Ewa Strońska

L'espace linéaire des fonctions cliquées sur R^n est généré par les fonctions quasi-continues

Mathematica Slovaca, Vol. 39 (1989), No. 2, 155,156--164

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136487

Math. Slovaca 39, 1989, No. 2, 155—164

L'ESPACE LINÉAIRE DES FONCTIONS CLIQUÉES SUR R^n EST GÉNÉRÉ PAR LES FONCTIONS QUASI-CONTINUES

EWA STROŃSKA

Soient R l'espace des nombres réels avec la métrique euclidienne et $R^n = R \times R \times \ldots \times R$ l'espace produit.

Définitions. *Une fonction $f\colon R^n \to R$ est dite quasi-continue (cliquée) au point $x \in R^n$ lorsqu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout entourage ouvert U du point x un ensemble ouvert, nonvide $V \subset U$ tel que*

$$|f(u) - f(x)| < \varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad u \in V \ (\operatorname*{osc}_{V} f \leqslant \varepsilon).$$

Dans son article [1] Z. Grande a prouvé que le plus petit espace linéaire de fonction réelles d'une variable contenant toutes les fonctions quasi-continues, est la famille de toutes les fonctions cliquées.

Dans cet article, je prouve que ce théorème de Grande reste également vrai au cas de fonctions réelles de plusieurs variables réelles. Ma démonstration est une modification de la démonstration de Grande, mais Grande a profité dans sa démonstration du fait que tout ensemble linéaire étant à la fois du type F_σ et de première catégorie peut être presenté commé l'union de certaine famille dénombrable d'ensembles fermés disjoints deux à deux. Ce fait n'est pas vrai au cas des ensembles dans R^n $(n > 1)$.

Théorème 1. *Si $f\colon R^n \to R$ est une fonction cliquée, il existe deux fonctions cliquées $g, h\colon R^n \to R$ telles que $f = g + h$ et (1) il existe pour tout point $x \in R^n$, des suites $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ de points de continuité de la fonction g et h respectivement tels que $x_k, y_k \neq x$ $(k = 1, 2, \ldots)$ $\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} x_k = x$ et qu'il existe les limites finies $\lim_{k\to\infty} h(y_k)$ et $\lim_{k\to\infty} g(x_k)$.*

Preuve. Désignons par A l'ensemble des tous les points $x \in R^n$ tels que, quelle que soit la suite $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $x_k \neq x$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de points de continuité de la fonction f convergente vers x, s'il existe la limite $\lim_{k\to\infty} f(x_k)$, alors cette limite est égale à $+\infty$ ou bien $-\infty$. La fonction f étant cliquée, l'ensemble des points de continuité de la fonction f est dense et par conséquent l'ensemble

$$\{x \in R^n\,;\ \operatorname{osc} f(x) < 1\}$$

est ouvert et dense. Puisque

$$A \subset R^n - \{x \in R^n ; \operatorname{osc} f(x) < 1\},$$

l'ensemble A est donc nondense, il existe une suite $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ de sphères fermées telles que:

— $\mathrm{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cup \mathrm{Cl}\, A$;

— $K_i \cap K_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$;

— les centres de toutes les sphères K_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sont des points de continuité de la fonction f appartenant à l'ensemble $R^n - \mathrm{Cl}\, A$ ($\mathrm{Cl}\, A$ désigne la fermeture de l'ensemble A);

— la fonction f est bornée sur toute sphère K_i $(i = 1, 2, \ldots)$;

— $K_i \subset R^n - \mathrm{Cl}\, A$ $(i = 1, 2, \ldots)$;

— $\underset{\varepsilon > 0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{i > N}{\forall}\ \underset{x \in K_i}{\forall}\ \underset{y \in \mathrm{Cl}\, A}{\exists}\ |x - y| < \varepsilon.$

