V. K. Bulitko; Ján Ninčák

Групповые раскраски полных двудольных графов и оценки чисел Хегквиста

Mathematica Slovaca, Vol. 38 (1988), No. 1, 11--17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136462

Math. Slovaca 38, 1988, No. 1,

ГРУППОВЫЕ РАСКРАСКИ ПОЛНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ И ОЦЕНКИ ЧИСЕЛ ХЕГКВИСТА

В. К. БУЛИТКО — ЯН НИНЧАК

На V. Венгерском коллоквиуме по комбинаторике в Кестхели Р. Хегквист [1] предложил следующую проблему: Пусть $Q(n, G)$ — — множество всех разбиений (см. [3]) множества ребер графа G на классы M_i, $1 \leq i \leq n$, которые являются паросочетаниями. (Здесь M_i удобно трактовать как одноцветное множество.) Пусть задано $q \in Q(n, G)$. Определим $L(q)$ ($l(q)$) как длину наибольшего (наименьшего) двухцветного цикла, которого ребра принадлежат поочередно двум классам M_i и M_j ($i \neq j$), i, $j = 1, 2, \ldots, n$. Положим

$$L(n, G) = \min_{q \in Q(n, G)} L(q), \qquad l(n, G) = \max_{q \in Q(n, G)} l(q).$$

Найти оценки $L(n, G)$ и $l(n, G)$ для разумно выявленных графов G. В частности, верно ли, что $L(n, K_{n,n}) = 2n$?

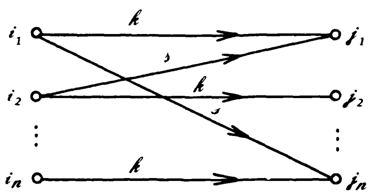
В [2] доказано, что $L(n, K_{n,n}) = 4$, если $n = 2^k$ ($k \geq 1$ — целое) и в [9] получена оценка $L(n\ K_{n,n}) \leq n$, если n — четное.

В данной заметке значительно продвинулось решение этой проблемы, а также полученный результат оказывается полезным и для луп.

Пусть дан двудольный полный граф $K_{n,n}$, правильно реберно раскрашенный n цветами $1, 2, \ldots, n$, и пусть вершины каждой его доли занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим матрицу раскраски $A_n = (a_{ij})$, где i-я строка соответствует i-ой вершине (вершине с номером i) первой доли $K_{n,n}$, а j-ый столбец — вершине с номером j другой доли этого же графа. A_n является таблицей умножения подходящей квазигруппы на элементах $1, \ldots, n$ [3]. Очевидно также и обратное, т.е. по произвольной квазигруппе на n элементах $1, \ldots, n$ можно построить такую раскраску двудольного графа $K_{n,n}$ цветами $1, \ldots, n$ и выбрать такую нумерацию вершин долей числами $1, \ldots, n$, что матрица A_n раскраски будет таблицей умножения для G. Так как m-цветные цепи (и циклы) не изменяются с изменением нумерации вершин долей, можно ограничиться в дальнейшем рассмотрением специальных квазигрупп — квазигрупп с единицей или луп, ибо всякая квазигруппа главно изотопна некоторой лупе (теорема Алберта см. [3], [4]).

Ко-таблицей умножения лупы G порядка n будем называть матрицу $A'_n = (a'_{ij})$, $a'_{ij} \in \{1, \dots, n\}$, такую, что если в G для i, j, k имеет место $i \,.\, k = j$, то $a'_{ij} = k$, т.е. для любых i, j верно $i \,.\, a'_{ij} = j$. Ясно, что таблицу умножения произвольной лупы G можно рассматривать как ко-таблицу умножения некоторой лупы G'. Обозначим $\Gamma(G)$ ор-граф лупы G', вершины которого суть элементы G', а дуга (i, j) с меткой a'_{ij} принадлежит $\Gamma(G)$ тогда и только тогда, когда $i \,.\, a'_{ij} = j$, где a'_{ij} — соответствующий элемент ко-таблицы умножения G'. Для $a'_{ij} = e$ (e-единица луны) (i, j) -петля графа $\Gamma(G)$, т.к. $i = j$.

Всякую последовательность дуг вида $(i_1, j_1)(i_2, j_1)(i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\,(i_1, j_n)$ будем называть антиориентированным (k, s)-циклом, если $a_{i_r j_r} = k$, $1 \le r \le n$ а $a_{i_{r+1} j_r} = a_{i_1 j_n} = s$. В таком цикле чередуется не только цвет, но и их направление. См. рис.:



Если все $i_1, i_2, \dots, i_n$ различны, то этот цикл — простой, а его длина равна $2n$. Заметим, что мы не исключаем случай, когда либо $k = e$, либо $s = e$. Если, например, $k = e$, то $i_r = j_r$, $r = 1, \dots, n$.

