František Machala
Koordinatisation affiner Ebenen mit Homomorphismus

Mathematica Slovaca, Vol. 27 (1977), No. 2, 181--193

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136142

Math. Slovaca, 27, 1977, No. 2, 181—193

KOORDINATISATION AFFINER EBENEN MIT HOMOMORPHISMUS

FRANTIŠEK MACHALA

Der Autor definierte in seiner Arbeit „Erweiterte lokale Ternärringe" [7] lokale Ternärringe und erweiterte lokale Ternärringe, in der Arbeit „Koordinatisation projektiver Ebenen mit Homomorphismus" [8] verwendet er diese Strukturen zur Koordinatisation projektiver Ebenen mit Homomorphismus [5].

In der vorliegenden Arbeit wird die Koordinatisation affiner Ebenen mit Homomorphismus durch lokale Ternärringe durchgeführt, wobei sich der in [7] aufgestellte algebraische Apparat auswirkt. Nach Definition 8 wird der, bestimmter Bedingung genügende lokale Ternärring $T=(R, t)$, $\mathcal{A}$-zulässig genannt. Der affine lokale Ternärring $\mathcal{T}=(R, t, t_1)$ ist ein lokaler Ternärring, an dem eine partielle Ternäroperation t_1 eingeführt wird (Definition 9). Im Satz 6 wird gezeigt, daß sich auf der Menge R von Punkten einer beliebigen Geraden in affiner Ebene mit Homomorphismus eine Ternäroperation t und eine partielle Ternäroperation t_1 konstuieren lassen, wobei $\mathcal{T}=(R, t, t_1)$ ein affiner lokaler Ternärring ist. Umgekehrt läßt sich mit beliebigem affinen lokalen Ternärring eine affine Ebene mit Homomorphismus konstruieren.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden $\mathcal{R}$-zulässige affine Ebenen mit Homomorphismus definiert (Definition 12) und es wird gezeigt, daß sich genau diese mit Hilfe der $\mathcal{A}$-zulässigen lokalen Ternärringe koordinatisieren lassen, d.h. mit Hilfe der Strukturen, an denen nur eine einzige Ternäroperation definiert ist. Jede affine Ebene ist $\mathcal{R}$-zulässig und jede desargeuessche affine Ebene mit Homomorphismus ist ebenso $\mathcal{R}$-zulässig (Bemerkung 6 und [5]).

In [1] und [2] werden affine H-Ebenen [4] koordinatisiert, die einen Spezialfall affiner Ebenen mit Homomorphismus bilden.

I

Definition 1. *Ein Ternärring T ist ein Paar (R, t), wo R eine Menge, t eine Ternäroperation über R sind, wobei folgende Bedingungen* K_1, K_2 *gelten:*

K_1. *Es existieren Elemente* $o, 1 \in R$, $o \neq 1$ *mit* $t(o, a, b) = t(a, o, b) = b$, $t(1, a, o) = t(a, 1, o) = a$ $\forall a, b \in R$.

K_2. *Für beliebige $a, b, c \in R$ existiert gerade ein Element $x \in R$ (kurz $\exists!\, x \in R$), so daß $c = t(a, b, x)$.*

Definition 2. *Ein Ternärring $T = (R, t)$ ist ein Ternärkörper, falls für beliebige $a, b, c, d \in R$ mit $a \neq c$ gilt:*

K_3. $\exists!\, x \in R,\ t(x, a, b) = t(x, c, d)$.

K_4. $\exists!\, (x, y) \in R \times R,\ b = t(a, x, y),\ d = t(c, x, y)$.

Definition 3. *Es seien $T_1 = (R_1, t_1)$, $T_2 = (R_2, t_2)$ Ternärringe. Die Abbildung φ der Menge R_1 auf die Menge R_2 heißt ein Epimorphismus des Ternärringes T_1 auf T_2, falls $[t_1(a, b, c)]^{\varphi} = t_2(a^{\varphi}, b^{\varphi}, c^{\varphi})\ \forall a, b, c \in R$ gilt. Ein Epimorphismus φ ist ein Isomorphismus, falls φ eine bijektive Abbildung der Menge R_1 auf R_2 ist.*

Definition 4. *Es seien $T = (R, t)$ ein Ternärring und R_0 eine Teilmenge aus R. Setzen wir $a \oplus r = t(1, a, r)\ \forall \in R\ \forall r \in R_0$. R_0 ist ein Ideal des Ternärringes T, wenn folgendes gilt:*

(i) $o \in R_0$

(ii) *Falls $b = a \oplus r$ ist, so existiert ein $r' \in R$ mit $a = b \oplus r'$.*

(iii) *Es seien $a, b, c \in R$; $r_1, r_2, r_3 \in R_0$. Dann existiert ein $r' \in R_0$ mit $t(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = t(a, b, c) \oplus r'$.*

(iv) *Gilt $t(a, b, x') = t(a, b, x) \oplus r$, so existiert ein $r' \in R_0$ mit $x' = x \oplus r'$.*

Satz 1. *Es sei R_0, $R_0 \neq R$ ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$. Setzen wir $\bar{a} = \{a \oplus r \mid r \in R_0\}$ und $R/R_0 = \{\bar{a} \mid a \in R\}$, so ist R/R_0 eine Zerlegung der Menge R. Setzen wir weiter $t'(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \overline{t(a, b, c)}\ \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R/R_0$, so ist t' eine Ternäroperation über R/R_0 und $T' = (R/R_0, t')$ bildet einen Ternärring. Die Abbildung φ: $a \to \bar{a}\ \forall a \in R$ ist ein Epimorphismus des Ternärringes T auf T'.*

Zum Beweis siehe Beweise von Sätzen 3, 4, 5 [7].

Satz 2. *Es sei φ ein Epimorphismus des Ternärringes $T_1 = (R_1, t_1)$ auf den Ternärring $T_2 = (R_2, t_2)$. Dann ist $R_0 = \{a \in R \mid a^{\varphi} = o^{\varphi}\}$ ein Ideal in T_1, $R_0 \neq R_1$ und Ternärringe $T' = (R_1/R_0, t')$ T_2 sind isomorph.*

Zum Beweis siehe den Beweis des Satzes 5, [7].

Definition 5. *Es sei $T = (R, t)$ ein Ternärring und R_0, $R_0 \neq R$ ein Ideal in T. Im Satz 1 beschriebener Ternärring $T' = (R/R_0, t')$ heißt ein durch das Ideal R_0 bestimmter Restklassen-Ternärring.*

Definition 6. *Es sei R_0, $R_0 \neq R$ ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$ und $T' = (R/R_0, t')$ ein durch dieses Ideal bestimmter Restklassen-Ternärring. Das Ideal R_0 ist vollständig, wenn für beliebige Elemente $a, b, c, d \in R$, $\bar{a} \neq \bar{c}$ gilt:*

K_3'. (a) $\exists!\, x \in R,\ t(x, a, b) = t(x, c, d)$.

(b) *Falls $t'(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}) = t'(\bar{x}, \bar{c}, \bar{d})$ und gleichzeitig $t'(\bar{x}', \bar{a}, \bar{b}) = t'(\bar{x}', \bar{c}, \bar{d})$ ist, dann folgt $\bar{x} = \bar{x}'$.*

K_4'. (a) $\exists!\ (x, y) \in R \times R,\ b = t(a, x, y),\ d = t(c, x, y)$.

