Jozef Fiamčík

Ацикличеcкий хроматичеcкий клаcc графа

Mathematica Slovaca, Vol. 28 (1978), No. 2, 139--145

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136170

Math. Slovaca 28, 1978, No. 2, 139—145

АЦИКЛИЧЕСКИЙ ХРОМАТИЧЕСКИЙ КЛАСС ГРАФА

ИОСИФ ФИАМЧИК

В статье мы рассматриваем только конечные неориентированные графы без петелъ и кратных ребер. Пусть E – множество ребер графа Γ. (Правильной) раскраской ребер графа Γ назовем такое разложение множества E на непересекающиеся классы (называемые цветами), что ребра в каждом классе независимы, т.е. что смежные (инцидентные) ребра принадлежат различным классам (имеют различный цвет). Раскраску ребер назовем ациклической если ни одна пара цветов не порождает цикл. Наименьшее число цветов необходимое для ациклической раскраски ребер графа Γ, назовем ациклический хроматический класс графа Γ и обозначим через $a(\Gamma)$.

Наш основный результат содержит следующая

Теорема. *Пусть k – максимальная степень вершины графа Γ. Ациклический хроматический класс удовлетворяет неравенствам:*

(*i*) *Если* $1 \leq k \leq 3$, *то* $a(\Gamma) \leq 2k - 1$.

(*ii*) *Если* $k = 4$, *то* $a(\Gamma) \leq 9$.

(*iii*) *Если* $k \geq 5$, *то* $a(\Gamma) \leq k\ (k-1)+1$.

Доказательство. Любой граф с максимальной степенью вершины k можно уложить в регулярный граф степени k (см. [1, стр. 16]). Неравенства теоремы докажем в следующих трех частъях, причем в первой (второй) части будем рассматривать только регулярные графы степени 3 (4).

A) Неравенство (i) докажем для регулярного графа Γ степени 3 (оставшаяся часть очевидна). По известной теореме Визинга, четыре цвета достаточны для правильной раскраски ребер графа Γ (см. [6] или, например, [1], [3], [5], [7]). Поскольку Γ имеет не менее шесть реберь, то ребра графа Γ можно правильно раскрасить множеством цветом $\{1, 2, 3, 4, 5\} = X$. Такой раскраской мы можем создать множество циклов $\mathcal{S}$; в котором ребра каждого цикла окрашены некоторой парой цветов: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45.

В дальнейшем мы увидим, что перекраской некоторых ребер графа Γ (цветамы из X) можно исключить из $\mathcal{S}$ произвольный цикл таким образом, что не создаем новый цикл и не изменим правильность раскраски ребер графа Γ.

Пусть $C = x_1x_2x_3x_4x_5 \ldots x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1$ – цикл, приведенный на рис. 1, ребра которого x_1x_2, x_2x_3, ..., x_nx_1 раскрашены в цвета 1 и 2. Ребро x_1x_2 имеет цвет 1. При исключении цикла C будем рассматривать два случая:

Случай 1. Пусть ребра $u = x_1y_1$, $v = x_2y_2$ окрашены в один цвет, например, 3. Цикл C будем исключать перекраской ребра $e = x_1x_2$ в свет 4 (5). Если каждым цветом создаем цикл, то в Γ создаем большее три новых цикла:

$$C_1 = x_1x_2y_2y_2^1 \ldots y_1^1y_1x_1;$$

$$C_2 = x_1x_2y_2y_2^2 \ldots y_1^2y_1x_1;$$

$$C_3 = x_1x_2x_3z_2z_2^1 \ldots z_1^1z_1x_nx_1.$$

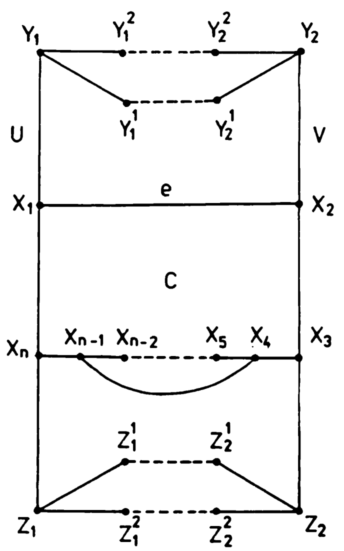

Рис. 1

(В случае, когда несоздаем цикла, исключение закончено.) Так как ребро e можем перекрасить в один из цветов 4 и 5, достаточно рассмотреть случай, когда каждым цветом создаем не менее одного цикла.

