Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Fábera

O Carathéodoryově algebraizaci míry a integrálu [Pokračování]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 6 (1961), No. 6, 299--304

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137061

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK VI — ČÍSLO 6

O CARATHÉODORYOVĚ ALGEBRAIZACI MÍRY A INTEGRÁLU

(Pokračování)

JIŘÍ FÁBERA, Praha

V této části pojednáme o pojmu, který v teorii somat má úlohu obdobnou jako pojem reálné funkce v klasické teorii reálných funkcí.

Předpokládám, že čtenář zná běžnou definici reálné funkce. Tato definice se podstatně opírá o fakt, že definiční obor reálné funkce je neprázdnou množinou (např. intervalem číselné osy, částí euklidovského prostoru apod.). V čl. 3 jsme řekli, že obecně nelze somata interpretovat jako množiny, i když mají řadu vlastností společných s množinami. Všimněte si také, že v definici somat (axiomy I—V z čl. 3) pojem „bodu" (jakožto prvku množiny) vůbec neintervenuje. Nelze tedy pojem reálné funkce přenést do teorie somat pouhou formální modifikací definice reálné funkce. Přesněji vyjádřeno, nelze definovat reálnou funkci, jejímž definičním oborem je soma, běžnou definicí reálné funkce, neboť tato definice ztrácí v takovém případě smysl.

Chceme-li však vybudovat teorii integrálu, opírajíce se pouze o vlastnosti vymezující pojem somatu, potřebujeme definovat pojem, který má k tomu potřebné vlastnosti reálných funkcí a který se dá v případech, kdy systém somat lze interpretovat jako systém podmnožin nějaké množiny, interpretovat jako reálné funkce. To lze skutečně provést, dokonce rozmanitými způsoby. Vyložíme zde způsob používaný Carathéodorym, který takový pojem zavádí a nazývá jej *funkcí místa*[12]).

6. ŠKÁLY SOMAT

Základním pojmem, o který se opírá Carathéodoryova definice funkce místa, je pojem *škály somat*, k jehož definici nyní přistoupíme.

Předpokládejme stále (i v dalších článcích), že je dán nějaký systém somat $\mathbf{S}$ a že všechna somata, s nimiž budeme pracovat, patří do $\mathbf{S}$. Nechť A je libovolné soma. Je-li každému konečnému (tj. různému od $+\infty$ a $-\infty$) reálnému číslu y přiřazeno soma $S(y)$, $S(y) \subset A$, tak, že pro každou dvojici konečných reálných čísel y, z, $y < z$ platí $S(y) \subset S(z)$, říkáme, že somata $S(y)$ tvoří *škálu somat na* A; škálu somat $S(y)$ označíme symbolem $[S(y)]$. Jsou-li speciálně somata $S(y)$ podmnožinami jisté množiny A, mluvíme ovšem o škále $[S(y)]$ množin.

[12]) Názvem *funkce místa* překládám výraz *Ortsfunktion*.

7. EKVIVALENCE ŠKÁL SOMAT[13])

Označme $\mathscr{S}_A$ množinu všech škál somat na A. Řekneme, že dvě škály $[S(y)]$, $[T(y)]$ z $\mathscr{S}_A$ jsou *ekvivalentní* a napíšeme $[S(y)] \equiv [T(y)]$, jestliže pro každou dvojici konečných reálných čísel $y, z, y < z$ z platí zároveň

$$S(y) \subset T(z) \quad \text{a} \quad T(y) \subset S(z) \,. \tag{4}$$

Snadno se přesvědčíme, že takto definovaný vztah mezi škálami z $\mathscr{S}_A$ je ekvivalencí na množině $\mathscr{S}_A$. Přímo z definice vskutku vidíme, že vztah $\equiv$ je reflexívní a symetrický; tranzitivitu dokážeme takto: nechť pro tři škály $[S_1(y)]$, $[S_2(y)]$, $[S_3(y)]$ platí $[S_1(y)] \equiv [S_2(y)]$, $[S_2(y)] \equiv [S_3(y)]$. Jde o to dokázat, že potom $[S_1(y)] \equiv [S_3(y)]$. K tomu cíli zvolme tři libovolná konečná reálná čísla $x, y, z,\ \ y < x < z$. Z předpokladů plyne $S_1(y) \subset S_2(x) \subset S_3(z)$, $S_3(y) \subset \subset S_2(x) \subset S_1(z)$, tedy pro libovolná dvě konečná reálná čísla $y, z,\ \ y < z$ je $S_1(y) \subset S_3(z)$ a $S_3(y) \subset S_1(z)$, což podle definice znamená, že $[S_1(y)] \equiv [S_3(y)]$.

