Matematicko-fyzikálny časopis

František Husárik

# Príspevok k cyklosférickému zobrazeniu vo štvorrozmernom euklidovskom priestore

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 16 (1966), No. 2, 154--165

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126911`

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 2, 1966

# PRÍSPEVOK K CYKLOSFÉRICKÉMU ZOBRAZENIU VO ŠTVORROZMERNOM EUKLIDOVSKOM PRIESTORE

FRANTIŠEK HUSÁRIK, Zvolen

Cyklosférické zobrazenie je zovšeobecnením cyklografického zobrazenia na štvorrozmerný euklidovský priestor $E_4$. Myšlienku rozšírenia cyklografického zobrazenia na $n$-rozmerný priestor použili v poslednej dobe niektorí autori na riešenie zovšeobecneného Apolloniovho problému: Zostrojiť nadplochy guľové v $E_n$, ktoré sa dotýkajú $n + 1$ daných guľových nadplôch. Metódou zovšeobecnenia cyklografického zobrazenia na viacrozmerný priestor môžeme riešiť celý rad ďalších úloh o nadplochách guľových.

Uvažujme štvorrozmerný reálny euklidovský priestor $E_4$, ktorý budeme nazývať operačným priestorom. Nech $[0; x_1, x_2, x_3, x_4]$ je pravouhlá súradnicová sústava v operačnom priestore $E_4$. Nech $y_1, y_2, y_3, y_4$ sú nehomogénne súradnice bodu $Y$ v operačnom priestore $E_4$. V cyklosférickom zobrazení môžeme zobraziť body operačného priestoru $E_4$ na priemetnú nadrovinu $E_3^{\prime\prime} = [0; x_1, x_2, x_3]$ tak, že ku každému bodu $Y(y_1, y_2, y_3, y_4) \in E_4$, ktorý neleží v priemetnej nadrovine $E_3^{\prime\prime}$ (teda $y_4 \neq 0$), priradíme v priemetnej nadrovine $E_3^{\prime\prime}$ orientovanú plochu guľovú — cyklosféru $C_Y$. Nositeľkou cyklosféry $C_Y$ je plocha guľová $G_Y$ o rovnici

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - y_n)^2 = y_4^2 .$$

Obrátene, ku kladnej cyklosfére $C_Y \in E_3^{\prime\prime}$ priradíme v $E_4$ bod $Y(y_1, y_2, y_3, y_4)$, kde $y_4 > 0$, a k zápornej cyklosfére $C_Y \in E_3^{\prime\prime}$ priradíme v $E_4$ bod $Y^*(y_1, y_2, y_3, -y_4)$, kde $y_4 > 0$. Bodu $P(p_1, p_2, p_3, 0)$ priemetnej nadroviny $E_3^{\prime\prime}$ priradíme ten istý bod $P$. Plochu guľovú $G_Y$ budeme orientovať tak, že spôsobom uvedeným v [4] orientujeme niektorú z kružníc, ktorá tvorí zdanlivý obrys plochy guľovej v priemetnej nadrovine $E_3^{\prime\prime}$. Napr. v Mongeovej projekcii v $E_3^{\prime\prime}$ to bude kružnica, ktorá tvorí obrys plochy guľovej $G_Y$ v druhej priemetni.

Majme v operačnom priestore $E_4$ priamku $p$, ktorej parametrické rovnice sú:

$$y_i = a_i + \lambda m_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{1}$$

Budeme predpokladať, že pre smerové parametre priamky (1) je

$$m_4^2 - \sum_{i=1}^{3} m_i^2 \neq 0.$$

Množinu cyklosfér, ktoré odpovedajú všetkým bodom priamky $p$, okrem jej stopníka do priemetnej nadroviny $E_3^n$, budeme nazývať lineárnym cyklosférickým radom a nositeľkou jeho cyklosfér je v priemetnej nadrovine $E_3^n$ jednoparametrická sústava plôch guľových s rovnicou

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - a_n - \lambda m_n)^2 = (a_4 + \lambda m_4)^2. \tag{2}$$

Parciálnym derivovaním podľa parametru $\lambda$ zo vzťahu (2) dostaneme:

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - a_n - \lambda m_n) m_n + (a_4 + \lambda m_4) m_4 = 0. \tag{2'}$$

Po vylúčení parametru $\lambda$ z rovníc (2) a (2') je:

$$\sum_{n=1}^{3} \left( x_n - a_n + \frac{\sum_{j=1}^{3} (x_j - a_j) m_j + a_4 m_4}{m_4^2 - \sum_{j=1}^{3} m_j^2} m_n \right)^2 = \left( a_4 - \frac{\sum_{j=1}^{3} (x_j - a_j) m_j + a_4 m_4}{m_4^2 - \sum_{j=1}^{3} m_j^2} m_4 \right)^2. \tag{3}$$

Rovnica (3) je v priemetnej nadrovine $E_3^n$ rovnicou obalovej plochy lineárneho cyklosférického radu prislúchajúceho k priamke (1).