Лемма 1. *Длина любого антиориентированного (k, s)-цикла в $\Gamma(G)$ для произвольной конечной лупы G четна и не меньше 4.*

Лемма 2. *Можно установить взаимно-однозначное соответствие между двухцветными чередующимися циклами правильно реберно раскрашенного в n цветов двудольного графа $K_{n,n}$ и антиориентированными (k, s)-циклами графа лупы $\Gamma(G)$, где G специально построена по заданной раскраске A_n графа $K_{n,n}$, причем $k \neq s$ и длины соответствующих циклов совпадают.*

Замечание. Эту лупу G мы в дальнейшем будем называть ассоциированной с раскраской A_n графа $K_{n,n}$.

Доказательство. Любому двуцветному чередующемуся циклу $K_{n,n}$ в матрице A_n взаимно однозначно соответствует такая совокупность S элементов, что:

(a) для любой строки (столбца) либо ни один из элементов строки (столбца) не входит в S, либо входят в точности 2;
($б$) если k, s — цвета ребер рассматриваемого двухцветного чередующегося цикла, и a, a' — элементы произвольной строки (столбца) матрицы A_n, входящие в S, то либо $a = k$ и $a' = s$, либо $a = s$ и $a' = k$.

Но если A_n рассмотреть как ко-таблицу умножения однозначно определенной ею лупы G, то совокупность S, очевидно, однозначно представляет в G антиориентированный (k, s)-цикл. При этом, если j_1 — номер столбца, два элемента которого с номерами строк i и i' входят в S, то последовательные дуги $(i, j_1)(i', j_1)$, $i \neq i'$ составят вклад этого столбца в антиориентированный (k, s)-цикл. Вклад строки i_2, два элемента которой из столбцов j и j' входят в S, составят последовательные дуги $(i_2, j)(i_2, j')$, $j \neq j'$.

И обратно, по каждому антиориентированному (k, s)-циклу однозначно восстанавливается совокупность S элементов матрици A_n, обладающая свойствами (a) и ($б$). Действительно, по двум последовательным дугам вида $(i, j)(i, j')$, принадлежащим антиориентированному (k, s)-циклу, мы получаем номера столбцов j, j', в которых находятся два элемента системы S из строки i. Аналогично получаются и элементы столбцов, входящие в совокупность S. При этом справедливость свойства ($б$) непосредственно видно из проведенной реконструкции и определения антиориентированного (k, s)-цикла. Свойство (a) вытекает из того, что $\Gamma(G)$ — граф лупы: из вершины выходит одна и только одна дуга с заданной меткой (однозначность и всюду определенность алгебраической операции); в вершину заходит одна и только одна дуга с заданной меткой (однозначность левого деления в лупе). Лемма доказана.

Следствие. *Проблему вычисления чисел* $L(n, K_{n,n})$ и $l(n, K_{n,n})$ [1] *можно рассматривать как чисто алгебраическую проблему теории луп.*

Действительно, если b/a в лупе G обозначает решение уравнения $xa = b$, то существование антиориентированного (k, s)-цикла в графе $\Gamma(G)$ равносильно существованию такого $y \in G$, что выполняется равенство $y \,.\, \underbrace{(k/s) \,.\, (k/s) \ldots (k/s)}_{d \text{ раз}} = y$, где d-длина цикла.

Заметим, что $\Gamma(G)$, если исключить петли, представляет собой полный n-вершинный 1-ор-граф в терминологии [5], дуги которого правильно раскрашены в n-1 цветов. Очевидно верно и обратное: любой n-вершинный полный 1-ор-граф с правильно раскрашенными в n-1 цветов дугами можно рассматривать после присоединения петель как граф подходящей лупы.

Теорема 1. *Пусть* $n = \prod_{r=1}^{m} p_{i_r}^{m_r}$, где $p_{i_r} - i_r$ – е *простое число,* $m_r \geq 1$, *и* *верна импликация $r < r' \Rightarrow p_{i_r} < p_{i_{r'}}$. Тогда*

$$(1) \qquad l(n, K_{n,n}) \geq \min \{l(p_{i_r}, K_{p_{i_r}, p_{i_r}}) : r = 1, 2, \ldots, m\},$$

$$(2) \qquad L(n, K_{n,n}) \leq 2^{1-m} \prod_{r=1}^{m} L(p_{i_r}, K_{p_{i_r}, p_{i_r}}).$$