Afin d'établir l'existence de cette suite $(K_i)_{i=1}^{\infty}$, il suffit de choisir pour tout $n = 1, 2, \ldots$ un système fini de points

$$u_{n1}, \ldots, u_{nk(n)} \in \left\{x \in R^n ; \frac{1}{n+1} < \varrho(x, \mathrm{Cl}\, A) < \frac{1}{n}\right\}$$

auxquels la fonction f est continue ($\varrho(x, \mathrm{Cl}\, A) = \inf_{y \in \mathrm{Cl}\, A} |y - x|$) et tels qu'il existe pour tout $x \in R^n$ tel que $|x| \leqslant n$, un indice $1 \leqslant i \leqslant k(n)$ tel que $|x - u_{ni}| < \dfrac{2}{n}$.

Puisque f est continue en tout point u_{ni} $(1 \leqslant i \leqslant k(n)$ et $n = 1, 2, \ldots)$, il existe donc des sphères fermées K_{ni} de centres u_{ni} disjointes deux à deux et contenues dans $\left\{x \in R^n ; \dfrac{1}{n+1} < \varrho(x, \mathrm{Cl}\, A) < \dfrac{1}{n}\right\}$ sur lesquelles f est bornée.

En rangeant la famille $\{K_{ni}\}_{\substack{n=1 \\ i \leqslant k(n)}}^{\infty}$ en une suite $(K_i)_{i=1}^{\infty}$, nous obtenons une suite satisfaisant à toutes les conditions exigées.

Fixons pour tout $i = 1, 2, \ldots$ un point $x_i \in \mathrm{Int}\, K_i$ ($\mathrm{Int}\, K_i$ désigne l'intérieur de l'ensemble K_i) étant un point de continuité de la fonction f. Posons

$$m_i = \inf_{K_i} f \quad \text{et} \quad M_i = \sup_{K_i} f \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Soient $f_i : K_i \xrightarrow{\text{sur}} [-a_i, a_i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$ des fonctions continues telles que:

— $f_i(x_i) = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$;

— $[-a_i, a_i] \supset [m_i, M_i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$;

— $f_i(x) = 0$ pour tout $x \in K_i - \mathrm{Int}\, K_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Posons

$$g(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{lorsque} \quad x \in K_i \ (i = 1, 2, \ldots) \\ 0 & \text{lorsque} \quad x \in R^n - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \end{cases}$$

et

$$h = f - g.$$

Remarquons que la fonction g est continue en tout point $x \notin \mathrm{Cl}\, A$ et cliquée en tout point $x \in R^n$. Il en résulte que la fonction h est cliquée comme la différence de deux fonctions cliquées. La fonction g satisfait à la condition (1) en chaque point $x \notin \mathrm{Cl}\, A$, puisque elley est continue. La fonction h satisfait aussi à la condition (1) en tout point $x \notin \mathrm{Cl}\, A$ comme la différence de la fonction f satisfaisant là cette condition et la fonction g qui est continue au point x.

D'autre part, il existe pout tout point $x \in \mathrm{Cl}\, A$ des suites de points $u_{i_k} \in K_{i_k}$ et $x_{i_k} \in K_{i_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ étant des points de continuité de la fonction g et h respectivement, convergentes vers x et telles que $g(u_{i_k}) = 0$ et $h(x_{i_k}) = 0$ $(k = = 1, 2, \ldots)$.

Il en résulte que les fonctions g et h satisfont aussi à la condition (1) en tout point $x \in \mathrm{Cl}\, A$ et la preuve est achevée.

Théorème 2. *Soit $g : R^n \to R$ une fonction cliqueé telle que, quel que soit le point $x \in R^n$, il existe une suite (u_k) de points de continuité de la fonction g telle que $\lim_{k \to \infty} u_k = x$ et il existe la limite finite $\lim_{k \to \infty} g(u_k)$.*

On peut écrire $g = m + n$, où m: $R^n \to R$ est une fonction quasi-continue et $n : R^n \to R$ est une fonction cliquée et telle que l'ensemble $n^{-1}(0)$ est dense et contient l'ensemble des points de continuité de la fonction g.

