hovuje axiomům Hausdorffovým. Ukazuje se, že takto definovaný abstraktní prostor je homeomorfní s vnitřkem kružnice, t. j. existuje jisté t. zv. kanonické, vzájemně jednoznačné spojité zobrazení Φ (se spojitým inversním zobrazením Φ^{-1}) tohoto prostoru na množinu bodů u: $|u| < \varrho$ komplexní roviny. Lze tudíž v tomto prostoru definovat metriku. Z vlastností zobrazení Φ plyne, že lze definovat i pojmy analytičnost, úhel.

Uvažujme nyní v rovině u diferenciální rovnici $\dot{u} = f(u)$, kde f je jednoznačná regulární funkce. Trajektoriím $u(t)$ odpovídají zobrazením Φ jisté homeomorfní obrazy přímky v definovaném abstraktním prostoru, které budeme nazývat trajektoriemi na Riemannově ploše. Vzhledem k tomu, že zobrazení Φ je konformní, zůstávají zachovány úhly i orientace. Každým bodem Riemannovy plochy prochází tudíž jediná trajektorie a pole trajektorií je orientovatelné. Je dále zřejmé, že tato konstrukce odpovídá postupu, kterého bylo použito při důkazu vět 8 a 9.

Vše je mnohem názornější, použijeme-li obvyklého modelu Riemannovy plochy, který (v okolí bodu (0) pro funkci $\sqrt[3]{z}$) připomeneme na obr. 3, ve kterém jsou šipkami vyznačeny jedině přípustné přechody z jednoho listu na druhý.

Obtíže v úvahách na začátku tohoto odstavce pramení z toho, že jsme trajektorie na Riemannově ploše „promítli" do roviny a tak „narušili" jednoznačnost a orientovatelnost pole trajektorií. Zároveň můžeme považovat za odůvodněné závěry, které jsme vyslovili na začátku tohoto odstavce.

Literatura

[1] S. Saks, A. Zygmund: *Funkcje analityczne*, Warszawa, 1948.

VYHODNOCOVÁNÍ VÝSLEDKŮ FYSIKÁLNÍCH MĚŘENÍ PŘI MALÉM POČTU PROVEDENÝCH ZKOUŠEK

VÁCLAV MÜLLER

Tento článek je pokračováním článku „Poznámky k experimentálnímu studiu fysikálních vlastností vulkanisátů kaučuku".[1]) Uvádí jednoduchý případ použití známého Studentova t-rozdělení k posouzení významnosti rozdílu mezi průměry dvou řad fysikálních měření a k ochránění vyhodnocení výsledků měření před chybnými závěry. Samozřejmou povinností experimentátora je pečovat v našem případě o přesné chemické složení příslušné směsi kaučuku, přesné zhotovení vzorků a o dostatečnou přesnost měřicích přístrojů. Uvedené metody bylo použito k vyhodnocení měření vlivu teploty na účinný stupeň elasticity zvoleného vulkanisátu kaučuku metodou odrazu. Bylo dvacet stejných vzorků téže směsi kaučuku ve dvou řadách měření. Počet proměřovaných vzorků v obou řadách byl $N_1 = N_2 = 10$ [2]). Výsledky měření byly tyto:

Počet stupňů volnosti je $n = N_1 + N_2 - 2$, neboť k výpočtu $\bar{x}_1$ a $\bar{x}_2$ je zapotřebí dvou lineárních vztahů (pro každou z obou řad měření je $N_1 = N_2 = 10$ je totiž počet stupňů volnosti $n_1 = N_1 - 1$, $n_2 = N_2 - 1$, tedy o jednotku menší než počet provedených měření, poněvadž každý z průměrů je určen lineárním vztahem). V našem případě je $n = 18$.

[1]) V tomto časopise, roč. II (1957), č. 5, str. 552—559.

[2]) Elasticita kaučukových směsí zpravidla vzrůstá s rostoucí teplotou v teplotních mezích cca 0 °C až 100 °C, což svědčí o úbytku vnitřního tření a o optimálním uplatnění elastických vlastností zvoleného vulkanisátu v uvedeném teplotním oboru. K poklesu elasticity dochází až v teplotním oboru 100 až 150 °C vlivem tepelné destrukce makromolekul zvoleného vulkanisátu kaučuku.

10 měření v každé řadě (celkem s 20 vzorky téže kaučukové směsi)	Účinný stupeň elasticity v % při teplotě	
	17,5 °C x_{1i}	54 °C x_{2i}
1	57,0	62,0
2	57,5	61,0
3	56,5	60,5
4	56,2	62,0
5	56,2	62,5
6	56,0	62,5
7	57,0	61,5
8	58,0	63,0
9	57,5	62,0
10	58,0	62,5
Aritmetický průměr	$\bar{x}_1 = 56{,}99$	$\bar{x}_2 = 61{,}95$

Tabulka 2

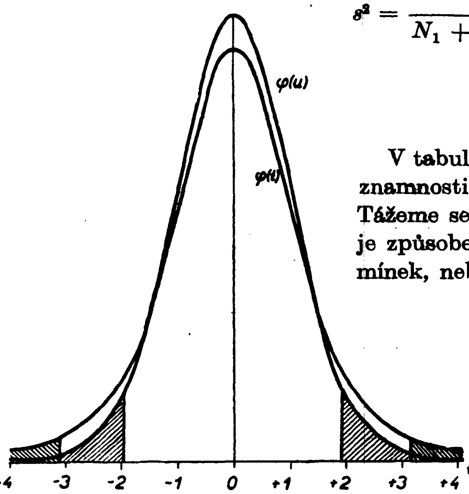
Kritické hodnoty t_α:

n	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}001$	n	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}001$
1	12,706	63,657	636,619	26	2,056	2,779	3,707
2	4,303	9,925	31,598	27	2,052	2,771	3,690
3	3,182	5,841	12,941	28	2,048	2,763	3,674
4	2,776	4,604	8,610	29	2,045	2,756	3,659
5	2,571	4,032	6,859	*30*	*2,042*	*2,750*	*3,646*
6	2,447	3,707	5,959	35	2,030	2,724	3,592
7	2,365	3,499	5,405	*40*	*2,021*	*2,704*	*3,551*
8	2,306	3,355	5,041	45	2,014	2,689	3,521
9	2,262	3,250	4,781	50	2,008	2,678	3,496
10	2,228	3,169	4,587				
				60	*2,000*	*2,660*	*3,460*
11	2,201	3,106	4,437	70	1,994	2,648	3,435
12	2,179	3,055	4,318	80	1,990	2,638	3,416
13	2,160	3,012	4,221	90	1,987	2,631	3,402
14	2,145	2,977	4,140	100	1,984	2,626	3,390
15	2,131	2,947	4,073				
				120	*1,980*	*2,617*	*3,373*
16	2,120	2,921	4,015	140	1,977	2,611	3,361
17	2,110	2,898	3,965	160	1,975	2,607	3,352
18	2,101	2,878	3,922	180	1,973	2,603	3,346
19	2,093	2,861	3,883				
20	2,086	2,845	3,850	200	1,972	2,601	3,340
				300	1,968	2,592	3,324
21	2,080	2,831	3,819	400	1,966	2,588	3,315
22	2,074	2,819	3,792	500	1,965	2,586	3,310
23	2,069	2,807	3,767				
24	2,064	2,797	3,745	1000	1,962	2,581	3,300
25	2,060	2,787	3,725				
				∞	*1,960*	*2,576*	*3,291*

Nechť $\bar{x}_1$ je aritmetický průměr z N_1 hodnot x_{1i} první řady měření, aritmetický průměr $\bar{x}_2$ z N_2 hodnot x_{2i} druhé řady měření. Pak lze hodnoty veličiny t rozdílu obou průměrů počítat podle známých vzorců:

$$s^2 = \frac{1}{N_1 + N_2 - 2}\left[\sum_{i=1}^{N_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{N_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2\right],$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s}\sqrt{\frac{N_1N_2}{N_1 + N_2}}\ {}^{3)}.$$



Obr. 1.

V tabulce 2 jsou uvedeny hodnoty t pro hladiny významnosti $\alpha = 0{,}05$; $0{,}01$; $0{,}001$; a pro $n = 1$ až ∞. Tážeme se, zda rozdíl mezi průměry obou řad měření je způsoben skutečně vlivem různých teplotních podmínek, nebo rozptylem, způsobeným použitou měrnou metodou a zkoušeným materiálem. Zodpovědění této otázky závisí na volbě hladiny významnosti rozdílu průměrů obou provedených řad měření a na počtu použitých vzorků. Volba hladiny významnosti závisí na závažnosti požadovaného rozhodnutí. V praxi se ukázalo, že stačí zvolit hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$. Volba hladiny významnosti 0,05 má v našem případě tento smysl: Kdyby mezi účinnými stupni elasticity kaučukové směsi při dvou různých teplotách nebylo rozdílu, pak při velmi mnoha opakovaných měřeních účinného stupně elasticity jen asi v 5% případů by vypočtená hodnota $|t|$ překročila kritickou hodnotu $t_{0,05}$. Výhodou Studentova t-rozdělení s fysikálního hlediska je, že není nutno provádět serie měření s velkým počtem vzorků, na př. 100. K ověření významnosti rozdílu mezi průměry obou řad měření postačí použít malého počtu vzorků (v našem případě 20)[4]. V tabulce 2 jsou vyznačeny hodnoty $\pm t$, přiřazené určitým zlomkům α celkové plochy, vymezené grafem $\varphi(t)$. Vně hranice $\pm t$ leží příslušný zlomek α celkové plochy, vymezené grafem funkce $\varphi(u)$. Hodnoty t jsou větší než odpovídající hodnoty u. Jestliže vypočtená hodnota veličiny t (rovnice (1)) přesahuje kritické hodnoty t_α, odpovídající zvolené hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ (tab. 2), je v našem případě vliv teploty na účinný stupeň elasticity zvoleného vulkanisátu kaučuku jistý, nenáhodný. V našem případě stanoví výpočet hodnotu veličiny $t = 14{,}81$ pro $n = 18$. Je tedy hodnota veličiny $|t|$ větší než příslušná kritická hodnota $t_\alpha = 3{,}922$, odpovídající dokonce hladině významnosti $\alpha = 0{,}001$, a tím spíše zvolené hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$. Vliv teploty na účinný stupeň elasticity daného vulkanisátu kaučuku je tedy jistý, nenáhodný.

---

[3]) Rozložení funkce t je symetrické a její průběh $\varphi(t)$ je plošší než u normálního Gaussova rozložení $\varphi(u)$ (obr. 1). Je podstatné, že průběh funkce t závisí jen na N, nikoli na směrodatné odchylce σ, jak je tomu u normální Gaussovy funkce.

[4]) V našem případě by se dalo použít konkretně ještě jednoduššího kriteria: Protože hodnoty x_{1i} jsou vesměs menší než x_{2i}, lze použít na příklad β-testu (viz Jaroslav Hájek, Praha: „Některá pořadová rozdělení a jejich použití", Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955), str. 17—31). Při použití β-testu v našem příkladě by bylo možno použít dokonce jen 8 vzorků, to jest $N_1 = N_2 = 4$.

Literatura

R. A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, London 1957.