Ku každému bodu $Y \in E_4$ môžeme v cyklosférickom zobrazení priradiť guľovo-kužeľovú rotačnú nadkvadriku ($GK_Y$ nadkvadriku), ktorej rovnica je:

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - y_n)^2 = (x_4 - y_4)^2.$$

Je to rotačná kužeľová nadkvadrika s vrcholom v bode $Y$ a plocha guľová $G_Y$, ktorá je nositeľkou cyklosféry prislúchajúcej k bodu $Y$, je jej stopnou guľovou plochou do priemetnej nadroviny $E_3^n$.

Potom všetkým bodom priamky (1) bude priradená jednoparametrická sústava guľovo-kužeľových nadkvadrík s rovnicou

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - a_n - \lambda m_n)^2 = (x_4 - a_4 - \lambda m_4)^2. \tag{4}$$

Parciálnym derivovaním podľa parametru $\lambda$ zo vzťahu (4) dostaneme:

$$\sum_{n=1}^{3}(x_n - a_n - \lambda m_n)m_n = (x_4 - a_4 - \lambda m_4)m_4. \tag{4'}$$

Po vylúčení parametru $\lambda$ z rovníc (4) a (4′) je:

$$\sum_{n=1}^{3}\left(x_n - a_n + \frac{\sum_{j=1}^{3}(x_j - a_j)m_j - (x_4 - a_4)m_4}{m_4^2 - \sum_{j=1}^{3} m_j^2}\, m_n\right)^2 = \left(x_4 - a_4 + \frac{\sum_{j=1}^{3}(x_j - a_j)m_j - (x_4 - a_4)m_4}{m_4^2 - \sum_{j=1}^{3} m_j^2}\, m_4\right)^2. \tag{5}$$

Rovnica (5) je v $E_4$ rovnicou obalovej nadplochy jednoparametrickej sústavy guľovo-kužeľových nadkvadrík priradených bodom priamky (1).

V operačnom priestore $E_4$ je vždy možné urobiť takú ortogonálnu transformáciu súradnicovej sústavy(1), že priamka $p$ určená rovnicami (1) bude mať v novej súradnicovej sústave v $E_4$ parametrické rovnice

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = \lambda v_3, \quad y_4 = \lambda v_4. \tag{6}$$

Budeme predpokladať, že pre smerové parametre priamky (6) platí: $v_4^2 - v_3^2 \neq 0$ a $v_3 \neq 0$.

Rovnica obalovej plochy lineárneho cyklosférického radu prislúchajúceho k priamke (6) v novej súradnicovej sústave v priemetnej nadrovine $E_3''$, podľa (3) je:

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{v_4^2}{v_4^2 - v_3^2}\, x_3^2 = 0. \tag{7}$$

Pokiaľ je $v_4 \neq 0$, je pre túto kvadratickú plochu diskriminant $A = 0$ a $A_{44} \neq 0$ a obalovou plochou lineárneho cyklosférického radu je rotačná plocha kužeľová. Táto kužeľová plocha je reálna, keď $v_4^2 < v_3^2$. Keď $v_4^2 > v_3^2$, je obalová plocha lineárneho cyklosférického radu imaginárna. Vrchol obalovej kužeľovej plochy je stopníkom priamky (6) do priemetnej nadroviny $E_3''$.

Ak $v_4 = 0$, je $A = 0$ a $A_{44} = 0$ a obalová plocha lineárneho cyklosférického radu je rotačná plocha valcová.

Obrátene, každá rotačná kužeľová alebo valcová plocha v priemetnej nad-

(1) Pri tejto transformácii môžeme zaistiť, že nová priemetná nadrovina bude totožná s pôvodnou, alebo bude s ňou totálne rovnobežná.

rovine $E_3''$ môže byť obalovou plochou dvoch lineárnych cyklosférických radov. Jeden z týchto radov určuje v $E_4$ priamku $p$ a druhý priamku $p^*$. Priamky $p$ a $p^*$ sú súmerne sdružené podľa priemetnej nadroviny $E_3''$, čo vidieť z rovníc (6) a (7). Túto dvojznačnosť odstránime tak, že orientujeme plochu guľovú, ktorú ľubovoľne vpíšeme do danej kužeľovej alebo valcovej plochy.