Preuve. Il existe pour tout $x \in R^n$ une suite $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ de points de continuité de la fonction g tels que $x_k \neq x$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ et qu'il existe la limite finie

$$\lim_{k \to \infty} g(x_k) = \alpha(x).$$

Posons

$$m(x) = \begin{cases} g(x) & \text{lorsque } g \text{ est continue au point } x \\ \alpha(x) & \text{lorsque } g \text{ est discontinue au point } x \end{cases}$$

(Étant donné $x \in R^n$, il peut exister beaucoup de nombres $\alpha(x)$. Nous prenons l'un d'eux.) et

$$n = g - m.$$

La fonction g étant cliquée, l'ensemble des points de continuité de la fonction m est résiduel et conséquent, d'aprés la définition de la fonction m, la fonction m est quasi continue.

La fonction n est cliquée comme la différence de deux fonctions cliquées et

$n(x) = 0$ pour tout point x étant au point de continuité de la fonction g. La preuve est donc achevée.

Théorème 3. *Soit $n : R^n \to R$ une fonction cliquée telle que l'ensemble $n^{-1}(0)$ est dense. Il existe des fonctions quasi-continues $\varphi, \psi : R^n \to R$ telles que $n = \varphi + \psi$.*

Preuve. Remarquons que

$$R^n - n^{-1}(0) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

où

$$A_k = \{x \in R^n ; \operatorname{osc} n(x) \geqslant 2^{-k}\}, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Dans le premier pas, trouvons une famille $\{K_{1ki}\}_{k,i=1}^{\infty}$ de sphères fermées, disjointes deux à deux et telle que:

— $K_{1ki} \subset R^n - A_1$ pour $k, i = 1, 2, \ldots;$

— $\mathrm{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{1ki}\right) \supset A_1$ pour tout $k = 1, 2, \ldots;$

— $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{k>N}{\forall}\ \underset{i>N}{\forall}\ \underset{x \in K_{1ki}}{\forall}\ \underset{y \in A_1}{\exists}\ |x - y| < \varepsilon.$

L'existence de cette famille $\{K_{1ki}\}$, on la prouve semblablement par l'existence de la suite (K_i) dans la preuve du théorème 1. Rangeons tous les nombres rationnels en une suite $(w_i)_{i=1}^{\infty}$ telle que $w_i \neq w_j$ lorsque $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$. Définissons les fonctions g_1 et h_1 de la manière suivante:

$$g_1(x) = \begin{cases} n(x) & \text{pour tout} \quad x \in A_1 \\ w_k & \text{pour tout} \quad x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{1ki},\ k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{pour tout} \quad x \in R^n - \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{1ki} \cup A_1\right) \end{cases}$$

et

$$h_1(x) = \begin{cases} -w_k & \text{lorsque} \quad x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{1ki},\ k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{lorsque} \quad x \in R^n - \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} K_{1ki}. \end{cases}$$

Dans le second pas, trouvons une famille $\{K_{2ki}\}_{k,i=1}^{\infty}$ de sphères fermées, disjointes deux à deux et telle que:

— s'il existe K_{1k_1i} et $x \in A_2$ tels que $x \in A_2 \cap \mathrm{Fr}\, K_{1k_1i_1}$ (Fr désigne la frontière), il existe une suite de sphères fermées $K_{2k_ti_t} \subset \mathrm{Int}\, K_{1k_1i_1}$ $(t = 1, 2, \ldots)$ telle que

$$\mathrm{Cl}\left(\bigcup_{t=1}^{\infty} K_{2k_ti_t}\right) = \bigcup_{t=1}^{\infty} K_{2k_ti_t} \cup \{x\};$$

— $K_{2ki} \subset R^n - A_2$ $(k, i = 1, 2, \ldots)$;

— $K_{2k_1i_1} \subset \operatorname{Int} K_{1k_2i_2}$ ou bien $K_{2k_1i_1} \cap K_{1k_2i_2} = \emptyset$ $(k_1, k_2, i_1, i_2 = 1, 2, \ldots)$;

