Mária Barnovská; V. M. Govorov

Интегральная оценка обобщенного из класса L_2 решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности

Mathematica Slovaca, Vol. 46 (1996), No. 2-3, 231--238

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136670`

Math. Slovaca, **46** (1996), No. 2–3, 231–238

Mathematica Slovaca
©1996
Mathematical Institute
Slovak Academy of Sciences

Dedicated to Professor Tibor Šalát
on the occasion of his 70th birthday

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ОБОБЩЕННОГО ИЗ КЛАССА L_2 РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ[1]

М. Барновска* — В. М. Говоров**

(*Communicated by Jozef Kačur*)

ABSTRACT. In the paper, an integral estimate of a generalized solution belonging to the class L_2 of the first boundary value problem for a heat equation is given.

Предлагаемую работу следует рассматривать как дополнение к работе [1]. Пусть Ω – ограниченная N-мерная область, граница которой $\partial\Omega \in C^2$, $Q = \Omega \times (0,T)$, где $T > 0$, $S = \partial\Omega \times (0,T)$, $\Omega_0 = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t = 0\}$, $\Gamma = S \cup \Omega_0$.

Пусть $\varphi(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные соответственно на Γ и в Q функции такие, что

$$\varphi\big|_S \in L_2(S), \qquad \varphi\big|_{\Omega_0} \in L_p(\Omega), \qquad f \in L_2\big(0,T; L_p(\Omega)\big),$$

где

$$p = \begin{cases} 1, & \text{если } N = 1, \\ 1 + \varepsilon \ (\varepsilon > 0), & \text{если } N = 2, \\ \frac{2N}{N+2}, & \text{если } N \ge 3. \end{cases} \tag{1}$$

AMS Subject Classification (1991): Primary 35K05, 35K20.
Key words: heat equation, first boundary value problem, generalized solution.

[1] Совместная работа возникла во время пребывания доц. В. М. Говорова в Братиславе в рамках сотрудничества между Московским университетом им. Ломоносова и Братиславским университетом им. Коменского.

Рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \ (\text{в } Q), \qquad u|_{\Gamma} = \varphi. \tag{2}$$

Под обобщенным из класса $L_2(Q)$ решением этой задачи будем понимать функцию $u(x,t) \in L_2(Q)$, удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_Q \left[u\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \Delta\eta \right) + f\eta \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_S \varphi \frac{\partial \eta}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega_0} \varphi\eta\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

для любой функции $\eta(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $\eta|_{S \cup \Omega_T} = 0$. Здесь символ $\dfrac{\partial}{\partial n}$ обозначает дифференцирование по внешней по отношению к области Ω нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Заметим, что из принадлежности при любом $t \in [0,T]$ пробной функции $\eta(x,t)$ классу $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(Q)$ вытекает (см. [2; стр. 71]) и принадлежность ее классу $L_q(\Omega)$, где $q = \infty$ $(N = 1)$, $q \geq 1$ $(N = 2)$, $q = \dfrac{2N}{N-2}$ $(N \geq 3)$. Следовательно, фигурирующий в соотношении (3) интеграл $\int\limits_{\Omega_0} \varphi\eta\,\mathrm{d}x$ имеет смысл. Аналогично обосновывается существование интеграла $\int\limits_Q f\eta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

Основное содержание данной работы составляет следующий результат:

Теорема. *Пусть $\partial\Omega \in C^2$, тогда для любых функций φ и f, подчиняющихся ограничению* (1), *существует единственное обобщенное из класса $L_2(Q)$ решение задачи* (2) *и для этого решения справедлива оценка*

$$\|u\|_{L_2(Q)} = C_1(Q)\big[\|f\|_{L_2(0,T;L_p(\Omega))} + \|\varphi\|_{L_2(S)} + \|\varphi(x,0)\|_{L_p(\Omega)}\big], \tag{4}$$

где p удовлетворяет условию (1) *и уменьшено быть не может.*

Доказательство сформулированной теоремы опирается на следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $\partial\Omega \in C^2$, тогда существует константа C_2, зависящая лишь от Q такая, что для любой функции $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$, $f \in C(\bar{Q})$, справедливо соотношение*

$$\|u\|_{L_2(Q)} \leqq C_2 \left[\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \right\|_{L_2(0,T;L_p(\Omega))} + \|u\|_{L_2(S)} + \|u(x,0)\|_{L_p(\Omega)} \right], \tag{5}$$

где p удовлетворяет условию (1), *а* $\bar{Q}$ *обозначает замыкание множества* Q.