(b) Falls $\bar{b} = t'(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y})$, $\bar{d} = t'(\bar{c}, \bar{x}, \bar{y})$ und gleichzeitig $\bar{b} = t'(\bar{a}, \bar{x}', \bar{y}')$, $\bar{d} = t'(\bar{c}, \bar{x}', \bar{y}')$ ist, dann folgt $\bar{x}' = \bar{x}$, $\bar{y}' = \bar{y}$.

Satz 3. *Falls R_0 ein vollständiges Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$ ist, so bildet der Restklassen-Ternärring $T' = (R/R_0, t')$ einen Ternärkörper.*

Zum Beweis siehe den Beweis des Satzes 7, [7].

Definition 7. *Ein Ternärring, der ein vollständiges Ideal enthält, ist ein lokaler* Ternärring.

Definition 8. *Ein lokaler Ternärring $T = (R, t)$ mit vollständigem Ideal R_0 ist $\mathscr{A}$-zulässig, falls für beliebige Elemente a, b, $d \in R$, $c \in R_0$ ein einziges Paar $(x, y) \in R \times R$ derart existiert, daß $y = t(x, a, b)$, $x = t(y, c, d)$ gilt.*

Definition 9. *Es seien $T = (R, t)$ ein lokaler Ternärring mit vollständigem Ideal* R_0 *und $T' = (R/R_0, t')$ ein durch das Ideal R_0 bestimmter Restklassen-Ternärring. Unter einem affinen lokalen Ternärring versteht man das Tripel $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$. Dabei t_1 ist eine Abbildung der Menge $R \times R_0 \times R$ in R mit folgenden* Beziehungen:

(1) $t_1(a, b, c) \in \bar{c}\ \forall a, c \in R\ \forall b \in R_0$, wo $\bar{c} \in R/R_0$.

(2) $\forall a, d \in R\ \forall b \in R_0\ \exists!\ c \in R,\ d = t_1(a, b, c)$.

(3) $\forall a, b, c, d \in R$ wo $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} \neq \bar{d}$ $\exists!\ (x, y) \in R_0 \times R$, $a = t_1(b, x, y)$, $c = t_1(d, x, y)$.

(4) $\forall a, b, d \in R\ \forall c \in R_0\ \exists!\ (x, y) \in R \times R,\ y = t(x, a, b),\ x = t_1(y, c, d)$.

Satz 4. 1. *$\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ sei ein affiner lokaler Ternärring und R_0 ein vollständiges Ideal in $T = (R, t)$. Gilt $t_1(a, b, c) = = t(a, b, c)\ \forall a, c \in R\ \forall b \in R_0$, so ist der lokale Ternärring T $\mathscr{A}$-zulässig.*

2. *Ein lokaler Ternärring $T = (R, t)$ mit vollständigem Ideal R_0 sei $\mathscr{A}$-zulässig. Werde mit t_1 die Restriktion der Ternäroperation t auf die Menge $R \times R_0 \times R$ bezeichnet, dann stellt $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ einen affinen lokalen Ternärring dar.*

Beweis. 1. Da $t_1(a, b, c) = t(a, b, c)\ \forall a, c \in R\ \forall b \in R_0$ gilt, existiert gemäß (4) aus Definition 9 für Elemente $a, b, d \in R$, $c \in R_0$ gerade ein Paar $(x, y) \in R \times R$ so, daß $y = t(x, a, b)$, $x = t(y, c, d)$. Dann ist nach Definition 8 der lokale Ternärring T $\mathscr{A}$-zulässig.

2. Bezeichnen wir mit $T' = (R/R_0, t')$ den durch das Ideal R_0 bestimmten Restklassen-Ternärring. Nach Satz 1 bildet die Abbildung $a \to \bar{a}$ mit $a \in R$, $\bar{a} \in R/R_0$ einen Homomorphismus des lokalen Ternärringes T auf T' und nach Satz 3 ist T' ein Ternärkörper. Somit gilt $\overline{t(a, b, c)} = t'(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = = t'(\bar{a}, \bar{o}, \bar{c}) = \bar{c}$ für beliebige a, $c \in R$, $b \in R_0$ und daraus folgt $t_1(a, b, c) = t(a, b, c) \in \bar{c}$. Damit ist die Forderung (1) aus Definition 9 erfüllt. Da T ein Ternärring ist, gilt die Forderung (2). Es seien $a, b, c, d \in R$, wo $\bar{a} = \bar{c}$,

$\bar{b} \neq \bar{d}$. Nach K_4' (a) besteht ein einziges Paar $(x, y) \in R \times R$ derart, daß $a = t(b, x, y)$, $c = t(d, x, y)$. Nehmen wir an, daß $x \notin R_0$, also $\bar{x} \neq \bar{o}$ gilt. Danach ist $\bar{a} = t'(\bar{b}, \bar{o}, \bar{a}) = t'(\bar{b}, \bar{x}, \bar{y}) = t'(\bar{d}, \bar{x}, \bar{y}) = \bar{c} = t'(\bar{d}, \bar{o}, \bar{a})$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme K_3, weil T' ein Ternärkörper ist. Es gilt also $x \in R_0$ und folglich $a = t(b, x, y) = t_1(b, x, y)$, $c = t(d, x, y) = t_1(d, x, y)$. So dann ist auch die Forderung (3) aus Definition 9 erfüllt. Die letzte Forderung (4) aus Definition 9 folgt aus Definition 8.

Beispiele

1. Ein Ternärkörper $T = (R, t)$ bildet einen $\mathscr{A}$-zulässigen lokalen Ternärring: Nach Beispiel 1, [7] ist T ein lokaler Ternärring mit vollständigem Ideal $\{o\}$. Für Elemente $a, b, c \in R$, $c = o$ gilt dann $x = t(y, c, d) = d$ und $y = t(d, a, b) = t(x, a, b)$.

2. Es sei $\mathscr{R} = (R, +, \cdot)$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal R_0 ([6], [7]). Setzt man $t(a, b, c) = ab + c\ \forall a, b, c \in R$, dann stellt $T = (R, t)$ nach Beispiel 2, [7] einen lokalen Ternärring dar. Betrachten wir die Gleichungen $y = t(x, a, b)$, $x = t(y, c, d)$ wo $a, b, d \in R$, $c \in R_0$, woraus sich $y = xa + b$, $x = yc + d$ ergibt und daher $y = (yc + d)a + b$. Daraus bekommt man $y(1 - ca) = da + b$. Wegen $c \in R_0$ gilt $ca \in R_0$ und $1 - ca \notin R_0$. Somit liegt in R ein zu $1 - ca$ inverses Element $(1 - ca)^{-1}$ vor und es gilt $y = (da + b)(1 - ca)^{-1}$, $x = (da + b)(1 - ca)^{-1}c + d$. Das System von Gleichungen $y = t(x, a, b)$, $x = t(y, c, d)$ hat also eine Lösung und der lokale Ternärring T ist $\mathscr{A}$-zulässig.

Definition 10. *Unter einer affinen Ebene mit Homomorphismus versteht man ein Tripel* $(\mathscr{A}, \mathscr{A}', \varkappa)$, *wo* $\mathscr{A} = (\mathscr{B}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ *eine Inzidenzstruktur,* $\mathscr{A}' = (\mathscr{B}' \ \mathscr{L}' \ \mathrm{I}')$ *eine affine Ebene,* $\varkappa \colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ *ein Epimorphismus sind* ([3], [8] Definition 2) *und wo folgende Bedingungen gelten:*

(1) $x, y \in \mathscr{B}$, $x\varkappa \neq y\varkappa \Rightarrow \exists !\ P \in \mathscr{L};\ x, y \ \mathrm{I}\ P$.