Naše ekvivalence škál z $\mathscr{S}_A$ definuje tedy rozklad množiny $\mathscr{S}_A$ na disjunktní třídy, při čemž dvě škály $[S(y)]$, $[T(y)]$ patří do stejné třídy právě tehdy, jsou-li ekvivalentní, tj. vyhovují-li podmínce (4).

8. SOUVISLOST REÁLNÝCH FUNKCÍ SE ŠKÁLAMI MNOŽIN

V tomto článku se budeme zabývat speciálním případem, kdy $\boldsymbol{S}$ je systém všech podmnožin nějaké neprázdné množiny A[14]). Ukážeme vzájemnou souvislost škál podmnožin množiny A s reálnými funkcemi, definovanými na A. Ozřejmí to Carathéodoryův postup a význam pojmů zavedených v čl. 6 a 7.

Budiž f reálná funkce definovaná na A (nabývající hodnot konečných nebo nekonečných). Pro každé konečné reálné číslo y označme $S_0(y)$ množinu všech bodů ξ z A, pro něž je $f(\xi) < y$. Analogicky označme $S^0(y)$ množinu všech bodů ξ z A, pro něž je $f(\xi) \leq y$.

Je zřejmé, že pro každou dvojici konečných reálných čísel $y, z, y < z$ platí $S_0(y) \subset S_0(z)$, $S^0(y) \subset S^0(z)$. Množiny $S_0(y)$, resp. $S^0(y)$ tvoří tedy škály na A. Škálu $[S_0(y)]$ nazveme *dolní škálou*, škálu $[S^0(y)]$ *horní škálou* reálné funkce f.

Pro každé konečné reálné číslo y zřejmě platí $S_0(y) \subset S^0(y)$.

Konečně pro každý bod ξ z A platí

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \inf_y \{\xi \in S_0(y)\} \,,^{15)} \\ f(\xi) &= \inf_y \{\xi \in S^0(y)\} \,. \end{aligned} \tag{5}$$

---

[13]) Budiž $\boldsymbol{M}$ nějaká neprázdná množina. Relaci — použijeme pro ni znaku $\equiv$ —, která je definována pro některé dvojice prvků z $\boldsymbol{M}$, nazýváme *ekvivalencí* na množině $\boldsymbol{M}$, má-li tyto vlastnosti:

1. pro každý prvek a z $\boldsymbol{M}$ je $a \equiv a$ (tzv. reflexivita);
2. je-li pro dva prvky a, b z $\boldsymbol{M}$ $a \equiv b$, je i $b \equiv a$ (tzv. symetrie);
3. je-li pro nějaké tři prvky a, b, c z $\boldsymbol{M}$ $a \equiv b$ a $b \equiv c$, je i $a \equiv c$ (tzv. tranzitivita).

Každá ekvivalence na $\boldsymbol{M}$ určuje rozklad množiny $\boldsymbol{M}$ na neprázdné disjunktní podmnožiny, tzv. *třídy*, při čemž dva prvky a, b z $\boldsymbol{M}$ patří do téže třídy právě tehdy, je-li $a \equiv b$.

Důkaz tohoto tvrzení je jednoduchý; čtenář jej najde např. v první kapitole knihy akademika JARNÍKA, *Diferenciální počet II.*

[14]) Protože jde o úvahy, které budeme přenášet na somata, označujeme množinu A a její části stejně jako somata kurzívou. Prvky množiny A nazveme body.