— $\operatorname{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{2ki}\right) \supset A_2$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$;

— $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{k>N}{\forall}\ \underset{i>N}{\forall}\ \underset{x\in K_{2ki}}{\forall}\ \underset{y\in A_2}{\exists}\ |x-y| < \varepsilon.$

L'existence de cette famille (K_{2ki}), on peut prouver de la manière suivante:
1) de même comme dans la preuve de l'esixtence de suite (K_i) (la preuve du th. 1), on trouve une famille de sphères fermées (K_{2ki}^1) disjointes deux à deux, telles que:

— $K_{2ki}^1 \subset R^n - A_2 - \bigcup_{i,k=1}^{\infty} K_{1ki}$;

— $\operatorname{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{2ki}^1\right) \supset A_1$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$;

— $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{k>N}{\forall}\ \underset{i>N}{\forall}\ \underset{x\in K_{2ki}^1}{\forall}\ \underset{y\in A_1}{\exists}\ |x-y| < \varepsilon.$

2) Si l'ensemble $A_2 \cap K_{1k_0i_0} \neq \emptyset$, on peut construire semblablement comme dans la preuve de l'existence de la suite (K_i) (la preuve du th. 1) une famille (K_{2ki}^2) de sphères fermées, disjointes deux à deux, telles que:

— $K_{2ki}^2 \subset \operatorname{Int} K_{1k_0i_0} - A_2$, $(k, i = 1, 2, \ldots)$;

— $\operatorname{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{2ki}^2\right) \supset A_2 \cap K_{1k_0i_0}$ pour $k = 1, 2, \ldots$;

— $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{k>N}{\forall}\ \underset{i>N}{\forall}\ \underset{x\in K_{2ki}^2}{\forall}\ \underset{y\in A_2\cap K_{1k_0i_0}}{\exists}\ |x-y| < \varepsilon.$

3) Enfin, si l'ensemble $A_2 - \left(A_1 \cup \bigcup_{k,i=1}^{\infty} K_{1ki}\right) \neq \emptyset$, alors en procédent analoguement comme dans la preuve de l'existence de la suite (K_i) (la preuve du th. 1), nous construisons une famille de sphères fermées $(K_{2ki}^3)_{k,i=1}^{\infty}$ disjointes deux à deux, telle que:

— $K_{2ki}^3 \subset R^n - A_2 - \bigcup_{k,i=1}^{\infty} K_{1ki} - \bigcup_{k,i=1}^{\infty} K_{2ki}^1$;

— $\operatorname{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{2ki}^3\right) \supset \operatorname{Cl}\left(A_2 \cap \left(R^n - A_1 - \bigcup_{k,i=1}^{\infty} K_{1ki}\right)\right)$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$;

— $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{k>N}{\forall}\ \underset{i>N}{\forall}\ \underset{x\in K_{2ki}^3}{\forall}\ \underset{y\in A_2\cap\left(R^n - A_1 - \bigcup_{k,i=1}^{\infty} K_{1ki}\right)}{\exists}\ |x-y| < \varepsilon.$

Étant fixé k, rangeons la famille $(K^1_{2ki} \cup K^2_{2ki} \cup K^3_{2ki})_{i=1}^{\infty}$ en une suite (K_{2ki}). Alors la famille $\{K_{2ki}\}_{k,i=1}^{\infty}$ satisfait aux conditions exigées.