(2) $P, Q \in \mathscr{L}$, $P\varkappa \nparallel Q\varkappa \Rightarrow \exists !\ x \in \mathscr{B};\ x \ \mathrm{I}\ P, Q$.

(3) *Auf der Menge* $\mathscr{L}$ *ist eine Äquivalenzrelation* π *erklärt, für die gilt:*

(a) *Durch jeden Punkt aus* $\mathscr{B}$ *geht eine einzige Gerade aus jeder Äquivalenzklasse von* π.

(b) *Gehören die Geraden* P, Q *derselben Äquivalenzklasse von* π, *dann* $P\varkappa \parallel Q\varkappa$.

Bemerkung 1. Unter affiner Ebene mit Homomorphismus wird im weiteren direkt die Inzidenzstruktur $\mathscr{A}$ aus Definition 10 verstanden. Die zugehörige affine Ebene wird mit $\mathscr{A}'$ und der zugehörige Epimorphismus mit $\varkappa$ bezeichnet. Jede affine Ebene bildet eine affine Ebene mit Homomorphismus. Die einzige Gerade P, die nach (1) durch die Punkte x, y bestimmt ist, bezeichnen wir mit $P = xy$. Mit $x = P \sqcap Q$ bezeichnen wir den nach (2) durch die Geraden P, Q bestimmten einzigen Punkt x.

Bemerkung 2. Zwei Geraden sind parallel dann und nur dann, wenn sie derselben Äquivalenzklasse gehören. Der Parallelismus in $\mathscr{A}$ sowie auch in $\mathscr{A}'$ werden wir mit dem Symbol „$\|$" bezeichnen. Nach (3) (a) aus Definition 10 folgt: Durch jeden Punkt aus $\mathscr{B}$ läßt sich zu jeder Geraden aus $\mathscr{L}$ genau eine parallele Gerade ziehen.

Definition 11. $\mathscr{A} = (\mathscr{B}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ *sei eine affine Ebene mit Homomorphismus* $\varkappa$. *Ein Tripel* $\mathscr{R} = (X, Y, e)$ *mit* $X, Y \in \mathscr{L}$, $e \in \mathscr{B}$ *ist ein Rahmen in* $\mathscr{A}$, *falls* $X\varkappa \nparallel Y\varkappa$, $e\varkappa \not{\mathrm{I}}'\, X\varkappa$, $Y\varkappa$ *gilt.*

Bemerkung 3. Es sei $\mathscr{R} = (X, Y, e)$ ein Rahmen in $\mathscr{A}$. Gemäß (2) aus Definition 10 und nach Bemerkung 1 können wir $o = X \sqcap Y$ schreiben. Danach ist $o\varkappa \neq e\varkappa$. Im weiteren werden wir folgende Bezeichnungen beachten: Wir setzen $E = oe$. Die mit Y bzw. X parallele und durch den Punkt e gehende Gerade bezeichnen wir E' bzw. E''. Dann gilt $E\varkappa \neq X\varkappa$, $Y\varkappa$; $E'\varkappa \neq Y\varkappa$; $E''\varkappa \neq X\varkappa$.

Es sei $\mathscr{R} = (X, Y, e)$ ein Rahmen in affiner Ebene $\mathscr{A}$ mit Homomorphismus $\varkappa$ und setzen wir $R = \{x \in \mathscr{B} \mid x \,\mathrm{I}\, X\}$, $R_0 = \{x \in R \mid x\varkappa = o\varkappa\}$. Definieren wir eine Abbildung $\xi: R \times R \to \mathscr{B}$ durch folgende Konstruktion:

(A1) Es sei $(x, y) \in R \times R$. Durch den Punkt y führen wir eine mit der Geraden Y parallele Gerade, ihren Schnittpunkt mit der Geraden E bezeichnen wir mit w, durch den Punkt w führen wir eine Parallele X' mit der Geraden X (Abb. 1).

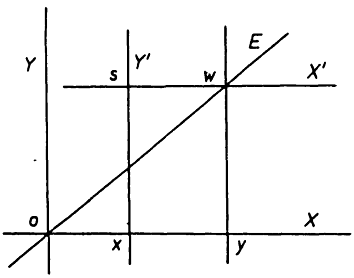

Abb. 1

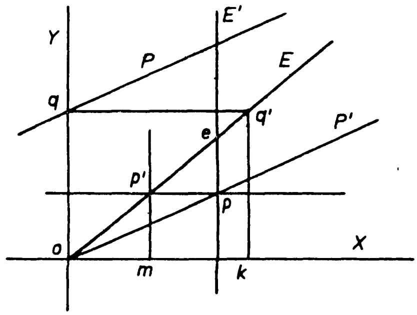

Abb. 2

Führen wir weiter durch den Punkt x eine mit der Geraden Y parallele Gerade Y'. Bezeichnen wir $s = X' \sqcap Y'$ und setzen wir $s = (x, y)^{\xi}$. Die Abbildung ξ ist eine bijektive Abbildung der Menge $R \times R$ auf die Menge $\mathscr{B}$.

Definieren wir eine Abbildung $\eta: R \times R \to \mathscr{L}$ durch folgende Konstruktion:

(A2) Es sei $(m, k) \in R \times R$. Führen wir durch den Punkt m eine Parallele mit der Geraden Y, bezeichnen wir mit p' ihren Schnittpunkt mit E, führen wir durch den Punkt p' eine Parallele mit der Geraden X und bezeichnen wir mit p ihren Schnittpunkt mit der Geraden E' (Abb. 2). Führen wir durch den Punkt k eine

Parallele mit der Geraden Y, bezeichnen wir ihren Schnittpunkt mit der Geraden E mit q'. Führen wir schließlich durch den Punkt q' eine Parallele mit der Geraden X und bezeichnen wir mit q ihren Schnittpunkt mit der Geraden Y. Führen wir die Gerade P, $P\|P'$ durch den Punkt q, wo $P'=op$. Es gilt $P'\varkappa \nparallel Y\varkappa$ und deshalb auch $P\varkappa \nparallel Y\varkappa$. Setzen wir $P=(m, k)''$. Ist umgekehrt eine Gerade P, $P\varkappa \nparallel Y\varkappa$ gegeben, so ergibt sich durch ein zu (A2) umgekehrtes Verfahren, daß ein einziges Paar $(m, k)\in R\times R$ mit $P=(m, k)''$ existiert.

Definieren wir eine Abbildung $\zeta: R_0\times R\to\mathscr{L}$ durch folgende Vorschrift:

(A3) Es sei $(n, k)\in R_0\times R$. Führen wir durch den Punkt n eine Parallele mit der Geraden Y, bezeichnen wir mit r ihren Schnittpunkt mit der Geraden E'' und setzen $Q'=or$ (Abb. 3). Führen wir durch den Punkt k die Gerade Q, $Q\|Q'$. Dann bekommt man $Q'\varkappa=Y\varkappa$ und mithin $Q\varkappa\|Y\varkappa$. Setzen wir $Q=(n, k)^{\zeta}$. Ist umgekehrt eine Gerade Q, $Q\varkappa\|Y\varkappa$ gegeben, so ergibt sich durch ein zu (A3) umgekehrtes Verfahren, daß ein einziges Paar $(n, k)\in R_0\times R$ mit $(n, k)^{\zeta}\in Q$ existiert.