Доказательство. Обозначим при фиксированном значении t через $v(x,t)$ и $F(x,t)$ обобщеные из класса $W_2^2(\Omega)$ решения соответственно задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} \Delta v(x,t) &= u(x,t) \quad (\text{в } \Omega), \qquad v\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ \Delta F(x,t) &= f(x,t) \quad (\text{в } \Omega), \qquad F\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Обе части равенства $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$, умноженные на функцию v, проинтегрируем по цилиндру $Q_t = \Omega \times (0,t)$ и произведем интегрирование по частям с использованием (6). В результате для любого $t \in [0,T]$ получим соотношение

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x + \int\limits_{Q_t} u^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_{S_t} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \int\limits_{Q_t} Fu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x,$$
$$\text{где} \quad S_t = \partial\Omega \times (0,t).$$

Из этого соотношения с использованием оценки

$$\Big\| \frac{\partial v}{\partial n} \Big\|_{L_2(S)} \leqq C_2(\Omega)\|u\|_{L_2(Q)}$$

вытекает, что

$$\begin{aligned} &\max_{0\leqq t\leqq T} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x + \int\limits_{Q} u^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\qquad\qquad \leqq C_3(Q)\bigg[\int\limits_{S} u^2\,\mathrm{d}S + \int\limits_{\Omega} |\nabla v(x,0)|^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_{Q} F^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\bigg]. \end{aligned} \tag{7}$$

Из (6) следует (см. [2; стр. 72]), что

$$\begin{aligned} \|v(x,t)\|_{W_2^1(\Omega)} &\leqq C_4(\Omega)\|u(x,t)\|_{L_p(\Omega)}, \\ \|F(x,t)\|_{W_2^1(\Omega)} &\leqq C_4(\Omega)\|f(x,t)\|_{L_p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{8}$$

И, наконец, из (7) и (8) вытекает справедливость (5). Лемма доказана. □

Доказательство Теоремы. Пусть φ и f – функции, заданные соответственно на Γ и в Q и подчиняющиеся условию (1). Рассмотрим какие-либо две последовательности $\{\varphi_k(x,t)\} \subset W_2^{2,1}(Q)$, $\{f_k(x,t)\} \subset C(\bar{Q})$, которые удовлетворяют условию

$$\|f - f_k\|_{L_2(0,T;L_p(\Omega))} + \|\varphi - \varphi_k\|_{L_2(S)} + \|\varphi(x,0) - \varphi_k(x,0)\|_{L_p(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty . \tag{9}$$

Пусть $u_k(x,t)$ – обобщенное из $W_2^{2,1}(Q)$ решение задачи

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k = f_k \quad (\text{в } Q),$$
$$u_k\big|_\Gamma = \varphi_k\big|_\Gamma .$$

Используя (9) и Лемму для функции $u_{k'} - u_{k''}$, получим

$$\|u_{k'} - u_{k''}\|_{L_2(Q)} \to 0 \qquad \text{при } k' \to \infty \text{ и } k'' \to \infty .$$

Из этого сооотношения и полноты пространства $L_2(Q)$ следует, что существует функция $u(x,t) \in L_2(Q)$ такая, что

$$\|u - u_k\|_{L_2(Q)} \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty . \tag{10}$$

Эта функция $u(x,t)$ и является обобщенным из $L_2(Q)$ решением задачи (2). Дейсвительно, пусть $\eta \in W_2^{2,1}(Q)$, $\eta\big|_{S \cup \Omega_T} = 0$. Применим формулу Грина к функции u_k и η:

$$\int\limits_Q \left[u_k\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \Delta\eta\right) + f_k\eta\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_S \varphi_k \frac{\partial \eta}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega_0} \varphi_k \eta\,\mathrm{d}x .$$

Используя (9), (10), предельным переходом в этом равенстве при $k \to \infty$ убеждаемся в справедливости (3).

Из Леммы и соотношений (9), (10) вытекает оценка (4).

Докажем теперь единственность обобщенного из $L_2(Q)$ решения задачи (2). Пусть $\tilde{u}$ – разность таких решений. Из (3) следует, что

$$\int\limits_Q \tilde{u}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \Delta\eta\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0$$

для любой функции $\eta \in W_2^{2,1}(Q)$, $\eta\big|_{S \cup \Omega_T} = 0$.

Если подставить в полученное тождество $\eta(x,t)$ – обобщенное решение из $W_2^{2,1}(Q)$ задачи

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \Delta\eta = \tilde{u} \quad (\text{в } Q), \qquad \eta\big|_{S\,\cup\,\Omega_T} = 0,$$

то получим $\int\limits_Q \tilde{u}^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = 0$, т.е. $\tilde{u} = 0$ почти всюду в Q.

