wir die folgende Abbildung χ der Menge A_0 in $\bar{H}$: Wir wählen eine abzählbare Teilmenge $A_0' \subset A_0$ mit $A_0' \neq A_0$ und ein Element $a_0 \in A_0 \setminus$ $\setminus A_0'$. Es sei φ eine ein-eindeutige Abbildung der Menge A_0' auf die Menge A_1. Wir setzen $\chi(a_0) = f_1$, $\chi(a) = 0$ für jedes $a \in A_0 \setminus A'$, $a \neq a_0$ und $\chi(a) = \varphi(a)$ für jedes $a \in A_0'$. Nach der Voraussetzung gibt es einen vollständigen Homomorphismus μ der Verbandsgruppe G_0 in die Verbandsgruppe $\bar{H}$, so dass $\chi(a) =$ $= \mu(a)$ für jedes $a \in A_0$ ist. Bezeichnen wir $\mu(G_0) = G'$.

Lemma 4.5. *G' ist eine schwach abgeschlossene l-Untergruppe von $\bar{H}$.*

Beweis. Es sei $F \subset G'$, $u \in G'$, $v \in G'$, so dass $u \leqq f \leqq v$ für jedes $f \in F$ ist. Dann gibt es $F_0 \subset G_0$, $u_0 \in G_0$, $v_0 \in G_0$ mit $u_0 \leqq f_0 \leqq v_0$ für jedes $f_0 \in F_0$, so dass $\mu(u_0) = u$, $\mu(v_0) = v$, $\mu(F_0) = F$ ist. Da G_0 vollständig ist, gibt es $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0 \in G_0$ mit $\bar{u}_0 = \inf F_0$, $\bar{v}_0 = \sup F_0$. Ferner ist μ ein vollständiger Homomorphismus; daher ist $\mu(\bar{u}_0) = \inf F$, $\mu(\bar{v}_0) = \sup F$. Damit ist der Beweis erbracht.

Bezeichnen wir $C = G' \cap H(B, Z)$.

Lemma 4.6. *C ist eine schwach abgeschlossene l- Untergruppe von $H(B, Z)$.*

Beweis. Es sei $\emptyset \neq X \subset C$, $u \in C$, $v \in C$, $u \leqq x \leqq v$ für jedes $x \in X$. Setzen wir voraus, dass die Menge X das Supremum in $H(B, Z)$ besitzt. Wir bezeichnen dieses Supremum mit x_0. Dann ist x_0 auch das Supremum der Menge X in $\bar{H}$. Da X in G' beschränkt ist und weil nach 4.5 G' schwach abgeschlossen in $\bar{H}$ ist, gehört x_0 zu C. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es sei I das Intervall $[0, f_1]$ der Verbandsgruppe $H(B, Z)$. Aus der Definition von G' folgt $f_1 \in G'$ und $A_1 \subset G'$, also ist $f_1 \in C$, $A_1 \subset C$. Aus Lemma 4.6 und 4.4 bekommen wir jetzt, dass $I \subset C$ gilt. Also ist $\operatorname{card} G' \geqq \operatorname{card} C \geqq \operatorname{card} I$ und nach 4.3 ist $\operatorname{card} I = \operatorname{card} B \geqq m$. Da G' ein homomorphes Bild von G_0 ist, haben wir $\operatorname{card} G_0 \geqq \operatorname{card} G' \geqq m$, was ein Widerspruch ist.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 4.7. *Es sei α eine unendliche Kardinalzahl. Es gibt keine vollständige Verbandsgruppe G, die durch eine Teilmenge $A \subset G$ mit $\operatorname{card} A = \alpha$ frei erzeugt ist.*

LITERATUR

[1] BERNAU, S.: Free abelian lattice groups. Math. Ann. *180*, 1969, 48—59.

[2] BIRKHOFF, G.: Lattice theory. Providence 1967.

[3] CONRAD, P. F.: Free abelian l-groups and vector lattices. Math. Ann. *190*, 1971, 306—312.

[4] FUCHS, L.: Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва 1965.

[5] GAIFMAN, H.: Two contributions to the theory of Boolean algebras (doctoral dissertation). Univ. of California, Berkeley 1962.

[6] HALES, A. W.: On the nonexistence of free complete Boolean algebras. Fundam. math. *54*, 1964, 45—66.

[7] HALMOS, P.: Lectures on Boolean algebras. Princeton 1963.

[8] NEUMANN, K.: Über Darstellungen von Verbänden mit o-Idealen gerichteter Gruppen. Arch. math. *4*, 1968, 61—73.

[9] SIKORSKI, R.: Boolean algebras. Berlin 1964.

Eingegangen am 22. 3. 1971

Katedra matematiky
Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej
Košice