Mária Jakubíková

Abgeschlossene vollständige l-Untergruppen der Verbandsgruppen

Matematický časopis, Vol. 23 (1973), No. 1, 55--63

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126991

Matematický časopis 23 (1973), No. 1

ABGESCHLOSSENE VOLLSTÄNDIGE l-UNTERGRUPPEN DER VERBANDSGRUPPEN

MÁRIA JAKUBÍKOVÁ, Košice

Es sei G eine Verbandsgruppe. Jedes System S von Teilmengen der Menge G ist durch die Inklusion teilweise geordnet. Spezielle halbgeordnete Systeme S dieser Art und die Beziehungen zwischen den Eigenschaften von S und denen von G wurden in mehreren Arbeiten studiert. Zum Beispiel sind die folgenden Ergebnisse bekannt: Es sei G_i eine Verbandsgruppe und $V(G_i)$ ($K(G_i)$) sei das System aller Unterhalbgruppen (aller konvexen l-Untergruppen) von G_i ($i = 1, 2$). Wenn die halbeordneten Mengen $V(G_1)$ und $V(G_2)$ isomorph sind, so sind auch die l-Gruppen G_1 und G_2 isomorph [7]. Die halbgeordneten Mengen $K(G_i)$ sind distributive Verbände, die im allgemeinen nicht unendlich distributiv sind ([5], [6], [9]). Wenn die Verbände $K(G_1)$ und $K(G_2)$ isomorph sind und wenn G_1 vollsțändig distributiv ist, so ist auch G_2 vollständig distributiv [2].

Es sei $K_0(G)$ das System aller abgeschlossenen konvexen l-Untergruppen von G und $K_1(G)$ sei die Menge derjenigen $A \in K_0(G)$ die vollständig sind. In dieser Arbeit wollen wir zeigen, dass $K_1(G)$ kein Verband zu sein braucht. Jede gerichtete konvexe Teilmenge A von $K_1(G)$ mit $\{0\} \in A$ ist eine verallgemeinerte Boolesche Algebra. Ferner sei G_i eine vollständige Verbandsgruppe ($i = 1, 2$). Offensichtlich ist dann $K_0(G_i) = K_1(G_i)$. Es sei α eine unendliche Kardinalzahl. Es wird bewiesen, dass $K_0(G_i)$ genau dann α-distributiv ist, wenn G_i α-distributiv ist. Also wenn G_1 α-distributiv und $K_0(G_1)$ zu $K_0(G_2)$ isomorph ist, dann ist auch G_2 α-distributiv.

§ 1. Grundbegriffe und Bezeichnungen

Für Verbände und Verbandsgruppen benutzen wir die Bezeichnungen nach Birkhoff [1] und Fuchs [3]. Die Gruppenoperation in einer Verbandsgruppe G wird additiv geschrieben, die Komutativität ist aber nicht vorausgesetzt. Eine Verbandsgruppe G heisst vollständig, wenn der Verband (G; $\wedge$, $\vee$) relativ vollständig ist, d. h. wenn jede beschränkte Teilmenge $M \neq \emptyset$ von G das Supremum und das Infimum in G besitzt. Es sei H eine l-Untergruppe von G. H ist konvex in G, wenn aus $0 \leqq g \leqq h \in H$, $g \in G$ immer $g \in H$ folgt. H heisst abgeschlossen in G, wenn für jede Teilmenge $M \subset H$, für die $\sup M = g$ in G existiert, das Element g zu H gehört.

Es sei V ein Verband. V heisst unendlich distributiv, wenn in G die Bedingungen (d_1) und (d_2) erfüllt sind:

(d_1) Ist $x \in V$, $\{x_i\} \subset V$ und existiert in V das Element $\bigvee x_i$, dann gilt $x \wedge (\bigvee x_i) = \bigvee (x \wedge x_i)$.

(d_2) Ist $x \in V$, $\{x_i\} \subset V$ und existiert in V das Element $\bigwedge x_i$, so ist $x \vee (\bigwedge x_i) = \bigwedge (x \vee x_i)$.