Rovnica obalovej nadplochy jednoparametrickej sústavy guľovo-kužeľových nadkvadrík priradených bodom priamky (6) v novej súradnicovej sústave v $E_4$, podľa (5) je:

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{v_4^2}{v_4^2 - v_3^2} x_3^2 - \frac{2v_3v_4}{v_4^2 - v_3^2} x_3x_4 + \frac{v_3^2}{v_4^2 - v_3^2} x_4^2 = 0. \tag{8}$$

Je to kužeľová nadkvadrika 2-ho druhu, ako je uvedené v literatúre [3], a priamka (6) je jej stredovou osou. Jej stopnou kvadrikou do priemetnej nadroviny $E_3''$ je rotačná kužeľová plocha o rovnici (7). Táto kužeľová nadkvadrika je reálna pokiaľ stopná kužeľová plocha je reálna, teda keď $v_4^2 < v_3^2$. Keď $v_4^2 > v_3^2$, je imaginárna a degeneruje sa v stredovú os (6). Je vytvorená sústavou reálnych alebo imaginárnych rovín, ktoré prechádzajú stredovou osou (6). Stopy týchto rovín do priemetnej nadroviny $E_3''$ vytvárajú stopnú rotačnú kužeľovú plochu (7).

Podľa predpokladu je $v_4^2 - v_3^2 \neq 0$ a $v_3 \neq 0$. Vtedy z rovníc (6) ihneď vidieť, že priamka $p$ nie je kolmá na priemetnú nadrovinu $E_3''$ a má od priemetnej nadroviny $E_3''$ odchýlku $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4}$.

Z uvedeného vyplýva:

**Veta 1.** *Ku každej priamke $p \in E_4$, ktorá má od priemetnej nadroviny $E_3''$ odchýlku $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4}$ a nie je na $E_3''$ kolmá, môžeme v cyklosférickom zobrazení v $E_4$ priradiť kuželovú nadkvadriku 2-ho druhu. Priamka $p$ je stredovou osou tejto nadkvadriky a stopnou kvadrikou do priemetnej nadroviny $E_3''$ je rotačná kuželová plocha, ktorá je obalovou plochou lineárneho cyklosférického radu prislúchajúceho k priamke $p$.*

Nech sa bod $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$ nachádza na nadkvadrike (8). V ďalšom budeme predpokladať, že bod $B$ nie je incidentný s priamkou (6), to znamená, že nemôže byť $b_1 = b_2 = 0$ a tiež budeme predpokladať, že $b_4 \neq 0$. Hľadajme guľovo-kužeľovú nadkvadriku $GK_L$, ktorá je incidentná s bodom $B$ a patrí do jednoparametrickej sústavy guľovo-kužeľových nadkvadrík priradených bodom priamky (6). Pre túto nadkvadriku podľa vzťahu (4) platí:

$$b_1^2 + b_2^2 + (b_3 - \lambda v_3)^2 - (b_4 - \lambda v_4)^2 = 0. \tag{9}$$

Rovnica (9) je kvadratická rovnica pre parameter $\lambda$. V dôsledku predpokladanej vlastnosti bodu $B$ má táto kvadratická rovnica dvojnásobný koreň

$$\lambda_{1,2} = \lambda = \frac{b_3v_3 - b_4v_4}{v_3^2 - v_4^2}.$$

Nadkvadrika $GK_L$ určuje v $E_4$ bod $L$, ktorý sa zrejme nachádza na priamke (6). Z vlastností cyklosférického zobrazenia uvedených v [1] je známe, že sa plocha guľová $G_B$, ktorá je nositeľkou cyklosféry $C_B$, bude stopnej guľovej plochy $G_L$ nadkvadriky $GK_L$ dotýkať, a to práve v stopníku $P$ priamky $t \equiv (L, B)$.

Parametrické rovnice priamky $t$ sú:

$$x_i = b_i + \lambda b_i \qquad (i = 1, 2),$$

$$x_j = b_j + \lambda \left( b_j - \frac{b_3v_3 - b_4v_4}{v_3^2 - v_4^2} v_j \right) \qquad (j = 3, 4).$$

Potom pre súradnice bodu $P$ dostaneme:

(10)
$$p_i = \frac{b_iv_4(b_4v_4 - b_3v_3)}{v_3(b_4v_3 - b_3v_4)} \qquad (i = 1, 2),$$

$$p_3 = \frac{b_3v_3 - b_4v_4}{v_3},$$

$$p_4 = 0.$$

Bod $P$ sa tiež nachádza na rotačnej kužeľovej ploche, ktorá je stopnou plochou kužeľovej nadkvadriky (8) do priemetnej nadroviny $E_3''$. Ukážeme, že v bode $P$ majú plocha guľová $G_B$ a stopná rotačná kužeľová plocha nadkvadriky (8) spoločnú dotykovú rovinu, čo znamená, že plocha guľová $G_B$ a stopná rotačná kužeľová plocha sa v bode $P$ dotýkajú.