Доказательство. Для каждого $r = 1, \ldots, m$ выберем лупу G_r, порядок которой (число элементов) совпадает с p_{i_r}. Рассмотрим лупу G порядка n, что является декартовым произведением луп G_r, $r = 1, \ldots, m$, причем G_r берется в качестве сомножителя ровно m_r раз, т.е. $G = \prod_{r=1}^{m} G_r^{m_r}$. Такое ограничение эквивалентно, как показано выше, ограничению множества рассматриваемых раскрасок. А это в свою очередь приводит при подсчете чисел Хегквиста к возможности получения, вообще говоря, только верхних оценок для $L(n, K_{n,n})$ и нижных оценок для $l(n, K_{n,n})$.

Для прямого произведения G операции выполняются покомпонентно над элементами G, если эти элементы рассматривать как наборы длины $\sum_{r=1}^{m} m_r$, в которых i-ая компонента принадлежит i-ому множителю произведения $\prod_{r=1}^{m} G_r^{m_r}$. Теперь воспользуемся тем, что существование антиориентированного (k, s)-цикла в $\Gamma(G)$ длины 2q эквивалентно разрешимости (см. Следствие к Лемме 2) в G уравнения

$$y \,.\, (k/s) \,.\, (k/s) \,.\, (k/s) \ldots (k/s) = y,$$

где слева $2q$ операций (q умножений на k и q «делений» на s). Назовем это уравнение (k, s)-уравнением степени q. Но тогда (k_r, s_r) — уравнение порядка q_r разрешимо в сомножителе G_r лупы G, где k_r, s_r — проекции k и s соответсвенно на G_r, и q_r/q.

Обратно, если в каждом сомножителе G_r прямого произведения G разрешимо (k_r, s_r)-уравнение степени q_r, то в G разрешимо (k, s)-уравнение степени q, где $k = (k_1, \ldots, k_r)$ и $s = (s_1, \ldots, s_r)$, а q — наименьшее общее кратное (*НОК*) ненулевых чисел $q_1, \ldots, q_n$.

Так как для любых m-ок натуральных чисел $(a_1, \ldots, a_m)$ и $(a'_1, \ldots, a'_m)$, для которыцх $a'_i \leq a_i$, $i = 1, \ldots, m$, верно $НОК\{a'_1, \ldots, a'_m\} = \prod_{i=1}^{m} a_i$, то также верно $L(n, K_{n,n}) \leq \prod_{r=1}^{m} L(p_{i_r}, K_{p_{i_r}, p_{i_r}})$. Отсюда, используя следующее утверждение: Если b_i/a'_i и b_i/a_i для всех i, то $НОК\{a'_1, \ldots, a'_m\} \leq$ $\leq НОК\{b_1, \ldots, b_m\} \prod_{i=1}^{m} \frac{a_i}{b_i}$, которое проверяется непосредственно, и тот факт, что все $L(p_{i_r}, K_{p_{i_r}, p_{i_r}})$ делятся на 2, мы получим требуемый результат.

Утверждение (1) следует из того, что любой антиориентированный (k_r, s_r)-цикл в G_r переходит в антиориентированный (k, s)-цикл в G, где в наборе $k(s)$ r-я компонента совпадает с $k_r(s_r)$, а остальные — с e. Теорема доказана.

Ограничимся теперь такими раскрасками $K_{n,n}$, которые приводят к частному случаю луп — группам. Такие раскраски мы будем называть ассоциативными или групповыми. Итак пусть $Q^*(n, K_{n,n})$-множество групповых раскрасок $K_{n,n}$. Положим, как у Хегквиста, в [1].

$$L^*(n) = \min_{q \in Q^*(n, K_{n,n})} L(q), \qquad l^*(n) = \max_{q \in Q^*(n, K_{n,n})} l(q)$$

Лемма 3. $L(n, K_{n,n}) \leq L^*(n)$ *и* $l(n, K_{n,n}) \geq l^*(n)$.

Лемма 4. *Пусть G-группа, ассоциированная с заданной (групповой) раскраской q ребер графа $K_{n,n}$. Справедливы утверждения:*

(а) порядок любого неединичного элемента G ограничен числами $l(q)$ (снизу) и $L(q)$ (сверху);

(б) существуют элементы G, имеющие порядок $l(q)$ и $L(q)$.