Es seien S und T nichtleere Mengen. Mit S^T bezeichnen wir das System aller Abbildungen der Menge T in die Menge S. Ferner seien α und β Kardinalzahlen. Ein Verband V heisst (α, β)-distributiv, wenn in V

$$\bigwedge_{t \in T} \bigvee_{s \in S} x_{t,s} = \bigvee_{\varphi \in S^T} \bigwedge_{t \in T} x_{t,\varphi(t)}, \tag{1}$$

$$\bigvee_{t \in T} \bigwedge_{s \in S} x_{t,s} = \bigwedge_{\varphi \in S^T} \bigvee_{t \in T} x_{t,\varphi(t)} \tag{2}$$

unter der Voraussetzung indentisch gilt, dass (a) $\operatorname{card} T \leqq \alpha$, $\operatorname{card} S \leqq \beta$, und (b) alle in (1) und (2) auftretenden Vereinigungen und Durchschnitte in V existieren. Der Verband V heisst α-distributiv, wenn er (α, α)-distributiv ist.

Es sei $G = (G; \wedge, \vee, +)$ eine Verbandsgruppe. Für jede Teilmenge $X \subset G$ bezeichnen wir

$$X^\delta = \{g \in G : |g| \wedge |x| = 0 \quad \text{für jedes} \quad x \in X\}.$$

Für jedes $X \subset G$ ist $X^\delta \in K_0(G)$. Ein Element $y \in G$ heisst disjunkt zu X, wenn $y \in X^\delta$. Wir bezeichnen mit cX den Durchschnitt aller konvexen abgeschlossenen l-Untergruppen A von G mit $X \subset A$. Offensichtlich gilt $cX \in K_0(G)$. Es seien B, C konvexe l-Untergruppen von G, so dass (1) die Gruppe $(G; +)$ eine direkte Summe ihrer Untergruppen B, C ist, und (2) ist $b \in B$, $c \in C$, so gilt $b + c \geqq 0$ genau dann, wenn $b \geqq 0$ und $c \geqq 0$ ist. Dann nennen wir G eine direkte Summe ihrer l-Untergruppen A, B und wir schreiben $G = B \oplus C$. Aus $G = B \oplus C$ folgt, dass B ein Komplement von C im Verband $K(G)$ ist; und umgekehrt, wenn $B, C \in K(G)$ und C ein Komplement von B ist, so gilt $G = B \oplus C$. Die l-Gruppen B und C heissen direkte Summanden von G. Es sei $S(G)$ die Menge aller direkten Summanden von G. Wenn $B \in S(G)$ und $G = B \oplus C$, dann ist $C = B^\delta$, C ist also eindeutig bestimmt durch B; wir schreiben auch $C = B^*$. Es sei $g \in G, B \in S(G)$. Es gibt eindeutig bestimmte Elemente $b \in B$, $b^* \in B^*$ mit $g = b + b^*$; b heisst die Komponente von g in B und wir setzen $b = g(B)$. Das Element g gehört genau dann zu B, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist: (a) $g(B) = g$, (b)

$g(B^*) = 0$. Für jedes $g \in G^+$ ist $g(B)$ das grösste Element der Menge $\{b \in B : : b \leqq g\}$.

Wir brauchen den folgenden.

Satz 1. (Riesz—Birkhoff; [1], Kap. XIII, Thm. 27.) *Es sei G eine vollständige Verbandsgruppe und B sei eine konvexe l-Untergruppe von G. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:* (a) *B ist ein direkter Summand von G,* (b) $B = (B^\delta)^\delta$, (c) *B ist abgeschlossen.*

Aus der Existenz gemeinsamer Verfeinerungen von je zwei direkten Zerlegungen (vgl. [10] und [1], S. 315) folgt, dass für $B, D \in S(G)$ immer auch $B \cap D$ zu $S(G)$ gehört.