Нам остается лишь установить точность относительно p оценки (4). Покажем сначала, что в случае $N \geqq 2$ число p из условия (1) в слагаемом $\|\varphi(x,0)\|_{L_p(\Omega)}$ правой части (4) нельзя уменьшить. Действительно, пусть $u(x,t)$ – обобщенное из класса $L_2(Q)$ решение задачи:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad (\text{в } Q), \qquad u\big|_S = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in \Omega), \end{gathered}$$

где $\varphi(x) \in C^1(\bar{\Omega})$. Пусть $v(x,t)$ является решением задачи (6). Обе части равенства $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$, умноженные на функцию $v(x,t)(T-t)$, проинтегрируем по цилиндру Q и произведем интегрирование по частям. В результате получим:

$$T\int\limits_\Omega |\nabla v(x,0)|^2\, \mathrm{d}x = \int\limits_Q |\nabla v|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + 2\int\limits_Q (T-t)u^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t.$$

Так как $\int\limits_Q |\nabla v|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqq C_5(\Omega)\int\limits_Q u^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$, то из последнего соотношения вытекает, что

$$\int\limits_\Omega |\nabla v(x,0)|^2\, \mathrm{d}x \leqq C_6(Q)\int\limits_Q u^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t.$$

Из этого неравенства и справедливости оценки (4) с меньшим чем в условии (1) значением p вытекает существование константы $C_7(Q)$ такой, что

$$\|v(x)\|_{W_2^1(\Omega)} \leqq C_7\|\varphi\|_{L_p(\Omega)}, \qquad p = 1 \;\; (N = 2), \tag{11}$$

$1 \leqq p < \frac{2N}{N+2}$ $(N \geqq 3)$, для любой функции $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, где

$$\Delta v(x) = \varphi(x) \quad (x \in \Omega), \qquad v\big|_{\partial\Omega} = 0.^{1)}$$

[1)] Мы обозначили функции $v(x,0)$ и $\varphi(x,0)$ соответственно $v(x)$ и $\varphi(x)$.

Это соотношение противоречит точности соответствующей теоремы вложения, но мы проведем ради полноты изложения подробное обоснование отсутствия оценки (11).

Фиксируем какую-нибудь неотрицательную функцию $\varphi(x) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ такую, что $\varphi(x) \equiv 1$ $(|x| \leqq 1)$, $\varphi(x) \equiv 0$ $(|x| \geqq 2)$.

Пусть $N \geqq 3$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$. Введем при $k \geqq 3$ в рассмотрение последовательность функций

$$\varphi_k(x) = k^{\frac{N}{p}} \varphi(xk) . \tag{12}$$

Пуст $\psi_k(x) = -\frac{1}{\omega_N(N-2)} \int\limits_\Omega \frac{\varphi_k(y)}{|x-y|^{N-2}}\, \mathrm{d}y$, где ω_N – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^N$. Так как $\Delta\psi_k(x) = \varphi_k(x)$ $(x \in \Omega)$, то решение задачи

$$\Delta v_k(x) = \varphi_k(x) \quad (x \in \Omega), \qquad v_k\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

представимо в виде $v_k(x) = \psi_k(x) + w_k(x)$, где $\Delta w_k(x) = 0$ $(x \in \Omega)$, $w_k\big|_{\partial\Omega} = -\psi_k$. Из соотношения

$$0 \leqq -\psi_k(x) \leqq \frac{1}{\omega_N(N-2)\left(1-\frac{2}{k}\right)^{N-2}} \int\limits_{|y| \leqq \frac{2}{k}} \varphi_k(y)\, \mathrm{d}y, \qquad x \in \partial\Omega,$$

и принципа максимума для функции $w_k(x)$ вытекает, что

$$\max_{x\in\Omega} |w_k(x)| \leqq \max_{x\in\partial\Omega} |\psi_k(x)| \leqq \frac{1}{\omega_N(N-2)\left(1-\frac{2}{k}\right)^{N-2}} \int\limits_{|y| \leqq \frac{2}{k}} \varphi_k(y)\, \mathrm{d}y .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_\Omega \varphi_k(x) w_k(x)\, \mathrm{d}x \right| &\leqq \max_{x\in\Omega} |w_k(x)| \int\limits_\Omega \varphi_k(x)\, \mathrm{d}x \\
&\leqq \frac{1}{\omega_N(N-2)\left(1-\frac{2}{k}\right)^{N-2}} \left(\int\limits_\Omega \varphi_k(x)\, \mathrm{d}x \right)^2 \\
&= \frac{1}{\omega_N(N-2)\left(1-\frac{2}{k}\right)^{N-2}} \left(\int\limits_\Omega k^{\frac{N}{p}} \varphi(kx)\, \mathrm{d}x \right)^2 \\
&= \frac{1}{\omega_N(N-2)\left(1-\frac{2}{k}\right)^{N-2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\, \mathrm{d}y \right)^2 \left(k^{\frac{N}{p}-N}\right)^2 \\
&\leqq \mathrm{const} .
\end{aligned}$$