Rovnica plochy guľovej je:

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - b_n)^2 = b_4^2.$$

Dotyková rovina k ploche guľovej v bode $P$ má rovnicu

$$\sum_{n=1}^{3} x_n(p_n - b_n) - \sum_{n=1}^{3} b_n p_n + \sum_{n=1}^{3} b_n^2 = b_4^2.$$

Keď do tejto rovnice dosadíme vzťahy (10) a zoberieme do ohľadu predpokladanú vlastnosť bodu $B$, po dlhšej úprave dostaneme rovnicu dotykovej roviny k ploche guľovej v bode $P$ vo tvare

(11)
$$\frac{v_4^2 - v_3^2}{b_4v_3 - b_3v_4} \sum_{n=1}^{2} b_n x_n - v_4 x_3 = 0.$$

Podobne, rovnica dotykovej roviny k stopnej rotačnej kužeľovej ploche nadkvadriky (8) v bode $P$ je:

$$\sum_{n=1}^{2} x_n p_n + \frac{v_4^2}{v_3^2 - v_3^2} x_3 p_3 = 0 .$$

Keď do tejto rovnice dosadíme vzťahy (10), po úprave dostaneme rovnicu dotykovej roviny vo tvare

$$\frac{v_4^2 - v_3^2}{b_4 v_3 - b_3 v_4} \sum_{n=1}^{2} b_n x_n - v_4 x_3 = 0 ,$$

čo je tá istá rovnica ako rovnica (11).

Týmto je dokázaná

**Veta 2.** *Nech sa bod $B$ nachádza na kužeľovej nadkvadrike $\Gamma$ priradenej v cyklosférickom zobrazení ľubovoľnej priamke $p$ podľa vety 1, pričom bod $B$ nie je bodom priemetnej nadroviny $E_3^\mu$ a nie je incidentný so stredovou osou nadkvadriky $\Gamma$. Potom guľová plocha $G_B$, ktorá je nositeľkou cyklosféry $C_B$ prislúchajúcej bodu $B$ a rotačná kužeľová plocha $K$, ktorá je stopnou plochou kužeľovej nadkvadriky $\Gamma$ do priemetnej nadroviny $E_3^\mu$, navzájom sa dotýkajú.*

Majme rovnicu

$$\sum_{n=1}^{4} A_n x_n + A_5 = 0, \tag{12}$$

kde aspoň jedno $A_n$ ($n = 1, 2, 3$) je rôzne od nuly.

Rovnica (12) určuje v operačnom priestore $E_4$ nadrovinu, pričom $x_n$ ($n = 1, 2, 3, 4$) sú nehomogénne súradnice bodu ležiaceho v nadrovine. Ak $x_n$ ($n = 1, 2, 3, 4$) budeme považovať za súradnice cyklosféry, rovnica (12) bude vyjadrovať množinu cyklosfér, ktoré sú priradené všetkým bodom nadroviny. Prienikom nadroviny (12) s priemetnou nadrovinou $E_3^\mu$ je rovina, ktorú budeme nazývať stopnou rovinou nadroviny (12). Rovnica tejto stopnej roviny v priemetnej nadrovine $E_3^\mu$ je:

$$\sum_{n=1}^{3} A_n x_n + A_5 = 0. \tag{13}$$

Množinu cyklosfér, ktorých súradnice vyhovujú rovnici (12), budeme nazývať lineárnym cyklosférickým nadpoľom a stopnú rovinu o rovnici (13) budeme nazývať osovou rovinou lineárneho cyklosférického nadpoľa.

Pre odchýlku nadroviny (12) od priemetnej nadroviny $E_3^\mu$ je:

$$\cos\alpha = \frac{A_4}{\sqrt{\sum_{n=1}^{4} A_n^2}}, \quad \text{kde} \quad 0 < \alpha < \pi .$$

Keď z tohoto vzťahu vylúčime $A_4$ dostaneme:

$$A_1 = \operatorname{cotg} \alpha \sqrt{\sum_{n=1}^{3} A_n^2}. \tag{15}$$

**Definícia 1.** *Uhlom, pod ktorým rovina pretína plochu guľovú, budeme rozumieť uhol $\varphi$, ktorý je definovaný vzťahom $v = r \cdot \cos \varphi$, kde $v \geq 0$ je vzdialenosť stredu guľovej plochy od roviny a $r > 0$ je polomer plochy guľovej. Keď $r \geq v$ je $0 \leq \cos \varphi \leq 1$, vtedy je $\varphi$ reálne a bude z intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$. Keď $v > r$ je $\cos \varphi > 1$ a uhol $\varphi$ je imaginárny, t. j. $\cos \varphi = \cosh \psi > 1$, kde $\varphi = i\psi$ a $\psi$ bude z intervalu $(0, \infty)$.*