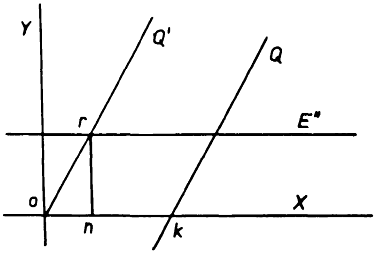

Abb. 3

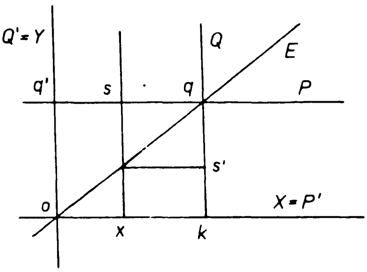

Abb. 4

Im weiteren setzen wir $(x, y)^{\xi}=[x, y]$ $\forall(x, y)\in R\times R$, $(m, k)^{\zeta}=\langle m, k\rangle$ $\forall(m, k)\in R\times R$, $(n, k)^{\zeta}=\ll n, k\gg$ $\forall(n, k)\in R_0\times R$. Definieren wir auf der Menge $R\times R\times R$ eine Ternäroperation t durch die Vorschrift $y=t(x, m, k)\Leftrightarrow[x, y]\ \mathrm{I}\ \langle m, k\rangle$ und auf der Menge $R\times R_0\times R$ eine Ternäroperation t_1 durch die Vorschrift $x=t_1(y, n, k)\Leftrightarrow[x, y]\ \mathrm{I}\ \ll n, k\gg$.

Satz 5. *Ist $\mathscr{A}=(\mathscr{B}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ eine affine Ebene, so gilt $t(x, o, k)=t_1(x, o, k)$ $\forall x$, $k\in R$ und das Paar $T=(R, t)$ bildet einen Ternärkörper.*

Beweis. Es seien x, $k\in R$ und setzen wir $y=t(x, o, k)$, $s=[x, y]$, $P=\langle o, k\rangle$. Dann gilt $s\ \mathrm{I}\ P$. Gemäß (A2) ist $P'=X$, $P\|X$ und gemäß (A1) bekommt man $y=k$ (Abb. 4). Setzt man weiter $y'=t_1(x, o, k)$, $s'=[y', x]$, $Q=\ll o, k\gg$, so gilt $s'\ \mathrm{I}\ Q$. Nach (A3) ergibt sich $Q'=Y$ und $Q\|Y$. Nach (A1) ist sodann $y'=k$, also $t(x, o, k)==t_1(x, o, k)$. Gemäß [9] stellt $T=(R, t)$ einen Ternärkörper dar.

Satz 6. *Ist $\mathscr{R} = (X, Y, e)$ ein Rahmen in einer affinen Ebene $\mathscr{A} = (\mathscr{B}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ mit Homomorphismus $\varkappa$, dann bildet das Tripel $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ einen affinen lokalen* Ternärring.

Beweis. 1. Zuerst wollen wir beweisen, daß $T = (R, t)$ einen Ternärring bildet.

ad K_1. Gegeben seien $x = o$; $m, k \in R$ und setzen wir $y = t(o, m, k)$, $s = [o, y]$, $P = \langle m, k \rangle$. Dann folgt $s \mathrm{I} P$. Nach (A1) gilt $s \mathrm{I} Y$ und nach (A2) ergibt sich $y = k$. Es seien $x, k \in R$; $m = o$ und setzen wir $y = t(x, o, k)$, $s = [x, y]$, $P = \langle o, k \rangle$. Danach $s \mathrm{I} P$ und gemäß (A2) gilt $P' = X$, $P \| X$. Daraus erhält man $y = k$. Bezeichnen wir $1 = E' \sqcap X$ und setzen wir $y = t(1, m, o)$, $m \in R$, $s = [1, y]$, $P = \langle m, o \rangle$. Dann gilt $s \mathrm{I} P$, nach (A2) ergibt sich $P' = P$ und nach (A1) ist $m = y$. Ähnlich können wir zeigen, daß $t(x, 1, o) = x \; \forall x \in R$ gilt.

ad K_2. Gegeben seien $x, m, y \in R$ und bezeichnen wir $s = [x, y]$. Gemäß (A2) konstruieren wir durch den Punkt m die Gerade P' und druch den Punkt s führen wir die Gerade P, $P \| P'$. Sodann gilt $P\varkappa \not\| Y\varkappa$ und wir können $q = P \sqcap Y$ schreiben. Mittels des Punktes q bestimmen wir nach (A2) den Punkt k, $k \mathrm{I} X$. Dann bekommt man $[x, y] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ und $y = t(x, m, k)$. Der Punkt k ist der einzige Punkt von dieser Eigenschaft.

2. Jetzt beweisen wir, daß $T = (R, t)$ einen lokalen Ternärring bildet. Bezeichnen wir weiter mit $\mathscr{A}' = (\mathscr{B}', \mathscr{L}', \mathrm{I}')$ die affine Ebene, die ein Bild von $\mathscr{A}$ im Epimorphismus $\varkappa$ darstellt. Setzen wir $R' = \{m' \in \mathscr{B}' \mid m' \mathrm{I}' X\varkappa\}$ und bestimmen wir nach Satz 3 den Ternärkorper $T' = (R', t')$. Betrachten wir die durch die Vorschrift $x^{\varphi} = x\varkappa \; \forall x \in R$ bestimmte Abbildung $\varphi: R \to R'$, dann gilt $R_0^{\varphi} = o\varkappa$. Gegeben seien $x, m, k \in R$ und setzen wir $y = t(x, m, k)$, $s = [x, y]$, $P = \langle m, k \rangle$. Dann folgt $s \mathrm{I} P$. Da $\varkappa$ einen Homomorphismus $\mathscr{A}$ auf $\mathscr{A}'$ bildet, gilt $s\varkappa = [x\varkappa, y\varkappa]$ nach (A1) und $P\varkappa = \langle m\varkappa, k\varkappa \rangle$, $s\varkappa \mathrm{I}' P\varkappa$ nach (A2). Dies bedeutet, daß $y\varkappa = t'(x\varkappa, m\varkappa, k\varkappa)$ ist und daraus $[t(x, m, k)]^{\varphi} = t'(x^{\varphi}, m^{\varphi}, k^{\varphi})$. Die Abbildung φ bildet deshalb einen Epimorphismus des Ternärringes $T = (R, t)$ auf den Ternärkörper $T' = (R', t')$. Nach Satz 2 ist R_0 ein Ideal in T und der Restklassen-Ternärring $\bar{T} = (R/R_0, \bar{t})$ ist isomorph mit T'. Somit stellt $\bar{T}$ einen Ternärkörper dar und es gilt $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a\varkappa = b\varkappa$ für $\bar{a}, \bar{b} \in R/R_0$.

Wir beweisen weiter, daß R_0 ein vollständiges Ideal in T bildet.

ad $K_3'(a)$, Es seien $m_1, k_1, m_2, k_2 \in R$, $\bar{m}_1 \neq \bar{m}_2$. Betrachten wir die Geraden $P_1 = \langle m_1, k_1 \rangle$, $P_2 = \langle m_2, k_2 \rangle$. Wegen $\bar{m}_1 \neq \bar{m}_2$ gilt nach (A_2) $P_1'\varkappa \neq P_2'\varkappa$ und $P_1\varkappa \not\| P_2\varkappa$. Die Geraden P_1, P_2 schneiden sich somit in einem eizigen Punkt $s = [x, y]$. Sodann gilt $y = t(x, m_1, k_1) = t(x, m_2, k_2)$.

ad $K_3'(b)$. Es werde vorausgesetzt, daß $\bar{t}(\bar{x}, \bar{m}_1, \bar{k}_1) = \bar{t}(\bar{x}, \bar{m}_2, \bar{k}_2)$, $\bar{t}(\bar{x}', \bar{m}_1, \bar{k}_1) = \bar{t}(\bar{x}', \bar{m}_2, \bar{k}_2)$ gilt. Da $\bar{T}$ einen Ternärkörper bildet, so gilt $\bar{x} = \bar{x}'$ gemäß K_3,

ad $K_4'(a)$. Es seien $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$, $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$. Setzen wir $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$. Wegen $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ gilt $s_1\varkappa \neq s_2\varkappa$ und $P\varkappa \not\| Y\varkappa$, wo $P = s_1 s_2$. Dann gibt es ein einziges Paar

$(m, k) \in R \times R$ so, daß $P = \langle m, k \rangle$ gilt und daraus ergibt sich $y_1 = t(x_1, m, k)$, $y_2 = t(x_2, m, k)$.

ad $K_4'(b)$. Den Beweis führen wir ganz analog, wie in $K_3'(b)$.