Доказательство. Согласно Следствию к Лемме 2 можно перейти от простого двухцветного чередующегося цикла в $K_{n,n}$ длины $2m$ к простому антиориентированному (k, s)-циклу той же длины в графе ассоциированной группы, где k, s — элементы группы. В силу ассоциативности умножения в группе написанное по циклу условие $(\ldots((ks^{-1})k)s^{-1}\ldots)s^{-1} = e$ можно переписать в виде $(ks^{-1})^m = e$, причем $(ks^{-1})^{m'} \neq e$ для $1 \leq m' < m$. Последнее условие можно выразить в группе утверждением, что m — порядок элемента b, $b = ks^{-1}$, $b \neq e$.

Обратно, любой неединичный элемент g в группе можно представить в виде $g = ks^{-1}$, $k \neq s$. Допускается случай $s = e$. После этого видно, что соотношение $g^m = e$, где m — порядок g в G, эквивалентно наличию в $\Gamma(G)$ простого антиориентированного (k, s)-цикла длины $2m$.

Теперь утверждения (*а*) и (*б*) следуют непосредственно из определений величин $l(q)$ и $L(q)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $n = \prod_{r=1}^{k} p_{i_r}^{m_r}$ и простые упорядочены: $p_{i_1} < p_{i_2} < \ldots < p_{i_k}$. Тогда:*

(1) $$l^*(n) = 2p_{i_1}$$

(2) $$2p_{i_k} \leq L^*(n) \leq 2\prod_{r=1}^{k} p_{i_r}.$$

Доказательство. По известным результатам (см. например [6]) для конечных групп в G найдется элемент порядка p, где p — простое число, делящее n. С другой стороны, порядок каждого элемента G делит порядок G. Отсюда и из Леммы 4 следует первое утверждение.

Оценка $L^*(n)$ снизу следуует из сказанного при доказательстве (1). Оценку сверху получим, рассматривая группу G, являюшуюся прямым произведением циклических групп порядков $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r}$, причем для каждого i_r *соответствующая циклическая группа берется* m_r раз в качестве сомножителя. Получается абелева группа, произвольный элемент которой представим в виде произведения некоторых образующих сомножителей — групп. Следовательно, порядок его не превышает произведения взаимно простых порядкв сомножителей. Очевидно в G эта граница достижима. Теперь утверждение (2) теоремы следует из Леммы 4.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Для* n, *имеющих вид* p^m, *gde* p — *простое число, верно* $L(n, K_{n,n}) \leq l(n, K_{n,n})$ *и* $L^*(n) = l^*(n) = 2p$.

Доказательство. Уже для $L^*(p^m)$ и $l^*(p^m)$ верно $L^*(p^m) \leq l^*(p^m)$ по теореме.

Следствие 2. (*Б. Зелинка* [2]). *Если* $\mathrm{n} = 2^{\mathrm{m}}$, *то* $L(n, K_{n,n}) = 4$. Это следует из теоремы и Леммы 1.

Следствие 3. $L(\aleph_0, K_{\aleph_0,\aleph_0}) = 4$, $l(\aleph_0, K_{\aleph_0,\aleph_0}) = \aleph_0$. Следует взять бесконечную декартову степень группы порядка 2 и воспользоваться теоремой и Леммой 1.

Замечание. В бесконечном случае имеется определенная связь с исвестной проблемой Бернсайда о существовании бесконечных конечно определенных групп с заданным тождеством $x^m = e$ (см. [7, 8]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] HÄGGKVIST, R.: Problems, In: Combinatorics, Proceedings of the fifth Hungarian colloquium on combinatorics, Keszthely 28 June—3 July 1976, Bolyai János, Math. Soc. Budapest, 1978, 1203—1204.

[2] ZELINKA, B.: On a problem of R. Häggkvist concerning edge-colouring of graphs, Časop. pěstov. mat. 103, 1978, 289—290.

[3] КУРОШ, А. Г.: Общая алгебра, М., 1974.

[4] БЕЛОУСОВ, В. Д.: Системы квазигрупп с обобщенными тождествами. УМН, т. XX., вып. 1 (121), 1965.

[5] ЗЫКОВ, А. А.: Теория конечных графов И. Новосибирск, Наука, 1969.

[6] КАРГАПОЛОВ, М. И.—МЕРЗЛЯКОВ, Ю. И.: Основы теории групп. М., 1972.

[7] КУРОШ, А. Г.: Теория групп М., 1967.

[8] АДЯН, С. И.: Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., 1975.
[9] NINČÁK, J.: On a problem of R. Häggkvist concerning the edge colourings of bipartite graphs. Bulletins for applied mathematics, BAM 255/84 (XXXIV), Budapest, 1984, 117—126.

Received May 15, 1986

пр. Перекопской дивизии 67 кв. 40
270062 Одесса
СССР

Katedra matematiky
Vysokej školy technickej
Zbrojnícka 3
042 00 Košice