Pre vzdialenosť stredu cyklosféry lineárneho cyklosférického nadpoľa (12) od osovej roviny (13) dostávame:

$$v = \frac{\left| \sum_{n=1}^{3} A_n x_n + A_5 \right|}{\sqrt{\sum_{n=1}^{3} A_n^2}},$$

kde $x_n$ ($n = 1, 2, 3$) sú súradnice stredu cyklosféry. Potom podľa definície 1 je:

$$\cos \varphi = \frac{\left| \sum_{n=1}^{3} A_n x_n + A_5 \right|}{|x_4| \sqrt{\sum_{n=1}^{3} A_n^2}}.$$

Ak uvážime, že z rovnice (12) je:

$$x_4 = -\frac{\sum_{n=1}^{3} A_n x_n + A_5}{A_4},$$

potom

$$\cos \varphi = \frac{|A_4|}{\sqrt{\sum_{n=1}^{3} A_n^2}}. \tag{15}$$

Porovnaním vzťahov (14) a (15) dostávame:

$$\cos \varphi = |\operatorname{cotg} \alpha|.$$

Platí teda:

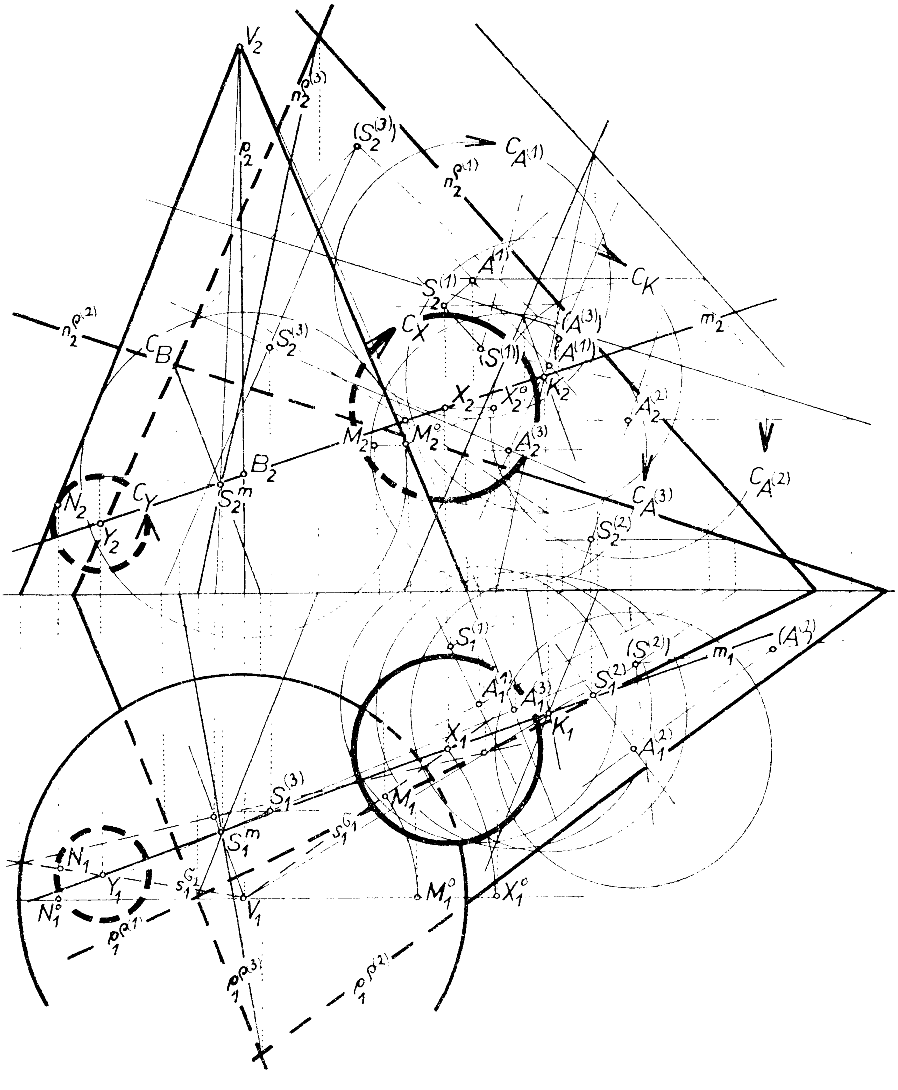
**Veta 3.** *Nech nadrovina priestoru $E_4$ je určená lineárnym cyklosférickým nadpoľom. Všetky cyklosféry lineárneho cyklosférického nadpoľa pretínajú jeho* *osovú rovinu pod tým istým uhlom $\varphi$, ktorého kosínus je konštantný a rovný absolútnej hodnote kotangensu odchýlky nadroviny od priemetnej nadroviny.*