Пусть прекраской ребра e цветом 4 создаем циклы C_1, C_3 и цветом 5 цикл C_2. Тогда с вершинами y_1 и y_2 инцидентны ребра, раскрашенные в цвета 3, 4, 5. Если ребро e перекрасить в цвет 5 и ребро u перекрасить в цвет 1, то исключим цикл C из $\mathcal{S}$ (раскраску оставшихся ребер Γ не изменяем). Тем самым исключим циклы C_1 и C_3.

Случай 2. Пусть ребра u и v окрашены в различный цвет. Пусть ребро $u(v)$ окрашено в цвет 3 (4). На рис. 1 представлен случай, когда вершина $y_1 = y_2$ (в противоположном случае поступаем аналогично). В рассматриваемом случае ребро e можно перекрасить только в цвет 5. Такой перекраской мы можем создать цикл C_3 (см. выше), ребра которого окрашены в цвета 5 и 2. Поменяв друг с другом цвета ребер пути $C - x_1x_2$ (цвет 1 в цвет 2 и обратно), мы можем создать или цикл $C_3^1 = x_1x_2x_3z_2z_2^2 \dots z_1^2z_1x_nx_1$, ребра которого окрашены в цвета 5 и 1, или цикл $C_3^2 = x_nx_{n-1}x_4x_3z_2z_2^1 \dots z_1^1z_1x_n$, ребра которого окрашены в цвета 2 и 5. Если теперь ребро x_2x_3 перекрасить в цвет 3, то цикл C_3^1, а значит и цикл C, исключим из $\mathscr{S}$ (с вершиной z_2 инциденты ребра, окрашенные в цвета 1, 2, 5). Для исключения цикла C_3^2 достаточно ребро x_3z_2 перекрасить в цвет 4. (Теперь с вершиной z_2 инцидентны ребра, окрашенные в цвета 1, 2, 4). Тем самым цикл C полностью исключен из $\mathscr{S}$.

Так как множество $\mathscr{S}$ конечно, то посредством конечного числа шагов мы исключим из $\mathscr{S}$ всякий двухцветный цикл.

Доказательство утверждения (*i*) завершено.

B) Переходим к доказательству части (*ii*) теоремы. По теореме Визинга можем ребра регулярного графа Γ степени 4 правильно раскрасить множеством цветов X. Тогда в Γ можем создать множество циклов $\mathscr{S}$ (см. выше). Циклы из $\mathscr{S}$ мы исключим лексикографическим образом. Во всяком цикле, ребра которого окрашены в два цвета $1a$, $a \in \{2, 3, 4, 5\}$, по меншей мере одно произвольное ребро, окрашенное в цвет 1, перекрасим в новый цвет 6 (раскраску оставшыхся ребер графа не изменяем). Аналогично, во всяком цикле, окрашенном в цвета 2б, б $\in \{3, 4, 5\}$ ребро, окрашенное в цвет 2, перекрасим в новый цвет 7; во всяком цикле 3c, c $\in \{4, 5\}$ ребро, окрашенное в цвет 3, перекрасим в новый цвет 8 и во всяком цикле 45 ребро, окрашенное в цвет 4, перекрасим в новый цвет 9. После такой перекраски, очевидно, $\mathscr{S} = \emptyset$, но в графе Γ мы можем создать новое множество циклов $\mathscr{S}^*$, в котором ребра всякого цикла окрашены одной из следующих пар цветов: ij, jl, i $\in X$, j, l $\in \{6, 7, 8, 9\}$.

Покажем, что множеством цветов $\{1, 2, \dots, 8, 9\} = Y$ мы можем исключить любой цикл из $\mathscr{S}^*$. Прежде всего покажем, каким образом можно исключить из $\mathscr{S}^*$ двухцветный цикл, ребра которого окрашены в цвета ij. Без потери общности предположим, что i $=1$ и j $=7$.

Пусть $C = x_1x_2x_3x_4 \dots x_{n-1}x_nx_1$ – цикл, ребра которого окрашены в цвета 1 и 7 – см. рис. 2. (Ребра x_1x_n, $x_2x_3 \in C$ получили цвет 7 после исключения циклов $C_1 = x_1x_nu_1u_2 \dots u_{p-1}u_px_1$; $C_2 = x_2x_3v_1v_2 \dots v_{r-1}v_rx_2$, ребра которых были в $\mathscr{S}$ окрашенные некоторой парой цветов 2б).