§ 2. Die teilweise geordnete Menge $K_1(G)$

Es sei G eine Verbandsgruppe.

Lemma 2.1. *Wenn A, $B \in K_1(G)$, so ist $A + B$ eine vollständige Verbandsgruppe und eine konvexe l-Untergruppe von G.*

Beweis. Es sei $0 \leqq a \in A$, $0 \leqq b \in B$. Bezeichnen wir $a \wedge b = u$, $a - u = a_1$, $b - u = b_1$. Jede vollständige Verbandsgruppe ist kommutativ ([1] [3]). Wir haben $a_1 \wedge b_1 = 0$ und also $a_1 + b_1 = a_1 \vee b_1 = b_1 + a_1$. Daraus folgt $a + b = u + a_1 + u + b_1 = u + b_1 + u + a_1 = b + a$. Da jedes Element einer l-Gruppe als Differenz von zwei positiven Elementen darstellbar ist, sind beliebige zwei Elemente $x \in A$ und $y \in B$ vertauschbar, daher ist $A + B$ eine Untergruppe von $(G; +)$. Ist $0 \leqq z \leqq a + b$, dann gibt es $a_1 \in [0, a]$, $b_1 \in [0, b]$ mit $z = a_1 + a_2$ ([3,] s. 103). Also ist $A + B$ konvex in G; wegen $a \leqq a + b$, $b \leqq a + b$ ist G eine gerichtete Teilmenge in G und daher ist $A + B$ eine l-Untergruppe von G. Um zu zeigen, dass $A + B$ vollständig ist, genügt es zu verifizieren, dass für jede Teilmenge $\{x_i\} \subset (A + B)^+$, die in $A + B$ von oben beschränkt ist, dass Supremum $\bigvee x_i$ in $A + B$ existiert. Setzen wir also voraus, dass $X = \{x_i\} \subset [0, c]$, $c \in A + B$. Dann gibt es Elemente $a, a_i \in A^+$ und $b, b_i \in B^+$ mit $c = a + b$, $x_i = a_i + b_i$, $a_i \leqq a$, $b_i \leqq b$. Offensichtlich ist $C = A \cap B \in K_1(G)$. Nach Satz 1 gibt es direkte Zerlegungen

$$A = A_1 \oplus C, \quad B = B_1 \oplus C.$$

Aus $A, B \in K_1(G)$ folgt A_1, $B_1 \in K_1(G)$. Ferner ist $a_0 \wedge b_0 = 0$ für jedes $a_0 \in A_1^+$ und jedes $b_0 \in B_1^+$. Also ist

$$a_i = a_i^0 + c_i^1 = a_i^0 \vee c_i^1, \quad b_i = b_i^0 + c_i^2 = b_i^0 \vee c_i^2,$$

wobei $a_i^0 = a_i(A_1)$, $c_i^1 = a_i(C)$, $b_i^0 = b_i(B_1)$, $c_i^2 = b_i(C)$. Setzen wir $c_i = c_i^1 + c_i^2$. Dann haben wir

$$x_i = a_i^0 + b_i^0 + c_i = a_i^0 \wedge b_i^0 \vee c_i.$$

Offenbar ist $\{a_i^0\} \subset [0, a]$, $\{b_i^0\} \subset [0, b]$, $c_i^1 = c_i^1(C) \in [0, a(C)]$, $c_i^2 = c_i^2(C) \in$ $\in [0, b(C)]$, also $\{c_i\} \subset [0, a(C) + b(C)]$. Daher existieren die Elemente $a_0 =$ $= \bigvee a_i^0 \in A_1$, $b_0 = \bigvee b_i^0 \in B_1$, $c_0 = \bigvee c_i \in C$ und

$$\bigvee x_i = \bigvee (a_i^0 \vee b_i^0 \vee c_i) = (\bigvee a_i^0) \vee (\bigvee b_i^0) \vee (\bigvee c_i) =$$

$$= a_0 \vee b_0 \vee c_0 = a_0 + b_0 + c_0 \in A + B.$$

Man kann die Frage stellen, ob unter den Voraussetzungen wie in Lemma 2.1 die l-Untergruppe $A + B$ abgeschlossen ist. Die Antwort ist negativ (vgl. 2.7).

