Matematický časopis

Mária Jakubíková

Distributivität des l-Untergruppenverbandes einer Verbandsgruppe

Matematický časopis, Vol. 25 (1975), No. 2, 189--192

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126945`

Mat. Čas. 25, 1975, No 2, 189—192

DISTRIBUTIVITÄT DES l-UNTERGRUPPENVERBANDES EINER VERBANDSGRUPPE

MÁRIA JAKUBÍKOVÁ

Es sei G eine Verbandsgruppe. Wir bezeichnen mit $C(G)$ bzw. $U(G)$ die Menge aller konvexen l-Untergruppen bzw. die Menge aller l-Untergruppen von G. Beide Mengen $C(G)$ und $U(G)$ sind durch die Inklusion teilweise geordnet; offensichtlich sind dann $C(G)$ und $U(G)$ vollständige Verbände. Der Verband $C(G)$ ist distributiv (vgl. [4], [5]), dagegen braucht $U(G)$ im allgemeinen nicht distributiv zu sein. P. Conrad ([2], 1.8) hat das folgende Problem gestellt:

(*) Für welche Verbandsgruppen G ist der Verband $U(G)$ distributiv?

In dieser Arbeit wird bewiesen, dass $U(G)$ genau dann distributiv ist, wenn G zu einer Untergruppe der additiven Gruppe R_0 aller rationalen Zahlen (mit der natürlichen Anordnung) isomorph ist.

Für Verbände und Verbandsgruppen benutzen wir die Terminologie und die Bezeichnungen nach Birkhoff [1] und Fuchs [3]. Das Symbol G bezeichnet immer eine Verbandsgruppe.

Lemma 1. *Wenn G nicht linear geordnet ist, dann ist $U(G)$ nicht distributiv.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass G nicht linear geordnet ist. Dann gibt es $0 < a \in G$, $0 < b \in G$ mit $a \wedge b = 0$. Es sei

$$A = \{na\},\ B = \{nb\},\ C = \{n(a+b)\}\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1}$$

Dann sind A, B, C linear geordnete Untergruppen von G, also sind A, B, C l-Untergruppen von G. Die Verbandsoperationen in $U(G)$ seien mit $\wedge, \vee$ bezeichnet. Für $X, Y \in U(G)$ haben wir $X \wedge Y = X \cap Y$, also ist

$$A \wedge C = B \wedge C = \{0\}. \tag{2}$$

Es sei D die Menge aller Elemente $g \in G$, die sich in der Form

$$g = na + mb \tag{3}$$

darstellen lassen, wobei n, m ganze Zahlen sind. Für je zwei natürliche Zahlen n_1, n_2 haben wir

$$n_1 a \wedge n_2 b = 0$$

(vgl. [1], Chap. XIII); mit Berücksichtigung von [2], Thm. 1.5 folgt daraus, dass die Menge D eine l-Untergruppe von G ist. Aus (3) bekommen wir

$$g = (n - m)a + m(a + b)$$

und daher ist $g \in A \vee C$; also ist $D \subset A \vee C$. Offenbar ist $A \subset D$, $C \subset D$ und daraus folgt $A \vee C \subset D$. Insgesammt haben wir

$$A \vee C = D. \tag{4}$$

In analoger Weise zeigt man, dass

$$B \vee C = D \tag{5}$$

gilt. Aus (2), (4) und (5) ergibt sich, dass C im Intervall $[A \wedge C, D]$ zwei verschiedene relative Komplemente A und B besitzt; also ist $U(G)$ nicht distributiv.

Es sei G eine linear geordnete Gruppe, $0 < a \in G$, $b \in G$, $na < b$ für jede natürliche Zahl n. Dann schreiben wir $a \ll b$. Aus $a \ll b$ folgt offensichtlich $a \ll b - a$.