[15]) Jak je zvykem v teorii reálných čísel, budeme za infimum (tj. největší dolní závoru) prázdné množiny považovat nevlastní reálné číslo $+\infty$ a obdobně za supremum (tj. nejmenší horní závoru) prázdné množiny budeme považovat nevlastní reálné číslo $-\infty$. To je úplně v souladu s naším případem. Může se totiž stát, že některý bod ξ z A neleží v žádné z množin $S_0(y)$, a pak ovšem neleží také v žádné z množin $S^0(y)$ a obráceně (to se snadno ověří). Množina těch reálných čísel y, jejíž infimum vystupuje ve vztazích (5), je potom prázdná a její infimum je podle vyslovené úmluvy $+\infty$ čili $f(\xi) = +\infty$. Tomu však skutečně musí tak být, neboť neleží-li ξ v žádné z množin $S^0(y)$, je $f(\xi)$ větší než každé konečné reálné číslo, tedy $f(\xi) = +\infty$.

(Hodnota, které nabývá reálná funkce f v bodě ξ z A, je infimem množiny všech reálných čísel y, pro něž leží ξ v $S_0(y)$, resp. v $S^0(y)$.)

Na ukázku dokážeme prvý ze vztahů (5). Položme $u = \inf_y \{\xi \in S_0(y)\}$ a předpokládejme $u \neq \pm\infty$. Zvolme libovolné konečné kladné číslo ε. Z definice čísla u plyne, že ξ neleží v $S_0(u - \varepsilon)$. To však znamená, že $f(\xi) \geqq u - \varepsilon$ pro každé takové ε, tedy i $f(\xi) \geqq u$. Případ $f(\xi) > u$ nemůže nastat; z této nerovnosti by totiž plynulo, že ξ leží v $S_0(f(\xi))$ čili $f(\xi) < f(\xi)$. Případ $u = +\infty$ je vyřízen poznámkou [15]); je-li $u = -\infty$, je $f(\xi) < y$ pro každé konečné reálné číslo y, tedy $f(\xi) = -\infty$. Druhý ze vztahů (5) se dokáže obdobně.

$[S(y)]$ budiž nějaká škála na množině A. Pomocí této škály definujme na A reálnou funkci f takto: pro každý bod ξ z A položíme

$$f(\xi) = \inf_y \{\xi \in S(y)\}\,. \tag{6}$$

Tuto funkci nazveme *funkce odpovídající škále* $[S(y)]$.

Je-li $[S(y)]$ nějaká škála na A a f jí odpovídající funkce, potom pro každé konečné reálné číslo y platí

$$S_0(y) \subset S(y) \subset S^0(y)\,. \tag{7}$$

Důkaz je prostý: 1. leží-li nějaký bod ξ v $S(y)$, je $f(\xi) \leqq y$ (to plyne z (6)), a tedy ξ leží i v $S^0(y)$; 2. neleží-li ξ v $S(y)$, je $y \leqq f(\xi)$ (to plyne rovněž z (6), tedy ξ nemůže ležet ani v $S_0(y)$.

Mějme nyní dvě libovolné škály $[S(y)]$ a $[T(y)]$ na množině A. Funkci odpovídající škále $[S(y)]$ označme f a funkci odpovídající škále $[T(y)]$ označme g. Potom platí $f \leqq g$[16]) právě tehdy, platí-li pro každou dvojici konečných reálných čísel $y, z, y < z$

$$T(y) \subset S(z)\,. \tag{8}$$

Vskutku, nechť je $f \leqq g$, tj. $f(\xi) \leqq g(\xi)$ pro každý bod ξ z A. Kdyby pro nějakou dvojici konečných reálných čísel $y_0, z_0, y_0 < z_0$ nebylo $T(y_0) \subset S(z_0)$, existoval by v A bod ξ_0, který by patřil do $T(y_0)$ a nepatřil do $S(z_0)$. Z toho bychom však používajíce (7) usoudili, že $g(\xi_0) \leqq y_0 < z_0 \leqq f(\xi_0)$, a to je spor s předpokladem $f \leqq g$. Obráceně, předpokládejme, že by v A existoval bod ξ_1, pro nějž by platilo $f(\xi_1) > g(\xi_1)$. Zvolme dvojici konečných reálných čísel y_1, z_1 tak, že $g(\xi_1) < y_1 < z_1 < f(\xi_1)$ (to jistě lze). Z toho však opět používajíce (7) usoudíme, že ξ_1 leží v $T(y_1)$, ale neleží v $S(z_1)$, což je ve sporu s tím, že vztah (8) platí pro každou dvojici konečných reálných čísel $y, z, y < z$.