Es sei M eine teilweise geordnete Menge. Eine Teilmenge $X \subset M$ heisst konvex in M, wenn aus $x_1, x_2 \in X$, $m \in M$, $x_1 \leqq m \leqq x_2$ folgt, dass m zu X gehört. In 2.2—2.6 setzen wir voraus, dass $\bar{K}_1(G)$ eine konvexe gerichtete Teilmenge von $K_1(G)$ ist, $\{0\} \in \bar{K}_1(G)$.

Lemma 2.2. *Die Menge $\bar{K}_1(G)$ ist ein relativ vollständiger Verband.*

Beweis. Es sei $\{A_i\} \subset \bar{K}_1(G)$. Offensichtlich ist $\cap A_i \in K_1(G)$, also ist $\cap A_i$ das Infinum der Menge $\{A_i\}$ in $K_1(G)$. Zugleich gehört $\cap A_i$ zu $\bar{K}_1(G)$, daher ist $\cap A_i$ auch das Infimum der Menge $\{A_i\}$ in $\bar{K}_1(G)$. Es sei A, $B \in$ $\in \bar{K}_1(G)$. Da $\bar{K}_1(G)$ gerichtet ist, gibt es $C \in \bar{K}_1(G)$ mit $A \subset C$, $B \subset C$. Es sei $\mathscr{C}$ die Menge aller $C_i \in \bar{K}_1(G)$ mit $A \subset C_i \subset C$, $B \subset C_i \subset C$. Dann ist $\cap C_i$ das Supremum der Menge $\{A, B\}$ in $\bar{K}_1(G)$. Daher ist $\bar{K}_1(G)$ ein Verband. Es sei $\{B_j\} \subset \bar{K}_1(G)$, $B_j \subset B$. Ferner sei $\{A_k\}$ die Menge aller $A_k \in \bar{K}_1(G)$. mit $B_j \subset A_k$ für jedes B_j. Es gilt $\cap A_k \in \bar{K}_1(G)$ und $\cap A_k$ ist das Supremum der Menge $\{B_j\}$ in $\bar{K}_1$ (G).

Lemma 2.3. *Es sei $A \in K(G)$, $0 < x \in cA$. Dann gibt es eine Teilmenge $\{a_i\} \subset A^+$ mit $x = \bigvee a_i$.*

Beweis. Bezeichnen wir mit B die Menge aller $x \in G$ die sich in der Form $x = \bigvee x_i$ mit $0 \leqq x_i \in A$ darstellen lassen. Ist x, $y \in B$, $0 \leqq z \leqq x$, so haben wir

$$z = \bigvee (z \wedge x_i),$$

$$x \vee y = \bigvee_i \bigvee_j (x_i \vee y_j), \quad x \wedge y = \bigvee_i \bigvee_j (x_i \wedge y_j),$$

$$x + y = \bigvee_i \bigvee_j (x_i + y_j).$$

Daraus folgt, dass B eine konvexe Teilmenge von G ist und $x \vee y$, $x \wedge y$, $x + y \in B$. Es sei C die mengentheoretische Vereinigung aller Intervalle $[-b, b]$ mit $b \in B$. Aus dem schon bewiesenen folgt leicht, dass C eine konvexe l-Untergruppe von G ist und $C^+ = B$. Es sei $\{z_k\} \subset C^+$, $\bigvee z_k = z$ in G. Dann haben wir $z_k = \bigvee_{i \in I_k} z_{ik}$ mit $z_{ik} \in A$, also $z = \bigvee_k \bigvee_i z_{ik} \in B$. Daher ist C abgeschlossen. Wenn $D \in K_1(G)$, $A \subset D$, dann ist $C \subset D$; also $cA = C$. Damit ist der Beweis erbracht.