3. Wir beweisen, daß die Ternäroperation t_1 den Forderungen (1)—(4) aus Definition 9 genügt.

ad (1). Es seien $y, k \in R$, $n \in R_0$ und setzen wir $x = t_1(y, n, k)$, $s = [x, y]$, $Q = \ll n, k \gg$. Sodann gilt $s \mathrm{I} Q$. Nach (A3) folgt $Q\varkappa \| Y\varkappa$ und nach (A1) ergibt sich $x\varkappa = k\varkappa$. Daher gilt $\bar{x} = \bar{k}$, $x \in \bar{k}$.

ad (2). Es seien $x, y \in R$; $n \in R_0$ und setzen wir $s = [x, y]$. Konstruieren wir gemäß (A3) nach dem Punkt n die Gerade Q'. Dann erhält man $Q'\varkappa \| Y\varkappa$. Führen wir durch den Punkt s die Gerade Q, $Q \| Q'$. Es gilt $Q\varkappa \| Y\varkappa$ und die Gerade Q schneidet X im Punkt k. Aus (A3) folgt $Q = \ll n, k \gg$ und somit $x = t_1(y, n, k)$.

ad (3). Es seien $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$; $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$. Bezeichnen wir $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$. Wegen $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$ gilt $s_1\varkappa \neq s_2\varkappa$ und wir können $Q = s_1 s_2$ setzen. Wegen $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ gilt $Q\varkappa \| Y\varkappa$. Nach (A3) gibt es ein einziges Paar $(n, k) \in R_0 \times R$ derart, daß $Q = \ll n, k \gg$ und es folgt $x_1 = t_1(y_1, n, k)$, $x_2 = t_1(y_2, n, k)$.

ad (4). Es seien $m, k_1, k_2 \in R$; $n \in R_0$ und setzen wir $P = \langle m, k_1 \rangle$, $Q = \ll n, k_2 \gg$. Daraus erhält man $P\varkappa \nparallel Y\varkappa$ und $Q\varkappa \| Y\varkappa$. Es gilt $P\varkappa \nparallel Q\varkappa$ und die Geraden P, Q schneiden sich in einem einzigen Punkt $s = [x, y]$. Sodann ergibt sich $y = t(x, m, k_1)$, $x = t_1(y, n, k_2)$.

Damit ist der Beweis des Satzes 6 beendet.

Es sei $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein affiner lokaler Ternärring. $T = (R, t)$ bildet sodann einen lokalen Ternärring, dessen vollständiges Ideal mit R_0 bezeichnet wird. Nach Satz 3 stellt $T' = (R/R_0, t') = (R', t')$ einen Ternärkörper dar und nach Satz 1 ist die Abbildung $\varphi: a \to \bar{a}\ \forall a \in R$ ein Epimorphismus von T auf T'. Gegeben seien $a, c \in R$, $b \in R_0$. Nach Definition 9 gilt $t_1(a, b, c) \in \bar{c}$, $\bar{c} \in R/R_0$ und deshalb erhält man $[t(a, b, c)]^{\varphi} = t'(a^{\varphi}, b^{\varphi}, c^{\varphi}) = t'(\bar{a}, \bar{o}, \bar{c}) = \bar{c} = \overline{t_1(a, b, c)} = [t_1(a, b, c)]^{\varphi}$.

Es seien $\mathcal{B}'$, $\mathcal{L}_1'$, $\mathcal{L}_2'$ Mengen mit $\mathcal{B}' \cap \mathcal{L}_1' = \mathcal{B}' \cap \mathcal{L}_2' = \mathcal{L}_1' \cap \mathcal{L}_2' = \emptyset$, ζ' eine bijektive Abbildung der Menge $R' \times R'$ auf $\mathcal{B}'$, η' eine bijektive Abbildung der Menge $R' \times R'$ auf $\mathcal{L}_1'$ und ζ' eine bijektive Abbildung der Menge $\bar{o} \times R'$ auf $\mathcal{L}_2'$. Setzen wir $(\bar{x}, \bar{y})^{\xi'} = [\bar{x}, \bar{y}]$, $(\bar{m}, \bar{k})^{\eta'} = \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle$, $(\bar{o}, \bar{k})^{\zeta'} = \ll \bar{o}, \bar{k} \gg$, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_1' \cup \mathcal{L}_2'$ und erklären wir eine Inzidenzrelation $\mathrm{I}' \subset \mathcal{B}' \times \mathcal{L}'$ durch folgende Vorschriften: $[\bar{x}, \bar{y}] \mathrm{I}' \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle \Leftrightarrow \bar{y} = t'(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k})$, $[\bar{x}, \bar{y}] \mathrm{I}' \ll \bar{o}, \bar{k} \gg \Leftrightarrow \bar{x} = t'(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k})$. Dann bildet die Inzidenzstruktur $\mathcal{A}' = (\mathcal{B}', \mathcal{L}', \mathrm{I}')$ eine affine Ebene (siehe z.B. [9]). Dabei gilt $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \| \langle \bar{c}, \bar{d} \rangle \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{c}$, $\ll \bar{o}, \bar{x} \gg \| \ll \bar{o}, \bar{k} \gg\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in R'$.

Es seien weiter $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ Mengen mit $\mathcal{B} \cap \mathcal{L}_1 = \mathcal{B} \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$, ξ eine bijektive Abbildung der Menge $R \times R$ auf $\mathcal{B}$, η eine bijektive Abbildung der Menge $R \times R$ auf $\mathcal{L}_1$ und ζ eine bijektive Abbildung der Menge $R_0 \times R$ auf $\mathcal{L}_2$.

Setzen wir $(x, y)^\xi = [x, y]$, $(m, k)^\eta = \langle m, k\rangle$, $(n, k)^\zeta = \ll n, k \gg$, $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$. Erklären wir eine Inzidenzrelation $\mathrm{I} \subset \mathscr{B} \times \mathscr{L}$ durch folgende Vorschriften: $[x, y]\,\mathrm{I}\,\langle m, k\rangle \Leftrightarrow y = t(x, m, k)$, $[x, y]\,\mathrm{I} \ll n, k \gg \Leftrightarrow x = t_1(y, n, k)$.