Положим $E = \{e_1 = x_1u_p,\ e_2 = x_1y_1,\ e_3 = x_2y_2,\ e_4 = x_2v_r\}$ и рассмотрим следующие случаи:

a. Все ребра множества E окрашены по-разному;

b. Две пары ребер из E окрашены по-разному;

c. Два ребра из E окрашены в один цвет.

Случай a. Пусть ребра из E окрашены в различные цвета. Тогда с вершинами x_1 и x_2 инцидентны ребра, окрашенные множеством цветов $\{1, 7, ce_i, i=1, 2, 3, 4\} = Y_1$, где ce_i обозначает цвет ребра e_i. Введем обозначение. Если A, B конечные множества, то через $A-B$ будем обозначать разность этих множеств, а через $|A|$ будем обозначать мощность множества A, т.е. число его элементов. Предположим, что цвет $\alpha \in Y - Y_1$ отличен от цвета ребра $x_n z_1(|Y-Y_1|=3)$. Если теперь перекрасим ребро $e=x_1x_2$ в цвет α, то исключим цикл C из $\mathcal{S}^*$.

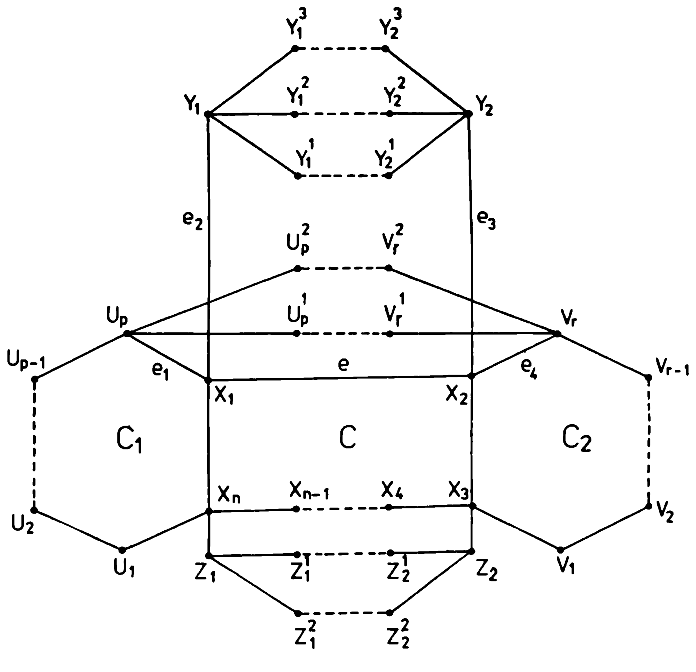

Рис. 2

Случай b. Здесь возможны два подслучая:

1. $ce_1 = ce_4$ и $ce_2 = ce_3$. Тогда с вершинами x_1 и x_2 инцидентны ребра, окрашенные множеством цветов $\{1, 7, ce_1, ce_2\} = Y_2$. Любым цветом из множества $Y - Y_2 = \mathcal{X}$ мы можем перекрасить ребро e. Если любым цветом создаем цикл (в противоположном случае исключение цикла C из $\mathcal{S}^*$ завершено), то в Γ можем создать не более семи новых циклов:

$$K_1 = x_1x_2y_2y_2^1 \ldots y_1^1y_1x_1;$$

$$K_2 = x_1x_2y_2y_2^2 \ldots y_1^2y_1x_1;$$

$$K_3 = x_1x_2y_2y_2^3 \ldots y_1^3y_1x_1;$$

$$K_4 = x_1x_2v_rv_r^1 \ldots u_p^1u_px_1;$$

$$K_5 = x_1x_2v_rv_r^2 \ldots u_p^2u_px_1;$$

$$K_6 = x_1x_2x_3z_2z_2^1 \ldots z_1^1z_1x_nx_1;$$

$$K_7 = x_1x_2v_rv_{r-1} \ldots v_2v_1x_3z_2z_2^2 \ldots z_1^2z_1x_nu_1u_2 \ldots u_{p-1}u_px_1.$$

Решающей при создании циклов K_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$ является раскраска ребер множества $H = \{y_1y_1^3, y_1y_1^2, y_1y_1^1, u_pu_p^2, u_pu_p^1\}$ и цвет ребра x_nz_1. Так как $|\mathscr{X}| = 5$, то достаточно рассмотреть случаи, когда:

(1) одно ребро из множества H окрашено цветом из множества Y_2, или

(2) два ребра из H окрашены в тот же самый цвет из множества $\mathscr{X}$, или

(3) ребра множества H окрашены всеми цветами из $\mathscr{X}$.