Ein System von konvexen l-Untergruppen $\{A_i\}$ $(i \in I)$ nennen wir disjunkt, wenn $A_{i_1} \cap A_{i_2} = \{0\}$ für je zwei i_1, $i_2 \in I$, $i_1 \neq i_2$.

Lemma 2.4. *$\bar{K}_1(G)$ ist distributiv.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für jedes Element von $\bar{K}_1(G)$ in jedem Intervall von $\bar{K}_1(G)$ höchsten ein relatives Komplement existiert. Es sei $A, B, C \in \bar{K}_1(G)$,

$$A \wedge B = A \wedge C,$$

$$A \vee B = A \vee C.$$

Bezeichnen wir $A \wedge B = D$. Dann haben wir $D \in K_1(A) \cap K_1(B) \cap K_1(C)$ und A, B, C sind vollständige Verbandsgruppen. Nach Satz 1 ist also

$$A = A_1 \oplus D, \quad B = B_1 \oplus D, \quad C = C_1 \oplus D. \tag{3}$$

Aus (3) und aus der Definition von D folgt, dass das System $\{A_1, B_1, D\}$ disjunkt ist. Ebenso ist das System $\{A_1, C_1, D\}$ disjunkt. Ferner setzen wir $B_1 \cap C_1 = E$. Dann ist

$$B_1 = B_2 \oplus E, \quad C_1 = C_2 \oplus E \tag{4}$$

und das System $\{A_1, B_2, C_2, D, E\}$ ist disjunkt. Es sei $0 \leqq c \in C_2$. Das Element c ist disjunkt mit A_1, B_2, D und E. Nach (4) ist also c disjunkt mit B_1 und aus (3) folgt dann, dass c mit A und mit B disjunkt ist. Aus der unendlichen Distributivität von G und aus Lemma 2.3 bekommen wir jetzt, dass c disjunkt mit $A \vee B$ ist. Also ist c disjunkt mit $A \vee C$ und $c \in A \vee C$; dies bedeutet, dass $c = 0$. Daher ist $C_2 = \{0\}$. In analoger Weise zeigt man, dass $B_2 = \{0\}$. Daraus folgt $B_1 = C_1$ und also $B = C$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 2.5. *Die halbgeordnete Menge $\bar{K}_1(G)$ ist eine verallgemeinerte Boolesche Algebra.*

Beweis. Nach Lemma 2.4 ist $\bar{K}_1(G)$ ein distributiver Verband. $\{0\}$ ist das kleinste Element in $\bar{K}_1(G)$. Wenn $A \in \bar{K}_1(G)$ ist und $B \in \bar{K}_1(G)$, $B \subset A$, dann ist $B \in K_1(A)$, und umgekehrt. Also ist $[\{0\}, A] = K_1(A) = K_0(A)$. Nach Satz 1 und Lemma 2.4 ist $K_0(A)$ eine Boolesche Algebra.

Satz 2.6. *Der Verband $\bar{K}_1(G)$ ist unendlich distributiv.*

Beweis. Setzen wir z. B. voraus, dass in $\bar{K}_1(G)$ die Bedingung (d_1) nicht erfüllt ist. Dann gibt es l-Untergruppen X, $X_i \in \bar{K}_1(G)$ so, dass

$$A = X \wedge (\vee X_i) \neq \vee (X \wedge X_i) = B.$$

Offensichtlich ist $A \supset B$. Bezeichnen wir $A \vee (\vee X_i) = D$. Das Intervall $[\{0\}, D] = I$ des Verbandes $\overline{K}_1(G)$ ist nach 2.5 eine Boolesche Algebra, also ist I unendlich distributiv. Wegen $X, X_i \in I$ gelangen wir zu einen Widerspruch.