Satz 7. *Die Inzidenzstruktur* $\mathscr{A} = (\mathscr{B}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ *ist eine affine Ebene mit Homomorphismus.*

Beweis. Definieren wir eine Abbildung $\varkappa: \mathscr{B} \cup \mathscr{L} \to \mathscr{B}' \cup \mathscr{L}'$ folgendermaßen: $[x, y]\varkappa = [\bar{x}, \bar{y}]$, $\langle m, k\rangle\varkappa = \langle \bar{m}, \bar{k}\rangle$, $\ll n, k \gg \varkappa = \ll \bar{n}, \bar{k} \gg$. Nehmen wir an, daß $[x, y]\,\mathrm{I}\ \langle m, k\rangle$ gilt. Dann $y = t(x, m, k)$ und $y^\varphi = [t(x, m, k)]^\varphi = t'(x^\varphi, m^\varphi, k^\varphi) = t'(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k}) = \bar{y}$. Daraus ergibt sich $[\bar{x}, \bar{y}]\,\mathrm{I}'\langle \bar{m}, \bar{k}\rangle$ und $[x, y]\varkappa\,\mathrm{I}'\langle m, k\rangle\varkappa$. Gilt $[x, y]\,\mathrm{I} \ll n, k \gg$, so folgt $x = t_1(y, n, k)$ und $x^\varphi = [t_1(y, n, k)]^\varphi = [t(y, n, k)]^\varphi = t'(\bar{y}, \bar{o}, \bar{k}) = \bar{x}$. Somit erhält man $[\bar{x}, \bar{y}]\,\mathrm{I}' \ll \bar{n}, \bar{k} \gg$. Die Abbildung $\varkappa$ bildet einen Homomorphismus der Inzidenzstruktur $\mathscr{A}$ auf die affine Ebene $\mathscr{A}'$.

Nun prüfen wir die Gültigkeit der Forderungen (1)—(3) aus Definition 10 nach.

ad (1). Es seien $p = [a, b]$, $q = [c, d]$, $p\varkappa \neq q\varkappa$. Daraus folgt $\bar{a} \neq \bar{c} \vee \bar{b} \neq \bar{d}$.

a) Setzen wir voraus, daß $\bar{a} \neq \bar{c}$. Da $T = (R, t)$ ein lokaler Ternärring ist, gibt es nach K_4'(a) ein einziges Paar $(x, y) \in R \times R$ so, daß $b = t(a, x, y)$, $d = t(c, x, y)$ gilt. Daraus folgt dann $p, q\,\mathrm{I}\langle x, y\rangle$. Setzen wir jetzt $p, q\,\mathrm{I} \ll x, y \gg$ voraus. Danach gilt $a = t_1(b, x, y)$, $c = t_1(d, x, y)$, $x \in R_0$. Nach (1) aus Definition 9 ergibt sich $\bar{a} = a^\varphi = [t_1(b, x, y)]^\varphi = \bar{y} = [t_1(d, x, y)]^\varphi = c^\varphi = \bar{c}$. Dies ist jedoch ein Widerspruch.

b) Setzen wir voraus, daß $\bar{a} = \bar{c}$. Dann gilt $\bar{b} \neq \bar{d}$. Nach (3) aus Definition 9 gibt es ein einziges Paar $(x, y) \in R_0 \times R$ derart, daß $a = t_1(b, x, y)$, $c = t_1(d, x, y)$. Daraus erhält man $p, q\,\mathrm{I} \ll x, y \gg$. Setzen wir jetzt $p, q\,\mathrm{I}\,\langle x, y\rangle$ voraus. Danach gilt $b = t(a, x, y)$, $d = t(c, x, y)$ und daraus folgt $b^\varphi = t'(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y}) = t'(\bar{c}, \bar{x}, \bar{y}) = d^\varphi$, was einen Widerspruch enthält.

ad (2). a) Es seien $P = \langle a, b\rangle$, $Q = \langle c, d\rangle$, $P\varkappa \nparallel Q\varkappa$. Dann gilt $\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle \nparallel \langle \bar{c}, \bar{d}\rangle$, also $\bar{a} \neq \bar{c}$. Da $T = (R, t)$ einen lokalen Ternärring bildet, gibt es nach K_3' ein einziges Element $x \in R$ derart, daß $t(x, a, b) = t(x, c, d) = y$. Somit ist $[x, y]\,\mathrm{I}\,P, Q$.

b) Es seien $P = \langle a, b\rangle$, $Q = \ll c, d \gg$. Daraus ergibt sich $c \in R_0$ und $P\varkappa \nparallel Q\varkappa$. Nach (4) aus Definition 9 gibt es ein einziges Paar $(x, y) \in R \times R$ derart, daß $y = t(x, a, b)$, $x = t_1(y, c, d)$. Somit ist $[x, y]\,\mathrm{I}\,P, Q$.

ad (3). Werde $\langle a, b\rangle \parallel \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a = c$, $\ll a, b \gg \parallel \ll c, d \gg \Leftrightarrow a = c$ gesetzt. Dann ist „$\parallel$" eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{L}$.

(a). Es seien $[x, y] \in \mathscr{B}$, $\langle m, k\rangle \in \mathscr{L}_1$. Da $T = (R, t)$ einen Ternärring bildet, gibt es nach K_2 ein einziges Element $z \in R$ derart, daß $y = t(x, m, z)$. Daraus folgt $[x, y]\,\mathrm{I}\,\langle m, z\rangle$ und $\langle m, k\rangle \parallel \langle m, z\rangle$. Es seien $[x, y] \in \mathscr{B}$, $\ll n, k \gg \in \mathscr{L}_2$. Nach (2) aus Definition 9 gibt es ein einziges $z \in \mathscr{B}$ derart, daß $x = t_1(y, n, z)$. Sodann erhalten wir $[x, y]\,\mathrm{I} \ll n, z \gg$ und $\ll n, z \gg \parallel \ll n, k \gg$.

(b) Nehmen wir an, daß $\langle a, b\rangle \| \langle c, d\rangle$ gilt, also $a=c$. Dann ist $\langle a, b\rangle \varkappa = \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle$, $\langle c, d\rangle \varkappa = \langle \bar{c}, \bar{d}\rangle$, wo $\bar{a}=\bar{c}$. Deshalb ergibt sich $\langle a, b\rangle \varkappa \| \langle c, d\rangle \varkappa$. Ganz ähnlich geht man im Falle $\ll a, b \gg \| \ll c, d \gg$ vor.

Damit ist der Satz 7 bewiesen.

II

Es sei $\mathscr{R}=(X, Y, e)$ ein Rahmen in affiner Ebene $\mathscr{A}=(\mathscr{B}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ mit Homomorphismus $\varkappa$. Definieren wir eine Abbildung λ: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ durch folgende Vorschrift:

(B) Führen wir durch einen Punkt $a \in \mathscr{B}$ eine Gerade X', $X' \| X$ bzw. Y', $Y' \| Y$ und schreiben wir $q = X' \sqcap E$ bzw. $q' = Y' \sqcap E$ (Abb. 5). Führen wir durch den Punkt q bzw. q' eine Gerade Y'', $Y'' \| Y$ bzw. X'', $X'' \| X$ und bezeichnen wir $a^\lambda = X'' \sqcap Y''$. Die Abbildung λ ist eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{B}$ auf $\mathscr{B}$ und es gilt $(a^\lambda)^\lambda = a \ \forall a \in \mathscr{B}$, $b \mathrm{\ I\ } E \Rightarrow b^\lambda = b$, $b \mathrm{\ I\ } X \Leftrightarrow b^\lambda \mathrm{\ I\ } Y$. Ist $a, b \in \mathscr{B}$, $a\varkappa \neq b\varkappa$, dann auch $(a^\lambda)\varkappa \neq (b^\lambda)\varkappa$.