(Во всех остальных случаях, когда ребра множества H окрашены таким образом, что имеют место не менее два из приведенных трех типов раскраски (1), (2), (3), или полностью итсутствуют приведенные типы, то в множестве $\mathscr{X}$ есть такой цвет, в который можно прекрасить ребро e).

Покажем, как можно исключить цикл C из $\mathscr{S}^*$ в случае (1). Если ребра x_nz_1 и $u_pu_p^1$ окрашены в различные цвета (в противоположном случае рассмотрим раскраску ребра $u_pu_p^2$) и если теперь ребро e перекрасим в цвет ребра $u_pu_p^1$, а ребро e_1 перекрасим в цвет 1 (из построения множества $\mathscr{S}^*$ следует, что ребро u_pu_{p-1} не окрашено в цвет 1), то исключим цикл C из $\mathscr{S}^*$. В случае раскраски (2) или (3) цикл C из $\mathscr{S}^*$ исключим аналогично.

2. $ce_1 = ce_3$ и $ce_2 = ce_4$. В этом случае ребро e можно перекрасить в произвольный цвет из множества $\mathscr{X}$, причем в графе Γ можно создать не более пяти новых циклов:

$$K_1' = x_1x_2y_2y_2^1 \ldots u_p^1u_px_1;$$

$$K_2' = x_1x_2y_2y_2^2 \ldots u_p^2u_px_1;$$

$$K_3' = x_1x_2v_rv_r^1 \ldots y_1^1y_1x_1;$$

$$K_4' = x_1x_2v_rv_r^2 \ldots y_1^2y_1x_1$$

и цикл K_6 (приведенный выше) – см. рис. 3 (на котором изображена только отличительная часть от рис. 2). В этом случае цикл C исключим из $\mathscr{S}^*$ таким образом как выше.

Случай с. Здесь рассмотрим три подслучая:

1. $ce_1 = ce_4$. Тогда с вершинами x_1 и x_2 инцидентны ребра, окрашенные множеством цветов $\{1, 7, ce_1, ce_2, ce_3\} = Y_3$. Перекраской ребра e произвольным цветом из множества $Y \smallsetminus Y_3 = T$ можем создать в графе Γ не более четырех циклов K_4, K_5, K_6, K_7 – см. рис. 2. Цикл C исключим из $\mathscr{S}^*$ так, как показано в (1).

2. $ce_2 = ce_3$. Тогда с вершинами x_1 и x_2 инциденты ребра, раскрашенные множеством цветов $\{1, 7, ce_1, ce_2, ce_4\} = Y_4$. В этом случае ребро e можно перекрасить произвольным цветом из множества $Y - Y_4$, причем в графе Γ можно создать самое большее четыре цикла K_1, K_2, K_3, K_6 – см. рис. 2. Если теперь ребро e перекрасим в цвет ребра $y_1y_1^1$ и ребро x_1y_1 перекрасим в цвет 1, то цикл C исключим из $\mathscr{S}^*$.

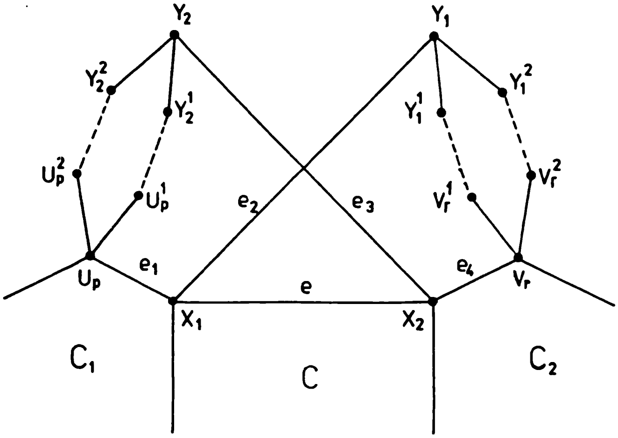

Рис. 3

3. $ce_1 = ce_3$ $(ce_2 = ce_4)$. Тогда с вершинами x_1 и x_2 инцидентны ребра, окрашенные множеством цветов $Y_4(Y_3)$ с мощностью 5. Перекраской ребра e любым цветом из множества $Y - Y_s = S$, $s = 3, 4$ можем создать в графе Γ не более трех циклов K_1', K_2', K_6 (K_3', K_4', K_6) – см. рис. 3. Поскольку $|S| = 4$, то очевидно, что в множестве S есть такой цвет, которым можно перекрасить ребро e; и посредством конечного числа шагов мы исключим из $\mathscr{S}^*$ всякий двухцветный цикл ij, $i \in X$, $j \in P = \{6, 7, 8, 9\}$.