Tieto vlastnosti môžeme použiť na konštruktívne riešenie niektorých úloh o plochách guľových v trojrozmernom euklidovskom priestore.

**Úloha.** *Dané sú tri roviny $\varrho^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$, ktoré nemajú spoločnú priamku a žiadne dve $\varrho^{(i)}$ nie sú rovnobežné. Daná je ďalej rotačná kužeľová plocha $K$. Treba zostrojiť plochy guľové, ktoré roviny $\varrho^{(i)}$ pretínajú pod uhlami $\varphi^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ a dotýkajú sa rotačnej kužeľovej plochy $K$.*

Rozbor. Priestor, v ktorom sa nachádzajú roviny $\varrho^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ a rotačná kužeľová plocha $K$, zvoľme za priemetnú nadrovinu $E_3^p$ vo štvorrozmernom operačnom priestore $E_4$. Rotačnú kužeľovú plochu $K$ v $E_3^p$ môžeme považovať za obalovú plochu lineárneho cyklosférického radu. Tento lineárny cyklosférický rad určíme tak, že orientujeme plochu guľovú, ktorú ľubovoľne vpíšeme do rotačnej kužeľovej plochy $K$. Uvažovaný cyklosférický rad určí v $E_4$ priamku $p$. K priamke $p$ priradíme podľa vety 1 kužeľovú nadkvadriku $\Gamma$. Ku každej z rovín $\varrho^{(i)}$ priradíme v $E_4$ nadrovinu $E_3^{(i)}$, kde rovina $\varrho^{(i)}$ bude stopnou rovinou nadroviny $E_3^{(i)}$ do $E_3^p$ a $E_3^{(i)}$ má od priemetnej nadroviny $E_3^p$ odchýlku $\alpha^{(i)}$, pre ktorú platí: $|\cotg \alpha^{(i)}| = \cos \varphi^{(i)}$, pričom sa rozhodneme pre jeden z uhlov $\alpha^{(i)}\left(\text{menší ako } \frac{\pi}{2}, \text{ alebo väčší ako } \frac{\pi}{2}\right)$. Pretože $\varrho^{(i)}$ nemajú spoločnú priamku a žiadne dve $\varrho^{(i)}$ nie sú rovnobežné, majú nadroviny $E_3^{(i)}$ spoločnú priamku $m$, ktorá je vždy vlastná. Cyklosféry prislúchajúce bodom priamky $m$ sú podľa vety 3 incidentné s guľovými plochami, ktoré roviny $\varrho^{(i)}$ pretínajú pod danými uhlami $\varphi^{(i)}$. Keď zostrojíme priesečníky $X$ a $Y$ priamky $m$ s kužeľovou nadkvadrikou $\Gamma$, potom podľa vety 2 cyklosféry $C_X$ a $C_Y$ priradené bodom $X$ a $Y$ určujú hľadané plochy guľové.

Konštrukcia. Za zobrazovaciu metódu vo štvorrozmernom operačnom priestore $E_4$ zvolíme kótovano-Mongeovu projekciu. Je to v podstate Klímova zobrazovacia metóda [4] s tým rozdielom, že súradnicu $a_4$ bodu $A$ pripisujeme do zátvorky ako kótu k priemetu bodu $A$ do priemetnej nadroviny $E_3^p$. Na obr. 1 sú roviny $\varrho^{(i)}$ určené svojimi stopami. Zvoľme $\cos \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}$, $\cos \varphi^{(2)} = 1$, $\cos \varphi^{(3)} = 2$. Aby sme zostrojili napr. nadrovinu $E_3^{(1)}$, ktorá má od $E_3^p$ odchýlku $\alpha^{(1)}$, pričom platí: $|\cotg \alpha^{(1)}| = \frac{1}{2}$ a rovina $\varrho^{(1)}$ je stopnou rovinou $E_3^{(1)}$, zvolíme v $\varrho^{(1)}$ ľubovoľný bod $S^{(1)}$. Bodom $S^{(1)}$ vedieme v nadrovine $E_3^p$ na rovinu $\varrho^{(1)}$ kolmú priamku $o^{(1)}$. Priamka $o^{(1)}$ je kolmý priemet spádovej priamky nadroviny $E_3^{(1)}$ a bod $S^{(1)}$ je jej stopníkom. Aby spádová priamka $o^{(1)}$, a tým aj nadrovina $E_3^{(1)}$ bola určená, treba poznať okrem jej stopníka $S^{(1)}$ ešte kótu aspoň jedného jej bodu. Túto treba určiť tak, aby spádová priamka $o^{(1)}$ mala od priemetnej nadroviny $E_3^{n}$ odchýlku $\alpha^{(1)}$, pre ktorú platí: $\operatorname{cotg} \alpha^{(1)} = \frac{1}{2}$. Keď teda zvolíme na $o^{(1)}$ bod $A^{(1)}$, potom zo vzťahu $\frac{v}{r} = \frac{1}{2}$ vyplýva, že kóta bodu $A^{(1)}$, teda polomer cyklosféry $C_A$, je dvakrát taký veľký ako skutočná dĺžka úsečky $S^{(1)}A^{(1)}$. Podobným spôsobom určíme nadroviny $E_3^{(2)}$ a $E_3^{(3)}$ a použitím konštrukčných metód z [2]