Lemma 2. *Es sei G eine linear gordnete Gruppe, $0 < a \in G$, $b \in G$, $a \ll b$ und es sei n eine natürliche Zahl. Dann gibt es $y \in G$ mit $0 < y \ll b$, $n(b - a) = nb - y$.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass aus $z \in G$, $0 < z \ll b$ immer $0 < -b + z + b \ll b$ folgt. In der Tat, aus $z > 0$ bekommen wir $z_1 = -b + z + b > 0$. Setzen wir voraus, dass $nz_1 \geqq b$ für eine natürliche Zahl n gilt. Dann haben wir $nz_1 = -b + nz + b \geqq b$, also $nz \geqq b$, was ein Widerspruch ist.

Wir beweisen jetzt die Behauptung des Lemmas durch Induktion. Für $n = 1$ genügt es $y = a$ zu setzen. Es sei vorausgesetzt, dass für n die Behauptung in Kraft ist. Dann ist

$$\begin{aligned}(n + 1)(b - a) = n(b - a) + (b - a) = nb - y + b - a = \\ = (n + 1)b - (a + y_1),\end{aligned}$$

wobei $y_1 = -b + y + b$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist $0 < y \ll b$, also ist $0 < y_1 \ll b$. Offenbar ist $m(a + y_1) \leqq 2m \max\{a, y_1\} < b$ für jede natürliche Zahl m und daher ist $a + y_1 \ll b$.

Lemma 3. *Es sei G eine linear geordnete Gruppe. Wenn G nicht archimedisch ist, dann ist $U(G)$ nicht distributiv.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass G nicht archimedisch ist. Dann gibt es Elemente $a, b \in G$ so dass $0 < a \ll b$ gilt. Es seien A und B durch (1) definiert; ferner sei $c = b - a$, $C = \{nc\}$, wobei n die Menge aller ganzen Zahlen durchläuft.

Ist $A \wedge C \neq \{0\}$, so gibt es $0 < x \in A \cap C$, also gibt es natürliche Zahlen n_1, n_2 mit $x = n_1 a = n_2(b - a)$. Dann ist aber $a \ll b - a \leqq n_2(b - a)$ und damit sind wir zu einem Widerspruch gelangt; also ist $A \wedge C = \{0\}$. Setzen wir voraus, dass $B \wedge C \neq \{0\}$ ist. Dann gibt es natürliche Zahlen m_1, m_2 mit $m_1 b = m_2(b - a)$. Da $b - a < b$ ist, haben wir $m_1 < m_2$. Nach Lemma 2 gilt

(6) $$m_2(b - a) = m_2 b - y,$$

wobei $0 < y \ll b$ ist. Aus (6) folgt aber $y = (m_2 - m_1)b$, was ein Widerspruch ist.

Damit haben wir bewiesen, dass

$$A \wedge C = B \wedge C$$

gilt. Offenbar ist $A \neq B$ und

$$A \vee C = B \vee C.$$

Also ist $U(G)$ nicht distributiv.

Aus Lemma 1 und Lemma 3 ergibt sich, dass jede Verbandsgruppe mit einem distributiven l-Untergruppenverband $U(G)$ notwendig linear geordnet und archimedisch ist. Also ist G isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe R aller reellen Zahlen (mit der natürlichen Anordnung (vgl. [1])). Insbesondere ist dann G kommutativ.

Lemma 4. *Es sei G eine archimedische linear geordnete Gruppe, $0 < a \in G$, $0 < b \in G$, $na \neq mb$ für je zwei natürliche Zahlen n, m. Dann ist $U(G)$ nicht distributiv.*

Beweis. Die Symbole A, B, C haben dieselbe Bedeutung wie in (1) und D sei die Menge aller $g \in G$, die sich in der Form (3) darstellen lassen. Da G linear geordnet ist, gehört D zu $U(G)$. Da $na \neq mb$ für je zwei natürliche Zahlen gilt, ist (2) in Kraft; in derselben Weise wie in Lemma 1 bekommen wir, dass auch (4) und (5) gilt. Also ist $U(G)$ nicht distributiv.

Wir bezeichnen mit R_0 die additive Gruppe aller rationalen Zahlen.