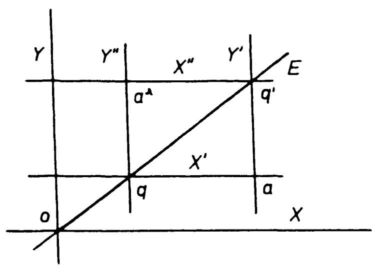

Abb. 5

Definition 12. *Es seien $\mathscr{R}=(X, Y, e)$ ein Rahmen in affiner Ebene $\mathscr{A}=(\mathscr{B}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ mit Homomorphismus $\varkappa$ und λ die in* (B) *beschriebene Abbildung. Die affine Ebene $\mathscr{A}$ mit Homomorphismus ist $\mathscr{R}$-zulässig, falls folgendes gilt:*

(1) *Die Bilder aller Punkte der Gerade P, $P\varkappa \| X\varkappa$ bzw. Q, $Q\varkappa \| Y\varkappa$ in der Abbildung λ liegen auf einer Geraden P^λ, $(P^\lambda)\varkappa \| Y\varkappa$ bzw. Q^λ, $(Q^\lambda)\varkappa \| X\varkappa$.*

(2) *P_1, P_2 seien die Geraden mit $P_1 \| P_2$. Gilt $P_1\varkappa \| X\varkappa$ bzw. $P_1\varkappa \| Y\varkappa$, so $P_1^\lambda \| P_2^\lambda$.*

Bemerkung 4. Ist eine affine Ebene $\mathscr{A}$ mit Homomorphismus $\mathscr{R}$-zulässig, so bilden nach Definition 12 die Bilder aller Punkte der Gerade P, $P\varkappa \| X\varkappa$ bzw. P, $P\varkappa \| Y\varkappa$ in der Abbildung λ die Menge aller Punkte der Gerade P^λ. Eine affine Ebene ist $\mathscr{R}$-zulässig für jeden Rahmen $\mathscr{R}$.

Satz 8. *Es seien* $\mathcal{A}=(\mathcal{B}, \mathcal{L}, \mathrm{I})$ *eine affine Ebene mit Homomorphismus* $\varkappa$ *und* $\mathcal{T}=(R, t, t_1)$ *der nach Satz 6 mit dem Rahmen* $\mathcal{R}=(X, Y, e)$ *konstruierte affine lokale Ternärring. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

(1) *Die affine Ebene* $\mathcal{A}$ *mit Homomorphismus ist* $\mathcal{R}$*-zulässig.*

(2) *Es gilt* $t_1(a, b, c)=t(a, b, c)\ \forall a, c\in R,\ b\in R_0$.

Beweis. (1)⇒(2). Es seien $x, k\in R$, $m\in R_0$. Nach der Konstruktion (A2) bestimmen wir mit dem Punkt m die Punkte p', p und die Gerade $P'=op$ (Abb. 6). Nach (A3) konstruieren wir mit dem Punkt m den Punkt r und die Gerade $Q'=or$. Wegen $m\in R_0$ gilt $P'\varkappa=X\varkappa$ und $Q'\varkappa=Y\varkappa$. Weiter gilt $p^\lambda=r$, $o^\lambda=o$. Da die affine Ebene $\mathcal{A}$ mit Homomorphismus $\mathcal{R}$-zulässig ist, erhält man $(P')^\lambda=Q'$ nach Definition 12 und Bemerkung 4. Nach (A2) bestimmen wir mit dem Punkt k die Punkte q', q und die Gerade P, $P\|P'$. Führen wir durch den Punkt k die Gerade Q, $Q\|Q'$. Wegen $q^\lambda=k$, $P\|P'$ gilt nach Definition 12 $P^\lambda\|(P')^\lambda$, $k\,\mathrm{I}\,P^\lambda$ und daraus folgt $P^\lambda=Q$. Setzt man $y_1=t(x, m, k)$, $y_2=t_1(x, m, k)$ und $s_1=[x, y_1]$, $s_2=[y_2, x]$, so gilt $s_1\,\mathrm{I}\,P$, $s_2\,\mathrm{I}\,Q$. Führen wir durch den Punkt x eine Gerade Y', $Y'\|Y$. Danach ist nach (A1) $s_1=Y'\sqcap P$. Bezeichnen

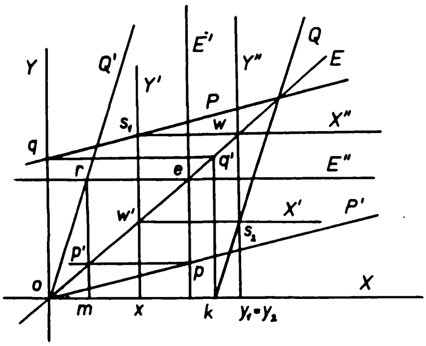

Abb. 6

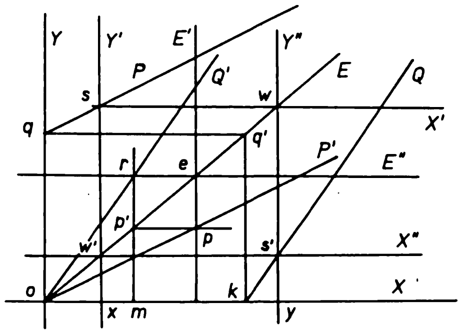

Abb. 7

wir $w'=Y'\sqcap E$ und führen wir durch den Punkt w' eine Gerade X', $X'\|X$. Nach (A1), (A3) gilt dann $s_2=X'\sqcap Q$. Führen wir durch den Punkt s_1 eine Gerade X'', $X''\|X$. Schreiben wir $w=X''\sqcap E$ und führen wir durch den Punkt w eine Gerade Y'', $Y''\|Y$. Gemäß (A1) gilt $y_1=Y''\sqcap X$. Wird $s_2'=X'\sqcap Y''$ bezeichnet, so $s_1^\lambda=s_2'$. Wegen $s_1\,\mathrm{I}\,P$ und $P^\lambda=Q$ gilt nach Definition 12 $s_1^\lambda\ \mathrm{I}\ Q$ und deshalb $s_2=s_2'$. Gemäß (A1), (A3) ergibt sich $y_1=y_2$, also $t(x, m, k)=t_1(x, m, k)$.

(2)⇒(1). Wir wollen beweisen, daß (1), (2) aus Definition 12 erfüllt sind.

ad (1). Es liege eine Gerade P, $P\varkappa\|X\varkappa$ vor Führen wir durch den Punkt o eine Gerade P', $P'\|P$ und konstruieren wir nach (A2) die Punkte p, p', m (Abb. 7). Sodann ist $m\in R_0$. Bezeichnen wir $q=P\sqcap Y$ und nach (A2) bestimmen wir zum Punkt q den Punkt k, $k\,\mathrm{I}\,X$. Somit gilt $P=\langle m, k\rangle$. Gemäß (A3) konstruieren wir die Geraden Q' und $Q = \langle\!\langle m, k \rangle\!\rangle$, $Q\varkappa \| Y\varkappa$. Werde vorausgesetzt, daß $s \mathrm{~I~} P$. Führen wir durch den Punkt s die Geraden Y', $Y' \| Y$ und X', $X' \| X$ und schreiben wir $w = X' \sqcap E$, $w' = Y' \sqcap E$. Führen wir durch den Punkt w bzw. w' eine Gerade Y'', $Y'' \| Y$ bzw. X'', $X'' \| X$ und bezeichnen wir $s' = X'' \sqcap Y''$, $y = Y'' \sqcap X$, $x = Y' \sqcap X$. Dann erhält man $s = [x, y]$, $s' = [y, x]$ und $s' = s^\lambda$. Daraus folgt $y = t(x, m, k)$. Wegen $y = t_1(x, m, k)$ gilt $s^\lambda \mathrm{~I~} Q$. Die Bilder aller Punkte der Geraden P in der Abbildung λ liegen also auf der Geraden Q. Ganz ähnlich kann man zeigen, daß die Bilder aller Punkte der Geraden Q, $Q\varkappa \| Y\varkappa$ in der Abbildung λ auf einer Geraden P, $P\varkappa \| X\varkappa$ liegen.

ad (2). Es seien P_1, P_2 die Geraden mit $P_1 \| P_2$, $P_1\varkappa \| X\varkappa$. Nach (A2) wird zur Geraden P_1 die Gerade P_1' bestimmt. Dann ergibt sich $P_1' \| P_1$, $P_1 \| P_2$. Gemäß ad (1) konstruieren wir zur Geraden P_1' die Gerade Q' und die Geraden P_1^λ, P_2^λ. Danach erhält man $P_1^\lambda \| Q'$, $P_2^\lambda \| Q'$ und daher $P_1^\lambda \| P_2^\lambda$. Analoges gilt für die Geraden Q_1, Q_2, wo $Q_1 \| Q_2$, $Q_1\varkappa \| Y\varkappa$.