В случае, когда в $\mathscr{S}^*$ создаем двухцветный цикл, ребра которого окрашены в цвета jl, j, $l \in P$, то исключим его из $\mathscr{S}^*$ аналогично, как цикл C.

Доказательство части (*ii*) закончено.

C) Неравенство в части (*iii*) теоремы докажем индукцией по числу p ребер графа Γ, который имеет максимальную степень вершины $k > 4$. Пусть X – множество цветов с мощностью $|X| = k(k-1)$. Для любого графа Γ с $p \leqslant |X| + 1$ ребрами результат очевиден.

Рассмотрим граф Γ с $p \geqslant |X| + 2$ ребрами и предположим, что для графа Γ_1, образованного из Γ удалением любого ребра $e = xy$, имеет место неравенство (*iii*). Если добавим ребро e в граф Γ_1, т.е. если создаем граф $\Gamma = \Gamma_1 + e$, то ребро e можно окрасить в новый цвет $c \notin X$ (число ребер, инцидентных с вершиной $x(y)$ в Γ_1, не более чем $|X|$).

Утверждение (iii) доказано.

Так как все возможные случаи разобраны, доказательство теоремы завершено.

Замечания. 1. Оценка (i) теоремы для $k=3$ точна, она выполнена на полном 4-графе (графе тетраэдра).

2. Гипотеза. $a(\Gamma)\leqslant k+2$ для любого графа Γ с $k\geqslant 4$.

3. Если наша гипотеза для $k=4$ верна, то верхняя оценка выполнена на графе регулярного восьмигранника (графе октаэдра).

4. Грюнбаум в работе [4] рассматривает ациклическую раскраску вершин графа. В [4] на стр. 391 высказана гипотеза, что пятью цветами можно раскрасить вершины планарного графа таким образом, что любая смежная пара вершин окрашена в различные цвета, причем никакая пара цветов не порождает цикл.

Наша теорема характеризует один класс графов (не обязательно планарных), для которого гипотеза Грюнбаума верна.

Пусть граф Γ имеет максимальную степень вершины $k\leqslant 4$ и пусть далее ни один из семи графов G_p, $p=1, 2, 3, 4, 5, 7, 8$, приведенных в [5] на стр. 96 (или, например, в [3] на стр. 406, или графов H_p в [1] на стр. 189), не является порожденным подграфом графа Γ. Тогда пять цветов достаточно для ациклической раскраски вершин графа Γ.

Доказательство. Если ни один из графов G_p не является порожденным подграфом графа Γ (поскольку Γ имеет $k\leqslant 4$, то графы G_6 и G_9, приведенные в [5] на стр. 96, не могут быть порожденными подграфами графа Γ), то существует такой граф H, которого реберный граф $L(H)$ изоморфен графу Γ (см. [2] или, например, [1], [3], [5]). Из оценки (i) теоремы следует, что $a(H)\leqslant 5$ (максимальная степень вершины в H есть $\leqslant 3$). Ациклическая раскраска ребер графа H порождает ациклическую раскраску вершин графа Γ.

Доказательство закончено.

ЛИТЕРАТУРА

[1] BEHZAD, M.—CHARTRAND, G.: Introduction to the theory of graphs, Boston 1971.

[2] BEINEKE, L. W.: On derived graphs and digraphs, Beiträge zur Graphentheorie, Teubner, Leipzig 1968, 17—23.

[3] BERGE, C.: Graphs and hypergraphs, Amsterdam 1973.

[4] GRÜNBAUM, B.: Acyclic colorings of planar graphs, Israel J. Math., 14, 1973, 390—408.

[5] ХАРАРИ, Ф.: Теория графов, Москва 1973.

[6] ВИЗИНГ, В. Г.: Об оценке хроматического класса р-графа, Дискр. анализ, 3, 1964, 25–30.

[7] ЗЫКОВ, А. А.: Теория конечных графов, Новосибирск 1969.

Поступило 14. 8. 1975

Katedra matematiky Pedagogickej fakulty
Leninova 6
08 116 Prešov