Dvě reálné funkce f, g definované na A jsou totožné právě tehdy, když $f(\xi) = g(\xi)$ pro každý bod ξ z A, čili když platí zároveň $f \leqq g$ a $g \leqq f$. Z právě dokázaných tvrzení tedy plyne, že dvěma škálám $[S(y)]$ a $[T(y)]$ na A odpovídá stejná funkce právě tehdy, platí-li pro každou dvojici konečných reálných čísel $y, z, y < z$ zároveň

$$S(y) \subset T(z) \quad \text{a} \quad T(y) \subset S(z)\,.$$

Používajíce ekvivalence zavedené v čl. 7, můžeme toto tvrzení formulovat také takto: Dvěma škálám $[S(y)]$ a $[T(y)]$ na A odpovídá stejná funkce právě tehdy, je-li $[S(y)] \equiv [T(y)]$.

Dospěli jsme tedy k tomuto výsledku: *Z každé škály na A lze pomocí vztahu* (6) *sestrojit reálnou funkci s definičním oborem A, při čemž ze vzájemné ekviva-*

[16]) Definice této relace mezi funkcemi byla zavedena v čl. 1.

lentních škál získáme stejnou funkci. Každou reálnou funkci s definičním oborem A (nabývající konečných nebo nekonečných hodnot) lze takto získat, stačí jen použít vhodné škály (např. její dolní nebo horní škály).

V tomto faktu spočívá jistě oprávnění interpretovat („považovat") třídy vzájemně ekvivalentních škál na A jako (za) reálné funkce definované na A.

To má pro nás fundamentální význam, neboť fakt, že definiční obor je množinou (skládající se z bodů), o které se opírá obvyklá definice funkce, v definici škály, resp. třídy ekvivalentních škál nevystupuje; k definici škály a třídy ekvivalentních škál jsme použili jen vlastností systému somat.

9. FUNKCE MÍSTA

Úvahami z čl. 8 jsme docela přirozeně vedeni k této definici: ***Funkcí místa** definovanou na somatu A nazýváme každou třídu vzájemně ekvivalentních škál na A.* Funkce místa (tedy třídy ekvivalentních škál) budeme označovat malými písmeny latinské abecedy f, g, h apod.

Je-li f funkce místa, nazýváme škály patřící do f ***škálami funkce místa** f.*

Znakem $\mathscr{F}_A$ označíme množinu všech funkcí místa, definovaných na somatu A.

10. ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ FUNKCÍ MÍSTA

Nechť f a g jsou funkce místa z $\mathscr{F}_A$. Existuje-li škála $[S(y)]$ funkce místa f a škála $[T(y)]$ funkce místa g tak, že pro každou dvojici konečných reálných čísel $y, z, y < z$ platí

$$T(y) \subset S(z)\,, \tag{9}$$

říkáme, že je $f \leqq g$.

Ukážeme předně, že je-li $f \leqq g$, platí (9) pro libovolnou škálu $[S_1(y)]$ funkce místa f a libovolnou škálu $[T_1(y)]$ funkce místa g. K tomu cíli zvolme reálná čísla y_1, z_1 tak, že $y < y_1 < z_1 < z$. Poněvadž (9) platí i pro dvojici y_1, z_1 a poněvadž $[S(y)]$, $[S_1(y)]$ a $[T(y)]$, $[T_1(y)]$ jsou dvojice ekvivalentních škál, máme $T(y_1) \subset S(z_1)$, $T_1(y) \subset T(y_1)$, $S(z_1) \subset S_1(z)$; z toho vychází žádaný vztah $T_1(y) \subset S_1(z)$.

Za druhé dokážeme, že relace $\leqq$ je relací částečného uspořádání v množině $\mathscr{F}_A$. Jde tedy o to ověřit axiomy A, B, C, z čl. 1. O tom, že relace $\leqq$ splňuje axiomy A a C, se přesvědčíme jediným pohledem na definici funkce místa a na definici relace $\leqq$. Axiom B také snadno ověříme, např. takto: Nechť f, g, h jsou funkce místa z $\mathscr{F}_A$ takové, že $f \leqq g$, $g \leqq h$. Máme dokázat, že potom i $f \leqq h$. Budiž $[S_f(y)]$, resp. $[S_g(y)]$, resp. $[S_h(y)]$ nějaká škála funkce místa f, resp. g, resp. h. Zvolme libovolně dvě konečná reálná čísla $y, z, y < z$. Máme dokázat, že platí $S_h(y) \subset S_f(z)$. K tomu cíli zvolme ještě reálné číslo x tak, aby $y < x < z$. Protože předpokládáme $f \leqq g$, $g \leqq h$, máme $S_h(y) \subset S_g(x)$, $S_g(x) \subset$ $\subset S_f(z)$ a odtud získáme již žádaný vztah.