Rangeons tous les nombres rationnels de l'intervalle $[-2^{-1}, 2^{-1}]$ en une suite $(w_i)_{i=1}^{\infty}$ telle que $w_i \neq w_j$ lorsque $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ et définissons les fonctions g_2, h_2 de la manière suivante:

$$g_2(x) = \begin{cases} n(x) & \text{lorsque} \quad x \in A_2 - A_1 \\ w_k & \text{lorsque} \quad x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_{2ki},\ k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{lorsque} \quad x \in R^n - \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_{2ki} \cup (A_2 - A_1) \right) \end{cases}$$

et

$$h_2(x) = \begin{cases} -w_k & \text{lorsque} \quad x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_{2ki},\ k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{lorsque} \quad x \in R^n - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_{2ki}. \end{cases}$$

Enfin dans le l^{er} pas, nous trouvons (de même comme dans le deuxième pas) la famille $\{K_{lki}\}_{k,i=1}^{\infty}$ de sphères fermées, disjointes deux à deux et telle que:

— s'ill existe une sphère fermée $K_{l_1 k_1 i_1}$ $(l_1 < l)$ et un point $x \in A_l$ tel que $x \in \operatorname{Fr} K_{l_1 k_1 i_1} \cap A_l$, il existe une suite de sphères fermées $K_{lk_t i_t} \subset \operatorname{Int} K_{l_1 k_1 i_1}$, telle que

$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup_{t=1}^{\infty} K_{lk_t i_t} \right) = \bigcup_{t=1}^{\infty} K_{lk_t i_t} \cup \{x\};$$

— $K_{lki} \subset R^n - A_l$ $(k, i = 1, 2, \ldots)$;

— $\operatorname{Cl}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_{lki} \right) \supset A_l$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$;

— $K_{lk_1 i_1} \subset \operatorname{Int} K_{l_1 k_2 i_2}$ on bien $K_{lk_1 i_1} \cap K_{l_1 k_2 i_2} = \emptyset$ $(l_1 < l)$ $(k_1, k_2, i_2, i_2 = 1, 2, \ldots)$;

— $\underset{\varepsilon > 0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{k > N}{\forall}\ \underset{i > N}{\forall}\ \underset{x \in K_{lki}}{\forall}\ \underset{y \in A_l}{\exists}\ |x - y| < \varepsilon$ (i)

et en rangeant tous les nombres rationnels de l'intervalle $[-2^{-l+1}, 2^{-l+1}]$ en une suite $(w_i)_{i=1}^{\infty}$ $(w_i \neq w_j$ lorsque $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots)$, nous définissons les functions

$$g_l(x) = \begin{cases} n(x) & \text{lorsque} \quad x \in A_l - A_{l-1} \\ w_k & \text{lorsque} \quad x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_{lki},\ k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{lorsque} \quad x \in R^n - \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_{lki} \cup (A_l - A_{l-1}) \right) \end{cases}$$

et

$$h_l(x) = \begin{cases} -w_k & \text{lorsque} \quad x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{lki},\ k = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{lorsque} \quad x \in R^n - \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{lki}. \end{cases}$$

Soit

$$\varphi = \sum_{l=1}^{\infty} g_l \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{l=1}^{\infty} h_l.$$

Des définitions des fonctions g_l et h_l ($l = 1, 2, \dots$) résulte que, quel que soit $l = 1, 2, \dots$, on a

$$h_l(x) + g_l(x) = n(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in A_l - A_{l-1}$$

et

$$h_l(x) + g_l(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in R^n - (A_l - A_{l-1}).$$

Il en résulte que, quel que soit $l = 1, 2, \dots$, on a

$$\sum_{k=1}^{l} (g_k(x) + h_k(x)) = \begin{cases} n(x) & \text{lorsque} \quad x \in A_l \\ 0 & \text{lorsque} \quad x \in R^n - A_l \end{cases}$$

et par conséquent

$$\varphi(x) + \psi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} g_l(x) + \sum_{l=1}^{\infty} h_l(x) = \sum_{l=1}^{\infty} (g_l(x) + h_l(x)) =$$
$$= \lim_{l \to \infty} \sum_{k=1}^{l} (g_k(x) + h_k(x)) = n(x)$$

pour tout $x \in R^n$.