Bemerkung 5. Ist eine affine Ebene $\mathscr{A}$ mit Homomorphismus $\mathscr{R}$-zulässig, dann ist nach den Sätzen 8,4 der nach Satz 8 bestimmte lokale Ternärring $T = (R, t)$ $\mathscr{A}$-zulässig.

Satz 9. *Es sei ein lokaler Ternärring $T = (R, t)$ mit vollständigem Ideal R_0 $\mathscr{A}$-zulässig. Es werden $t_1(a, b, c) = t(a, b, c)$ $\forall a, c \in R$ $\forall b \in R_0$ gesetzt und zum affinen lokalen Ternärring $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ eine affine Ebene $\mathscr{A} = (\mathscr{B}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ mit Homomorphismus $\varkappa$ bestimmt. Sodann bildet $\mathscr{R} = (\langle o, o \rangle, \langle\!\langle o, o \rangle\!\rangle, [1,1])$ einen Rahmen in $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}$ ist $\mathscr{R}$-zulässig.*

Beweis. Das Tripel $\mathscr{R} = (X, Y, e)$ bildet offensichtlich einen Rahmen in $\mathscr{A}$, wo $X = \langle o, o \rangle$, $Y = \langle\!\langle o, o \rangle\!\rangle$, $e = [1,1]$. Die Geraden X, Y schneiden sich im einzigen Punkt o und nach (4) aus Definition 9 bekommt man $o = [o, o]$. Dan gilt $E = oe = \langle 1, o \rangle$. Betrachten wir die nach (B) erklärte Abbildung λ (Abb. 5). Es sei $p = [a, b]$ ein Punkt. Danach ist $X' = \langle o, b \rangle$ die durch den Punkt p gehende und mit X parallele Gerade. Ähnlich ist $\langle\!\langle o, a \rangle\!\rangle$ die durch den Punkt p gehende und mit Y parallele Gerade. Es gilt $q = X' \sqcap E = [b, b]$, $q' = Y' \sqcap E = [a, a]$. Die Gerade $X'' = \langle o, a \rangle$ geht durch den Punkt q' und ist mit X parallel. Die Gerade $Y'' = \langle\!\langle o, b \rangle\!\rangle$ geht durch den Punkt q und ist mit Y parallel. Daraus bekommt man $p^\lambda = [a, b]^\lambda = X'' \sqcap Y'' = [b, a]$.

Es liegt eine Gerade $P = \langle x, y \rangle$, $P\varkappa \| X\varkappa$ vor. Dann gilt $x\varkappa = o\varkappa$, also $x \in R_0$. Werde vorausgesetzt, daß $[a, b] \mathrm{~I~} \langle x, y \rangle$. Danach erhalten wir $b = t(a, x, y) = t_1(a, x, y)$, was bedeutet, daß $[a, b]^\lambda \mathrm{~I~} \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle$ gilt. Wir können also $\langle x, y \rangle^\lambda = \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle$ setzen. Umgekehrt gilt $\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle^\lambda = \langle x, y \rangle$.

Es liegen die Geraden P_1, P_2, $P_1 \| P_2$, $P_1\varkappa \| X\varkappa$ vor. Danach können wir $P_1 = \langle x, y_1 \rangle$, $P_2 = \langle x, y_2 \rangle$ mit $x \in R_0$ setzen und es gilt $P_1^\lambda = \langle x, y_1 \rangle^\lambda = \langle\!\langle x, y_1 \rangle\!\rangle$, $P_2^\lambda = \langle x, y_2 \rangle^\lambda = \langle\!\langle x, y_2 \rangle\!\rangle$. Daraus folgt $P_1^\lambda \| P_2^\lambda$. Analoges gilt für die Geraden Q_1, Q_2, $Q_1 \| Q_2$, $Q_1\varkappa \| Y\varkappa$.

Bemerkung 6. Es sei $\mathscr{R}=(R, +, \cdot)$ ein lokaler Ring. Wird zu $\mathscr{R}$ der Ternärring $T=(R, t)$ wie im Beispiel 2 bestimmt, so ist T ein $\mathscr{A}$-zulässiger lokaler Ternärring. Nach Satz 4 konstruieren wir zu T den affinen lokalen Ternärring $\mathscr{T}=(R, t, t_1)$ und zu $\mathscr{T}$, nach Satz 7, die affine Ebene $\mathscr{A}$ mit Homomorphismus. Dann ist $\mathscr{A}$ nach Satz 9 für $\mathscr{R}=(\langle o, o\rangle, \ll o, o\gg, [1,1])$ $\mathscr{R}$-zulässig.

LITERATUR

[1] BACON, Ph. Y.: Coordinatized H-planes. Diss. Univ. Florida 1974.
[2] CYGANOVA, V. K.: H-ternar Jelmslevovoj affinnoj ploskosti. Učonyje zapisky, Smolensk, v. 18, 1967, 44—69.
[3] DEMBOWSKI, P.: Finite geometries. Berlin—Heildelberg—New York: Springer 1968.
[4] KLINGENBERG, W.: Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Z. 60, 1954, 384—406.
[5] KLINGENBERG, W.: Projektive Geometrien mit Homomorphismus. Math. Ann. 132, 1956, 180—200.
[6] LAMBEK, J.: Lectures on rings and modules. Toronto, London 1966.
[7] MACHALA, F.: Erwiterte lokale Ternärringe. Czech. Math. J. (im Druck).
[8] MACHALA, F.: Koordinatisation projektiver Ebenen mit Homomorphismus. Czech. Math. J. (im Druck).
[9] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin—Göttigen—Heidelberg 1955.

Eingegangen am 14. 10. 1975

Katedra algebry a geometrie PF UP
Leninova 26
771 46 Olomouc

ВВЕДЕНИЕ КООРДИНАТ В АФФИННЫЕ ПЛОСКОСТИ С ГОМОМОРФИЗМОМ

Франтишек Махала

Резюме

При помощи локальных тернаров, которые определил автор в работе Расширенные локальные тернары, определяются в предлагаемой работе аффинные и $\mathscr{A}$-доступные локальные тернары. Доказывается, что каждую аффинную плоскость с гомоморфизмом (определение 10) можно координировать аффинным локальным тернаром, и что наоборот, из аффинного локального тернара можно построить аффинную плоскость с гомоморфизмом. Каждая $\mathscr{P}$-допустимая аффинная плоскость с гомоморфизмом (определение 12) координируется $\mathscr{A}$-допустимым локальным тернаром.