Итак, для любого $k \geqq 3$

$$\left| \int\limits_{\Omega} \varphi_k(x)\psi_k(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqq \text{const} . \tag{13}$$

С другой стороны, из соотношения

$$-\psi_k(x) = \frac{1}{\omega_N(N-2)} \int\limits_{\Omega} \frac{\varphi_k(y)}{|x-y|^{N-2}}\,\mathrm{d}y \geqq \frac{1}{\omega_N(N-2)} \int\limits_{|y|\leqq\frac{1}{k}} \frac{\varphi_k(y)}{|x-y|^{N-2}}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{k^{\frac{N}{p}}}{\omega_N(N-2)} \int\limits_{|y|\leqq\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N-2}}$$

вытекает, что

$$\begin{aligned}
-\int\limits_{\Omega} \varphi_k(x)\psi_k(x)\,\mathrm{d}x &\geqq -\int\limits_{|x|\leqq\frac{1}{k}} \varphi_k(x)\psi_k(x)\,\mathrm{d}x = -k^{\frac{N}{p}} \int\limits_{|x|\leqq\frac{1}{k}} \psi_k(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geqq \frac{k^{\frac{2N}{p}}}{\omega_N(N-2)} \int\limits_{|x|\leqq\frac{1}{k}} \int\limits_{|y|\leqq\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y|^{N-2}} \\
&\geqq \frac{k^{\frac{2N}{p}}}{\omega_N(N-2)} \iint\limits_{|x|^2+|y|^2\leqq\frac{1}{k^2}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y|^{N-2}} \\
&= \frac{k^{\frac{2N}{p}}}{\omega_N(N-2)} \iint\limits_{|\alpha|^2+|\beta|^2\leqq\frac{1}{k^2}} \frac{\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta}{2^{\frac{N-2}{2}}|\alpha|^{N-2}} \\
&= \frac{k^{\frac{2N}{p}}}{(N-2)2^{\frac{N-2}{2}}N} \int\limits_{|\alpha|\leqq\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k^2} - |\alpha|^2\right)^{\frac{N}{2}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{|\alpha|^{N-2}} \\
&= \frac{\omega_N}{N(N^2-4)2^{\frac{N-2}{2}}} k^{2N\left(\frac{1}{p}-\frac{N+2}{2N}\right)} ,
\end{aligned} \tag{14}$$

где $\alpha = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$, $\beta = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$.

Из соотношения (14) следует, что

$$\begin{gathered}
-\int\limits_{\Omega} \varphi_k\psi_k\,\mathrm{d}x \to +\infty \qquad \text{при} \quad k\to\infty \\
\left(-\int\limits_{\Omega} w_k\varphi_k\,\mathrm{d}x \to +\infty \qquad \text{при} \quad k\to\infty\right).
\end{gathered} \tag{15}$$

Из (13) и (15) вытекает, что

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v_k\varphi_k\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \psi_k\varphi_k\,\mathrm{d}x - \int_\Omega w_k\varphi_k\,\mathrm{d}x \to +\infty \quad \text{при} \quad k\to\infty\,. \tag{16}$$

Но из определения функции $\varphi_k(x)$ следует, что

$$\|\varphi_k\|_{L_p(\Omega)} = \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} = \text{const}\,. \tag{17}$$

Сопоставление (16) и (17) приводит к отрицанию оценки (11) в случае $N \geqq 3$, $1 \leqq p < \dfrac{2N}{N+2}$.

Аналогично для случая $N=2$, введя в рассмотрение $\Omega = \{x\in\mathbb{R}^2 : |x| < \frac12\}$, $\varphi_k(x) = k^2\varphi(kx)$, $\psi_k(x) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\Omega \varphi_k(y)\ln\frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}y$, убедимся в отсутствии оценки (11) при $p=1$.

Авторы выражают глубокую благодарность доктору Я. Фило, кандидату физико-математических наук, за ценные замечания к работе, которые помогли уточнить и исправить некоторые оценки в работе. □

Литература

[1] ГОВОРОВ, В. М.: *Первая краевая задача для параболического уравнения с граничной функцией из* L_2, ДАН СССР **239** (1978), 545-548.

[2] ЛАДЫЖЕНСКАЯ, О. А.—УРАЛЬЦЕВА, Н. Н.: *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, Москва, 1973.

Received January 6, 1992

* *Department of Mathematical Analysis*
Faculty of Mathematics and Physics
Comenius University
Mlynská Dolina
SK–842 15 Bratislava
SLOVAKIA

** *Кафедра общей математики*
Факультет ВМИК
Московский гос. университет
им. Ломоносова
RU–117 234 Москва
РОССИЯ