Puisque chacune des fonctions h_l, g_l ($l = 1, 2, \dots$) est continue en tout point

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Int} K_{lki} \cup \operatorname{Int}\left(R^n - A_l - \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{lki}\right)$$

et puisque la convergence de chacune des séries dans les définitions des fonctions φ et ψ est uniforme, let deux fonctions φ et ψ sont donc continues en tout point

$$x \in \bigcap_{l} \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Int} K_{lki} \cup \operatorname{Int}\left(R^n - A_l - \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{lki}\right)\right].$$

Soient maintenant x un point limit de certaine sphère $K_{l_0 k_0 i_0}$, ε un nombre positif et U un entourage ouvert du point x. Toutes les fonctions g_l et h_l pour $l < l_0$ étant continues au point x, il existe un entourage ouvert $V \subset U$ du point x tel que

$$\left|\sum_{l < l_0} g_l(u) - \sum_{l < l_0} g_l(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{l < l_0} h_l(u) - \sum_{l < l_0} h_l(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

pour tout $u \in V$.

Remarquons aussi que les fonctions g_{l_0} et h_{l_0} sont constantes sur la sphére $K_{l_0 k_0 i_0}$,

$$\operatorname{Int}(V \cap K_{l_0 k_0 i_0}) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad x \in \operatorname{Cl}(\operatorname{Int}(V \cap K_{l_0 k_0 i_0})).$$

Les séries $\sum_{l=1}^{\infty} h_l$ et $\sum_{l=1}^{\infty} g_l$ étant uniformément convergentes, il existe un indice naturel $N > l_0$ tel que

$$\left| \sum_{l=N+1}^{\infty} h_l(u) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{l=N+1}^{\infty} g_l(u) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

pour tout $u \in R^n$.

Remarquons que

$$W = \operatorname{Int}\left(\operatorname{Int}(V \cap K_{l_0 k_0 i_0}) - \bigcup_{l=l_0+1}^{N} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{lki} \right) \neq \emptyset.$$

Si $u \in W$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(x)| &= \left| \sum_{l=1}^{\infty} g_l(u) - \sum_{l=1}^{\infty} g_l(x) \right| = \left| \sum_{l=1}^{\infty} (g_l(u) - g_l(x)) \right| \leqslant \\ &\leqslant \left| \sum_{l<l_0} (g_l(u) - g_l(x)) \right| + |g_{l_0}(u) - g_{l_0}(x)| + \\ &+ \left| \sum_{l=l_0+1}^{N} (g_l(u) - g_l(x)) \right| + \left| \sum_{l=N+1}^{\infty} (g_l(u) - g_l(x)) \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + 0 + 0 + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où vient la quasi-continuité de la fonction φ au point x. De même on prouve la quasi-continuité de la fonction ψ en ce point x. Afin d'établir notre théorème, il suffit de prouver la quasi-continuité des fonctions φ et ψ aux points de l'ensemble $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Fixons un point $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Il existe un indice naturel l_0 tel que $x \in A_{l_0} - A_{l_0 - 1}$ (si $l_0 = 1$, on $A_{l_0-1} = \emptyset$). Soient ε un nombre positif et U un entourage ouvert du point x. Remarquons que pour $l < l_0$ les fonctions g_l, à l'exception au plus l'une que nous désignons par g_{l_1}, sont continues au point x. De plus s'il existe g_{l_1} $(l_1 < l_0)$ discontinue au point x, le point x appartient à la frontiére de certaine sphère $K_{l_1 k_1 i_1}$. Il existe un entourage ouvert $V \subset U$ du point x tel que

$$\left| \sum_{\substack{l<l_0 \\ l \neq l_1}} g_l(u) - \sum_{\substack{l<l_0 \\ l \neq l_1}} g_l(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

pour tout $u \in V$.