Bemerkung 2.7. Die teilweise geordnete Menge $\overline{K}_1(G)$ braucht kein Verband zu sein. Beispiel: Es sei G die Menge aller auf dem Intervall $[0, 1]$ definierten reellen Funktionen, die im Punkte $x_0 = \frac{1}{2}$ stetig sind. Bezüglich der natürlichen Halbordnung ist G eine additive Verbandsgruppe. Es sei $A(B)$ die Menge aller $f \in G$, die auf dem Intervall $[0, x_0]$ (auf dem Intervall $[x_0, 1]$ gleich Null sind. A ist eine konvexe abgeschlossene l-Untergruppe von G. Es sei $\{f_i\}_{i \in I} \subset A$, $f \in A$, $f_i \leqq f$ für jedes $i \in I$. Für jedes $x \in [0, 1]$ setzen wir $g(x) = \sup \{f_i(x)\}_{i \in I}$. Dann gehört $g(x)$ zu A und g ist das Supremum der Menge $\{f_i\}$ in A. Also ist A vollständig und daher $A \in K_1(G)$. In analoger Weise haben wir $B \in K_1(G)$. Es sei $f_1 \in G$ mit $f_1(x) = 1$ für jedes $x \in [0, 1]$. Für jedes $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$ gibt es $f_\varepsilon \in A$ und $g_\varepsilon \in B$ derart, dass f_ε identisch gleich 1 auf $[0, x_0 - \varepsilon]$ ist,, g_ε ist identisch gleich 1 auf $[x + \varepsilon, 1]$ und $f_\varepsilon, g_\varepsilon \in [f_0, f_1]$, wobei f_0 identisch gleich 0 auf $[0,1]$ ist. Das Supremum der Menge $F = \{f_\varepsilon + g_\varepsilon\} (0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$ in G ist gleich f_1. Wir haben $F \subset A + B$ und f_1 non $\in A + B$; also ist $A + B$ nicht abgeschlossen. Damit ist die nach Lemma 2.1 gestellte Frage beantwortet. Setzen wir voraus, dass $C \in K_1(G)$, $A \subset C$, $B \subset C$ ist. Bezeichnen wir $F_1 = \{f_\varepsilon\} \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$. Aus $A + B \subset C$ folgt $F \subset C$ und da C abgeschlossen ist, bekommen wir $f_1 \in C$. Daher ist die Menge F_1 beschränkt in C und also besitzt F_1 das Supremum $\sup F_1 = h$ in C. Aus der Konvexität von C in G ergibt sich, dass h auch das Supremum von F_1 in G ist. Offenbar ist $h \in [f_0, f_1]$ und für jedes ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, gilt $f_\varepsilon(x_0 - \varepsilon) = 1$. Da h stetig in x_0 ist, haben wir $h(x_0) = 1$ und es gibt $0 < \delta < \frac{1}{2}$ so, dass h im Intervall $[x_0, x_0 + \delta]$ positiv ist. Es gibt $h_1 \in B$ so, dass $f_0 < h_1$, $h_1(x) \leqq h(x)$ für jedes x mit $x_0 < x < x_0 + \delta$ und $h_1(x) = 0$ für jedes $x \in [x_0 + \delta, 1]$. Dann ist $h > h - h_1 \in C$ und $h - h_1 \geqq f_\varepsilon$ für jedes ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Damit sind wir zu einen Widerspruch gelangt. Also existiert keine obere Schranke der Menge $\{A, B\}$ in $K_1(G)$.

Aus Lemma 2.1 und 2.2 bekommen wir unmittelbar

Satz 2.8. *Für die teilweise geordnete Menge $K_1(G)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) *$K_1(G)$ ist von oben gerichtet.*

(b) *$K_1(G)$ ist ein Verband.*

(c) *$K_1(G)$ ist ein vollständiger Verband.*

Wenn $A + B \in K_1(G)$ für je zwei l-Untergruppen A, $B \in K_1(G)$, so ist $K_1(G)$ ein vollständiger Verband.

3. Der Verband $K_0(G)$ für vollständige Verbandsgruppen G

Untersuchen wir nun den Fall, wenn G vollständig ist. Dann haben wir $K_1(G) = K_0(G)$ und $K_1(G)$ ist eine Boolesche Algebra nach Satz 2.8.