Obr. 1.

alebo [4] zostrojíme spoločnú priamku $m$ nadrovín $E_3^{(1)}$, $E_3^{(2)}$ a $E_3^{(3)}$. Aby sme zostrojili spoločné body $X$ a $Y$ priamky $m$ s kužeľovou nadkvadrikou $\Gamma$, uvažujme nadrovinu $E_3^\lambda$ určenú mimobežnými priamkami $m$ a $p$, kde priamka $p$ je stredovou osou nadkvadriky $\Gamma$. Nadrovina $E_3^\lambda$ má s kužeľovou nadkvadrikou $\Gamma$ spoločné dve roviny $\sigma_1$ a $\sigma_2$ reálne, alebo imaginárne. Stopy $s^{\sigma_1}$ a $s^{\sigma_2}$ rovín $\sigma_1$ a $\sigma_2$ dostaneme ako tvoriace priamky, v ktorých stopná rovina $\gamma^{E_3^\lambda}$ nadroviny $E_3^\lambda$ pretína stopnú kužeľovú plochu kužeľovej nadkvadriky $\Gamma$. Pretože roviny $\sigma_1$, $\sigma_2$ a priamka $m$ sa nachádzajú v nadrovine $E_3^\lambda$, musí priamka $m$ s rovinami $\sigma_1$ a $\sigma_2$ mať spoločné body $X$ a $Y$, ktoré ľahko zostrojíme. Cyklosféry prislúchajúce k bodom $X$ a $Y$ určujú už hľadané plochy guľové $G_X$ a $G_Y$. Známymi metódami z $E_3$ môžeme tiež zistiť dotykové body $M$ a $P$ guľových plôch $G_X$ a $G_Y$ s danou rotačnou kužeľovou plochou.

Diskusia riešenia. Pri riešení tejto úlohy sme ku každej z rovín $\varrho^{(i)}$ priradili v operačnom priestore $E_4$ nadrovinu $E_3^{(i)}$, pre ktorú platí: $|\cot g\, \alpha^{(i)}| = \cos \varphi^{(i)}$, pričom sme sa rozhodli pre jeden z uhlov $\alpha^{(i)}$. Toto sme urobili zistením polomeru a voľbou orientácie cyklosfér $C_{A^{(i)}}$. Ako vidieť z obrázka, priamku $p$ sme určili cyklosférou $C_B$ vpísanou do kužeľovej plochy $K$. Rôznou orientáciou cyklosfér $C_B$ a $C_{A^{(i)}}$ ($i = 1, 2, 3$) môžeme vytvoriť spolu 16 navzájom rôznych polôh nadrovín $E_3^{(i)}$ a priamky $p$. Pri zvolenej, usporiadanej skupine znamienok cyklosfér $C_B$ a $C_{A^{(i)}}$ skupina s opačnými znamienkami dáva to isté riešenie, čo vyplýva zo súmernosti podľa priemetnej nadroviny $E_3''$. Ostáva teda 8 prípadov vzájomne rôznych orientácií, z ktorých každý má dve riešenia. Dovedna existuje 16 riešení uvedenej úlohy. Tieto riešenia môžu po dvojiciach splývať, alebo byť imaginárne.