11. DVĚ ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI ČÁSTEČNÉHO USPOŘÁDÁNÍ FUNKCÍ MÍSTA

V tomto článku probereme dvě základní vlastnosti částečného uspořádání množiny $\mathscr{F}_A$, zavedeného v předcházejícím článku. První z nich je vyjádřena touto větou: *Každá nejvýše spočetná množina funkcí místa z $\mathscr{F}_A$ má v $\mathscr{F}_A$ supremum a infimum.*

Tuto větu dokážeme tím, že ke každé posloupnosti $f_1, f_2, \ldots$ funkcí místa z $\mathscr{F}_A$ sestrojíme dvě funkce místa g, h patřící do $\mathscr{F}_A$ těchto vlastností (viz definici suprema a infima v čl. 2):

1. $g \leqq f_i \leqq h$ pro $i = 1, 2, \ldots$;
2. jsou-li g', h' funkce místa z $\mathscr{F}_A$, pro které rovněž platí $g' \leqq f_i \leqq h'$ pro $i = 1, 2, \ldots$, je $g' \leqq g$ a $h \leqq h'$.

Vezměme jakoukoli škálu $[S_i(y)]$ každé z funkcí f_i, $i = 1, 2, \ldots$ a pro každé konečné číslo reálné y položme

$$S_g(y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i(y) \quad \text{a} \quad S_h(y) = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i(y)\,.$$

Z definice sjednocení, resp. průniku somat (viz čl. 3) plyne, že pro každou dvojici konečných reálných čísel $y, z, y < z$ platí $S_g(y) \subset S_g(z) \subset A$ a $S_h(y) \subset S_h(z) \subset A$. Somata $S_g(y)$, resp. $S_h(y)$ tvoří tedy škály na A. Nechť g, resp. h je funkce místa, jež je třídou škál ekvivalentních se škálou $[S_g(y)]$, resp. $[S_h(y)]$; g a h patří zřejmě do $\mathscr{F}_A$. Ukážeme, že g a h mají vlastnosti 1 a 2. Předně pro každou dvojici konečných reálných čísel $y, z, y < z$ a pro $i = 1, 2, \ldots$ platí $S_i(y) \subset S_g(y) \subset S_g(z)$, $S_h(y) \subset S_i(y) \subset S_i(z)$, což znamená, že $g \leqq f_i \leqq h$ pro $i = 1, 2, \ldots$ Za druhé budiž $[S_{g'}(y)]$ nějaká škála funkce místa g' a $[S_{h'}(y)]$ nějaká škála funkce místa h'. Podle předpokladu je pro každou dvojici konečných reálných čísel $y, z, y < z$, a pro $i = 1, 2, \ldots$ $S_i(y) \subset S_{g'}(z)$ a $S_{h'}(y) \subset S_i(z)$, načež je také (uvažme znovu vlastnosti sjednocení a průniku somat)

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i(y) = S_g(y) \subset S_{g'}(z) \text{ a } S_{h'}(y) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i(z) = S_h(z), \text{ tedy } g' \leqq g \text{ a } h \leqq h'.$$

Než budeme formulovat druhou základní vlastnost částečného uspořádání množiny $\mathscr{F}_A$, musíme zavést pojem jednoduché funkce místa. Škálu $[S(y)]$ z $\mathscr{S}_A$, v níž se vyskytuje toliko konečný počet různých somat, nazveme *jednoduchou*[17]).

Funkci místa f z $\mathscr{F}_A$ nazveme *jednoduchou*, je-li f třídou škál z $\mathscr{S}_A$ ekvivalentních s jednoduchou škálou z $\mathscr{S}_A$[18]).

Čtenář si jistě snadno sám ověří toto tvrzení: je-li speciálně soma A neprázdnou množinou, odpovídá každé jednoduché funkci místa z $\mathscr{F}_A$ prostřednictvím vztahu (6) z čl. 8 reálná funkce definovaná na A, nabývající jen konečného počtu hodnot.