Lemma 3.1. ([4], 1.3.) *Es seien α, β Kardinalzahlen und es sei vorausgesetzt, dass G nicht (α, β)-distributiv ist. Dann gibt es ein System $\{y_{s,t}\} \subset G^+(s \in S, t \in T)$ mit* card $S \leqq \beta$, *card $T \leqq \alpha$, so dass*

$$\bigwedge_{s\in S} y_{t,s} = 0 \quad \text{für jedes} \quad t \in T,$$

$$\bigvee_{t\in T} y_{t,\varphi(t)} = y > 0 \quad \text{für jedes} \quad \varphi \in S^T.$$

Lemma 3.2. *Es sei $\{B_i\} \subset K_1(G)$, $\bigvee B_i = C$, $0 < c \in C$. Dann gibt es Elemente $b_i \in B_i$ mit $\bigvee b_i = c$.*

Beweis. Für jedes B_i gibt es $c(B_i)$ und $c(B_i) \leqq c$. Wegen der Vollständigkeit von G existiert also das Element $\bigvee c(B_i) = b$. Aus $c(B_i) \leqq c$ folgt $b \leqq c$, alo $b(B_i) \leqq c(B_i)$. Wegen $c(B_i) \leqq b$ ergibt sich $c(B_i) = (c(B_i))(B_i) \leqq b(B_i)$ und daher ist $b(B_i) = c(B_i)$. Setzen wir $c - b = a$. Dann haben wir $a(B_i) = c(B_i) - b(B_i) = 0$, daher $a \in B_i^*$ für jedes B_i. Daraus folgt $a \in \bigwedge B_i^* = \cap B_i^*$. Da $K_1(G)$ eine Boolesche Algebra ist, bekommen wir

$$C = \bigvee B_i = (\bigwedge B_i^*)^*, \quad C^* = \bigwedge B_i^*.$$

Offensichtlich ist $a \in C$ und daher $a \in C \cap C^* = \{0\}$. Daraus ergibt sich $c = \bigvee c(B_i)$ und $c(B_i) \in B_i$.

Lemma 3.3. *Es sei x, $y \in G$, $x \wedge y = 0$. X bzw. Y sei die kleinste c-Untergruppe von G mit $x \in X$ bzw. $y \in Y$. Dann gilt $X \cap Y = \{0\}$.*

Beweis. Wir haben

$$y \in \{x\}^\delta, \quad x \in \{x\}^{\delta\delta},$$

die Mengen $\{x\}^\delta$ und $\{x\}^{\delta\delta}$ sind c-Untergruppen von G nach Satz 1, und

$$\{x\}^\delta \cap \{x\}^{\delta\delta} = \{0\}.$$

Offensichtlich ist $Y \subset \{x\}^\delta$, $X \subset \{x\}^{\delta\delta}$, also $X \cap Y = \{0\}$.

Satz 3.4. *Es sei $\alpha \geqq \aleph_0$. Eine vollständige Verbandsgruppe G ist genau dann α-distributiv, wenn der Verband $K_1(G)$ α-distributiv ist.*

Beweis. (a) Setzen wir voraus, dass G nicht α-distributiv ist. Nach 3.9 in [4] ist dann G nicht $(\alpha,2)$ - distributiv. Nach Lemma 3.1 gibt es Systeme $\{x_i^1\}$ und $\{x_i^2\}$ $(i \in I,$ card $I \leqq \alpha)$, so dass

(5) $$x_i^1 \wedge x_i^2 = 0 \text{ für jedes } i \in I,$$

(6) $$\vee x_i^{\varphi(i)} = x > 0 \text{ für jedes } \varphi \in \{1, 2\}^I.$$

Für jedes x_i^k sei X_i^k die kleinste c-Untergruppe von G, die das Element x_i^k enthält $(k = 1, 2)$. Aus [5] und Lemma 3.3 folgt