Riešenie úlohy a diskusia platí aj v tom prípade, keď ľubovoľné dve z rovín $\varrho^{(i)}$, napr. $\varrho^{(1)}$ a $\varrho^{(2)}$ sú rovnobežné, ale je $\cos \varphi^{(1)} \neq \cos \varphi^{(2)}$. Ak roviny $\varrho^{(1)}$ a $\varrho^{(2)}$ sú rovnobežné a $\cos \varphi^{(1)} = \cos \varphi^{(2)}$, potom v tých prípadoch kde cyklosféry $C_{A^{(1)}}$ a $C_{A^{(2)}}$ sú súhlasne orientované, neexistuje priamka $m$ a nedostaneme žiadne riešenie. Ľahko zistíme, že z uvedených 8 prípadov sú takéto 4 a úloha má potom 8 riešení, ktoré môžu po dvojiciach splývať, alebo môžu byť imaginárne.

Keď všetky tri roviny $\varrho^{(i)}$ sú incidentné s vrcholom $V$ kužeľovej plochy $K$, potom priamka $m$ má s kužeľovou nadkvadrikou $\Gamma$ spoločný bod $V$ a môžu sa stať dva prípady:

a) Priamka $m$ nemá už s nadkvadrikou $\Gamma$ žiadny spoločný bod okrem bodu $V$. Úloha nemá riešenie.

b) Priamka $m$ je incidentná s niektorou tvoriacou rovinou kužeľovej nadkvadriky $\Gamma$ a úloha má nekonečne mnoho riešení.

Môže sa tiež stať, že všetky tri roviny $\varrho^{(i)}$ sú incidentné s bodom $R$, pričom bod $R$ sa nachádza na rotačnej kužeľovej ploche $K$. Potom priamka $m$ má s kužeľovou nadkvadrikou $\Gamma$ spoločný bod $R$. K bodu $R$ však neprislúcha žiadna cyklosféra, ktorá by udávala riešenie uvedenej úlohy. Okrem bodu $R$ môže mať priamka $m$ s nadkvadrikou $\Gamma$ spoločný ešte bod $X$. V tomto prípade úloha bude mať najviac 8 riešení (môže mať aj menej, keď bude $X = R$, nedostaneme žiadne riešenie). V tomto prípade žiadne riešenia nemôžu byť imaginárne a nemôžu ani splývať. Môže sa tiež stať, že priamka $m$ bude incidentná s tvoriacou rovinou nadkvadriky $\Gamma$, ktorá zrejme prechádza bodom $R$. Vtedy úloha má nekonečne mnoho riešení.

## LITERATÚRA


[1] Gyarmathi L., *Konstruktive Lösung der Apollonius-Aufgabe im n-dimensionalen Raum durch Benützung einer Erweiterung der zyklographischen Abbildung auf mehrdimensionale Räume*, Publc. math. *1* (1949), 123—128.

[2] Harant M., *Kótovano-axonometrická zobrazovacia metóda vo štvorrozmernom euklidovskom priestore*, Spisy vyd. Přírodověd. fak. Masarykovy univ. (1956), 455—485.

[3] Harant M., *Teória nadkvadrík vo štvorrozmernom euklidovskom priestore, ktorých stredy vypĺňajú stredový útvar*, Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae. Math. *2* (1957), 25—47.

[4] Klíma J., *Deskriptivní geometrie čtyřrozměrného prostoru*, Sborník VŠT, *14* (1938).

[5] Seifert L., *Cyklografie*, Praha 1949.



Došlo 20. 2. 1965.



*Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie*
*Vysokej školy lesníckej a drevárskej, Zvolen*


## К ЦИКЛОСФЕРИЧЕСКОМУ ИЗОБРАЖЕНИЮ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ


Франтишек Гусарик



### Резюме

В статье показано, что в оперативном пространстве $E_4 = [0; x_1, x_2, x_3, x_4]$ к прямой $p$ можно в циклосферическом изображении отнести коническую гиперквадрику 2-го порядка. Поверхностью следа этой гиперквадрики в гиперплоскости проекции $E_3^0 = [0; x_1, x_2, x_3]$ является вращающаяся коническая поверхность. Если точка $B$ находится на приведенной конической гиперквадрике 2-го порядка, то поверхность шара, которая является носительницей циклосферы, принадлежащей точке $B$ в циклосферическом изображении в $E_4$, касается поверхности следа. Циклосферы, принадле-

жащие точкам гиперплоскости $E_3'''$, пересекают плоскость её следа под углом $\varphi$, для которого $\cos\varphi = |\mathrm{cotg}\alpha|$, где $\alpha$ угол наклона гиперплоскости $E_3'''$ к гиперплоскости проекции $E_3''$.

Приведенные свойства были использованы при решении задач о поверхностях шара, которые являются поверхностями соприкосновения вращательного конуса и пересекают плоскости $\varrho^{(i)}$ под углами $\varphi^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$.