Lemma 5. *Es sei G eine archimedische linear geordnete Gruppe mit der Eigenschaft, dass für jedes Paar von Elementen $0 < a \in G$, $0 < b \in G$ natürliche Zahlen m, n mit $ma = nb$ existieren. Dann ist G zu einer Untergruppe von R_0 (mit der natürlichen Anordnung) isomorph.*

Beweis. Der Fall $G = \{0\}$ ist trivial. Es sei $G \neq \{0\}$ und es sei $0 < e$ ein fest gewähltes Element von G. Wir definieren eine Abbildung φ der Gruppe G in die Menge R_0 wie folgt. Wir setzen $\varphi(e) = 1$, $\varphi(0) = 0$. Wenn $0 \neq a \in G$, so gibt es eine natürliche Zahl m und eine ganze Zahl n mit $ne = ma$; aus allen solchen Paaren (m, n) wählen wir dasjenige Paar, in dem die Zahl m die kleinste ist und wir setzen $\varphi(a) = \dfrac{n}{m}$. Aus der Methode des Beweises von Thm. 12, [1], S. 300 ergibt sich, dass φ ein Isomorphismus von G in R_0 ist.

Aus dem oben bewiesenen ergibt sich

Satz 1. *Es sei G eine Verbandsgruppe und $U(G)$ sei distributiv. Dann ist G zu einer Untergruppe von R_0 mit der natürlichen Anordnung isomorph.*

Ore hat den folgenden Satz bewiesen ([6]; vgl. auch [7], Thm. 2):

(A) *Es sei G eine Gruppe und $V(G)$ sei der Verband aller Untergruppen von G. Der Verband $V(G)$ ist genau dann distributiv, wenn jede endliche Teilmenge von G eine zyklische Untergruppe in G erzeugt.*

Für natürliche Zahlen m, n bezeichen wir mit (m, n) den grössten gemeinsamen Teiler von m und n. Es sei G eine Untergruppe von R_0, $x, y \in G$, $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$, $(mq, np) = d$, $z = \frac{d}{nq}$. Bezeichen wir mit G_0 die durch die Elemente x, y erzeugte Untergruppe von G. Dann gehört z zu G_0 und für jedes $g \in G_0$ gibt es eine ganze Zahl n_1 mit $g = n_1 z$; also ist G_0 zyklisch. Durch Induktion können wir verifiezieren, dass jede endliche Teilmenge von G eine zyklische Untergruppe in G erzeugt. Nach dem Satz von Ore ist also der Verband $V(G)$ distributiv. Setzen wir jetzt voraus, dass G linear geordnet ist (in der natürlichen Anordnung). Dann ist G eine Verbandsgruppe und jede Untergruppe von G ist zugleich eine l-Untergruppe von G, d. h. es gilt $V(G) = U(G)$. Daraus folgt, dass $U(G)$ distributiv ist. Mit Rüchsicht auf Satz 1 erhalten wir:

Satz 2. *Es sei G eine Verbandsgruppe. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) *der Verband $U(G)$ ist distributiv;*

(b) *die Verbandsgruppe G ist zu einer Untergruppe der additiven Gruppe R_0 aller rationalen Zahlen (mit der natürlichen Anordnung) isomorph.*

LITERATUR

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice theory. Third edition, Providence 1967.

[2] CONRAD, P.: Lattice ordered groups. New Orleans 1970 (mimeographed).

[3] FUCHS, L.: Partially ordered algebraic systems. Oxford 1963. (Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва 1965).

[4] ЯКУБИКОВА, М.: О некоторых подгруппах l-групп. Mat.-fyz. Čas. 12, 1962, 97—107.

[5] LORENZ, K.: Über Strukturverbände von Verbandsgruppen. Acta Math. Acad. scient. Hung. 13, 1962, 55—67.

[6] ORE, O.: Structures and group theory. II. Duke Math. J. 4, 1938, 247—269.

[7] SUZUKI, M.: Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. Berlin 1956.

Eingegangen am 14. 12. 1973

Mária Jakubíková
Katedra matematiky strojníckej fakulty VŠT,
Švermova 5
040 01 Košice