(7) $$X_i^1 \cap X_i^2 = \{0\} \text{ für jedes } i \in I.$$

Es sei $\varphi \in \{1, 2\}^I$. Nach (6) haben wir $x \in \vee X_i^{\varphi(i)}$ $(i \in I)$, also

(8) $$x \in \wedge_{\varphi\in\{1,2\}^I} \vee_{i\in I} X_i^{\varphi(i)}.$$

Ferner ist nach (7)

(9) $$\vee_{i\in I}(X_i^1 \wedge X_i^2) = \{0\}.$$

Aus (8) und (9) ergibt sich, dass der Verband $K_1(G)$ nicht $(\alpha,2)$-distributiv ist, also ist $K_1(G)$ nicht α-distributiv.

(b) Es sei $K_1(G)$ nicht α-distributiv. Da $K_1(G)$ eine Boolesche Algebra ist, ist $K_1(G)$ nicht $(\alpha,2)$-distributiv (vgl. [8], S. 101). Nach [8], Satz 19.2 gibt es ein System $\{X_i^k\} \in K_1(G)$ $(i \in I, k \in \{1, 2\},$ card $I \leqq \alpha)$, so dass (7) erfüllt ist und

(10) $$\vee X_i^{\varphi(i)} = X \neq \{0\} \text{ für jedes } \varphi \in \{1, 2\}^I.$$

Es gibt $0 < x \in X$ und es sei φ ein fest gewähltes Element von $\{1, 2\}^I$. Nach Lemma 3.2 und (10) gibt es Elemente $0 < x(\varphi, i) \in X_i^{\varphi(i)}$ so dass

(11) $$\bigvee_{i\in I} x(\varphi, i) = x \text{ für jedes } \varphi \in \{1, 2\}^I.$$

Für jedes $i \in I$ und jedes $k \in \{1, 2\}$ bezeichnen wir

$$Y_i^k = \{x(\varphi, i) : \varphi(i) = k\}.$$

Nach (11) gilt $y \leqq x$ für jedes $y \in Y_i^k$. Da G vollständig ist, existiert in G das Element $\sup Y_i^k = x_i^k \leqq x$ und nach (11)

(12) $$x = \vee x_i^{\varphi(i)} \text{ für jedes } \varphi \in \{1, 2\}^I.$$

Wir haben $Y_i^k \subset X_i^k$ und da X_i^k abgeschlossen ist, gilt $x_i^k \in X_i^k$. Mit Hilfe von (7) erhalten wir dann

$$x_i^1 \wedge x_i^2 = 0 \text{ für jedes } i \in I.$$

Daher ist G nicht $(\alpha,2)$-distributiv und also nicht α-distributiv.

LITERATUR

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice theory. Providence 1967.

[2] CONRAD, P.: The relationship between the radical of a lattice ordered group and complete distributivity. Pacif. J. Math. *14*, 1964, 493—499.

[3] ФУКС, Л.: Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва 1965.

[4] JAKUBÍK, J.: Distributivity in lattice ordered groups, Czechoslov. Math. J. 22 (97) 1972, 108—125

[5] ЯКУБИКОВА, М.: О некоторых подгруппах l-групп. Matem. fyz. časop. *12*, 1962, 97—107.

[6] LORENZ, K.: Über Strukturverbände der Verbandsgruppen. Acta math. Acad. scient. hung. *13*, 1962, 55—69.

[7] КУТЫЕВ, К. М.: ПС-изоморфизмы структурно упорядоченной группы. Матем. заметки *7*, 1970, 537—544.

[8] СИКОРСКИЙ, Р.: Булевы алгебры. Москва 1969.

[9] ŠIK, F.: Estructura y realisaciones de grupos reticulados. Mem. Fac. Cie. Univ. Habana, Vol. 1, ser. mat., fasc. *2—3*, 1964, 1—29.

[10] ШИМБИРЕВА, Е. П.: К теории частично упорядоченных групп. Матем. сб. *20*, 1947, 145—178.

Eingegangen am 29. 6. 1971

Katedra matematiky
Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej
Košice