Nyní již můžeme vyslovit druhou základní vlastnost našeho částečného uspořádání množiny $\mathscr{F}_A$.

Ke každé funkci místa f z $\mathscr{F}_A$ existují v $\mathscr{F}_A$ posloupnosti jednoduchých funkcí $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ takové, že f je supremem posloupnosti $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ a infimem posloupnosti $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Důkaz této vlastnosti, i když není obtížný, zde provádět nebudeme.

Obě vlastnosti probírané v tomto článku jsou důležitými strukturálními vlastnostmi množiny $\mathscr{F}_A$. Ukazuje se totiž, že z hlediska algebraizace není podstatný samotný pojem funkce místa, nýbrž skutečnost, že $\mathscr{F}_A$ je částečně

[17]) Škála $[S(y)]$ z $\mathscr{S}_A$ je tedy jednoduchá, jestliže existuje konečný počet konečných reálných čísel

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \qquad (*)$$

takových, že předně pro $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, jsou $S(y_i)$, $S(y_j)$ různá somata, a za druhé ke každému konečnému reálnému číslu y existuje mezi čísly (*) číslo y_k tak, že $S(y) = S(y_k)$.

[18]) Přenechávám čtenáři, aby si sám dokázal, že každá škála jednoduché funkce místa je jednoduchá.

uspořádanou množinou, která má dvě výše uvedené vlastnosti. (Tomu odpovídá např. okolnost, že k pojmu funkce místa lze dospět rozmanitými způsoby, jak již bylo na začátku připomenuto.) Touto otázkou se však zde zabývat nebudeme.

Tímto článkem uzavírám druhou část pojednání o algebraizaci míry a integrálu. V prvních dvou částech jsme si tedy probrali pojem somatu, měrové funkce a funkce místa. Pomocí těchto pojmů zavedeme v třetí části pojem integrálu.

NOVÉ METODY MĚŘENÍ DILATACE ČASU[1])

Zdeněk Horák, Praha

Jedním z hlavních rysů Einsteinovy teorie relativnosti je poznatek, že čas není veličinou absolutní, že jeho běh zjišťovaný měřením závisí na podmínkách, ve kterých měření času konáme. Zpomalení chodu hodin se všeobecně nazývá *dilatací času* a tento jev lze pozorovat za různých podmínek, které lze formálně rozdělit do tří skupin:

1. *Inerciální dilatace času* je běžně známá pod jménem *Lorentzova dilatace*. Pozorujeme ji v inerciálních soustavách (rovnoměrně přímočaře se pohybujících vzhledem k stálicím) a jeví se takto: Pozorovatel, který srovnává časové údaje t_v hodin, které se vzhledem k němu pohybují rychlostí v stálou co do velikosti i směru, s údaji t hodin, které jsou vzhledem k němu v klidu, zjišťuje, že pohyblivé hodiny jdou pomaleji v poměru

$$\frac{t_v}{t} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,. \tag{1}$$

2. *Neinerciální dilatace času* vzniká v neinerciálních soustavách (jejichž pohyb vzhledem k stálicím je nesetrvačný, tj. není rovnoměrný přímočarý) vlivem setrvačných sil, které podle Einsteinovy teorie jsou skutečnými silami charakterizovanými tzv. dynamickým potenciálem χ. Zpomalení chodu hodin v poli setrvačných sil proti chodu hodin v inerciální soustavě (kde $\chi = 0$) je dáno poměrem

$$\frac{t_\chi}{t} = \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\,. \tag{2}$$

Intenzita i „setrvačného pole", která je podobně jako v gravitačním poli rovna síle dělené hmotou, tedy rovna zrychlení, souvisí s dynamickým potenciálem vztahem

$$i = -\operatorname{grad}\chi\,. \tag{3}$$

Tak např. v soustavě pohybující se vzhledem k stálicím se stálým přímočarým zrychlením a ve směru osy x je

$$i_x = a\,,\ x = \frac{1}{2}at^2,\ \chi = -ax\,,\ i_x = -\frac{\partial\chi}{\partial x}\,. \tag{4}$$

---

[1]) Přednáška proslovená pro pobočku JČMF Středočeský kraj a pro ÚDVU v Praze 5. května 1961.