La série $\sum_{l=1}^{\infty} g_l$ étant uniformément convergente, il existe un indice naturel $N > l_0$ tel que

$$\left|\sum_{l=N+1}^{\infty} g_l(u)\right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour tout} \quad u \in R^n.$$

Il existe également une sphère $K_{l_0 k_0 i_0} \subset V \cap \operatorname{Int} K_{l_1 k_1 i_1}$ telle que

$$|g_{l_0}(u) - g_{l_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour tout} \quad u \in K_{l_0 k_0 i_0}.$$

(S'il n'existe pas g_{l_1} discontinue au point x, nous considérons $K_{l_0 k_0 i_0} \subset V$).

Remarquons que

$$W = \operatorname{Int}\left(K_{l_0 k_0 i_0} - \bigcup_{l=l_0+1}^{N} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{lki}\right) \neq \emptyset.$$

En effet, puisque $\operatorname{Int} K_{l_0 k_0 i_0} - A_N \neq \emptyset$, il existe donc la sphère ouverte $B \subset \subset \operatorname{Int} K_{l_0 k_0 i_0} - A_N$, telle que $B - K_{lki} \neq \emptyset$ pour tous (l, k, i) pour lesques $l_0 < < l \leqslant N$, et $\varrho(\operatorname{Cl} B, A_N) = \inf_{\substack{x \in \operatorname{Cl} B \\ y \in A_N}} \varrho(x, y) > 0$. D'après (i), on a

$$B - \bigcup_{l=l_0+1}^{N} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{lki} \neq \emptyset.$$

Mais tous les ensembles

$$A_l \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{lki} \qquad (l = l_0 + 1, \ldots, N)$$

sont fermés, donc

$$B - \bigcup_{l=l_0+1}^{N} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{lki} = B - \bigcup_{l=l_0+1}^{N} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{lki} \cup A_l\right)$$

est un ensemble ouvert, nonvide. Puisqu' il est contenu dans W, donc W est nonvide.

Si $u \in W$, on a

$$|\varphi(u) - \varphi(x)| = \left|\sum_{l=1}^{\infty} g_l(u) - \sum_{l=1}^{\infty} g_l(x)\right| \leqslant \left|\sum_{\substack{l < l_0 \\ l \neq l_1}} (g_l(u) - g_l(x))\right| +$$

$$+ |g_{l_1}(u) - g_{l_1}(x)| + |g_{l_0}(u) - g_{l_0}(x)| +$$

$$+\left|\sum_{l=l_0+1}^{N}(g_l(u)-g_l(x))\right|+\left|\sum_{l=N+1}^{\infty}(g_l(u)-g_l(x))\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}+0+\frac{\varepsilon}{4}+0+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon,$$

d'où il vient la quasi-continuité de la fonction φ au point x. De même on prouve la quasi-continuité de la fonction ψ au point x et la preuve est achevée.

Théorème 4. *Toute fonction cliquée $f\colon R^n \to R$ est la somme de six fonctions quasi-continues.*

Preuve. D'après les théorèms 1, 2 et 3 on a $f = g + h$ et $g = m_1 + n_1 = m_1 + \varphi_1 + \psi_1$ et $h = m_2 + n_2 = m_2 + \varphi_2 + \psi_2$, où les fonctions m_1, φ_1, ψ_1, m_2, φ_2, ψ_2 sont quasi-continues. Il en résulte que

$$f = m_1 + m_2 + \varphi_1 + \varphi_2 + \psi_1 + \psi_2$$

et la preuve est achevée.

Il en resulte que la famille des fonctions cliquées $f\colon R^n \to R$ est le plus petit espace linéaire contenant toutes les fonctions quasi-continues.

TRAVAIL CITÉ

[1] GRANDE, Z.: Sur les fonctions cliquish, Čas. Pest. Mat. 110, 1983, 225—233.

Received December 1, 1986

Instytut Matematyki WSP
ul. Chodkiewicza 30
85-064 Bydgoszcz
Poland

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО КЛИКОВЫХ ФУНКЦИЙ НА R^n ПОРОЖДАЕТСЯ КВАЗИНЕПРЕРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Ewa Strońska

Резюме

Доказано, что каждая кликовая функция $f\colon R^n \to R$ является суммой шести квазинепрерывных функций.