Ivo Marek

Matice s kladnými prvky a kritičnost jaderného reaktoru

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 11 (1966), No. 3, 121--134

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137144`

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XI – ČÍSLO 3

MATICE S KLADNÝMI PRVKY A KRITIČNOST JADERNÉHO REAKTORU

IVO MAREK, Praha

ÚVOD

V mnoha fyzikálních a technických oborech se při řešení praktických úloh často stává, že klasické matematické teorie nestačí k řešení daných úloh a je nutné takové teorie zobecnit, anebo vytvořit teorie nové. To je jeden ze způsobů, jak fyzikální a technické obory přímo ovlivňují rozvoj některých matematických teorií. Na druhé straně jsou mnohdy takové nové teorie natolik silné, že odpovídají též na některé otázky, které původní úloha neklade a dávají tak podněty k dalším experimentům nebo podrobnějším výzkumům. Některé původně fyzikálně názorné pojmy lze dokonce rigorózně definovat až na základě přesné matematické teorie. Tím také zase působí matematické teorie zpětně na fyzikální a technické obory. V tomto pojednání se budeme zabývat zobecněním teorie matic s nezápornými prvky, zejména pak zobecněním klasické Perronovy věty o existenci kladné vlastní hodnoty a příslušného vlastního vektoru s kladnými prvky a jejích důsledků. Výklad budeme ilustrovat na jedné úloze z teorie jaderných reaktorů. Na této úloze ukážeme, v jakém směru je nutné uvedenou teorii zobecnit, aby s její pomocí bylo možné řešit položené fyzikální problémy. Ukážeme rovněž, že nové výsledky takto získané jsou přirozeným zobecněním známých faktů a jsou v souladu s fyzikálním názorem.

K odvození věty obdobné větě Perronově pro operátory operující v Banachově prostoru potřebujeme zobecnit pojem kladnosti operátoru. To se děje pomocí kužele v Banachově prostoru, jímž lze do prostoru zavést částečné uspořádání a nakonec kladnost. Tohoto osvědčeného postupu použili autoři četných prací zabývajících se transportem neutronů [1 – 17].

U čtenáře předpokládáme kromě znalosti klasické teorie matic znalost základních pojmů teorie Banachových prostorů a Hilbertových prostorů, jakož i znalost základních definicí a tvrzení z teorie lineárních operátorů v Banachově prostoru, zejména pak kompaktních (totálně spojitých) operátorů; vše v rozsahu prvních čtyř kapitol Lusternikovy a Sobolevovy knihy [18]. Pro pohodlí čtenáře jsou potřebná fakta uvedena v textu. Formulace fyzikálního problému a fyzikální interpretace matematického vyšetřování snad pomůže přiblížit čtenářům, ať už matematikům či fyzikům, cíl tohoto pojednání – totiž ukázat jeden směr zobecnění klasické teorie nezáporných matic vyvolaného potřebami fyziky.

2. ZÁKLADNÍ OKRAJOVÁ ÚLOHA REAKTOROVÉ FYZIKY

Buďte G, G_h, $h = 1, \ldots, p$, intervaly definované vztahy

$$G = \bigcup_{h=1}^{p} G_h,\ G_h = \{x \mid R_{h-1} \leqq x \leqq R_h\},\ R = 0 < R_1 < \ldots < R_p .$$

Budeme vyšetřovat soustavu diferenciálních rovnic

$$\text{(1a)} \qquad -\frac{d}{dx}\left[d_j(x)\frac{d}{dx}\Psi_j(x)\right] + \sigma_j(x)\Psi_j(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \sigma_{jk}^{(s)}(x)\Psi_k(x) + \lambda \sum_{k=1}^{N} \sigma_{jk}^{(f)}(x)\Psi_k(x) + S_j(x)$$

s okrajovými podmínkami

$$\text{(1b)} \qquad \left[\frac{d}{dx}\Psi_j(x)\right]_{x=0} = 0,\quad \left[\Psi_j(x) + \alpha_j(x)\frac{d}{dx}\Psi_j(x)\right]_{x=R_p} = 0 .$$

$$\text{(1c)} \qquad \Psi_j(R_h + 0) = \Psi_j(R_h - 0),$$

$$\text{(1d)} \qquad \left[d_j(x)\frac{d}{dx}\Psi_j(x)\right]_{x=R_h-0} = \left[d_j(x)\frac{d}{dx}\Psi_j(x)\right]_{x=R_h+0} .$$

kde σ_j, $\sigma_{jk}^{(s)}$, $\sigma_{jk}^{(f)}$, α_j jsou nezáporné funkce spojité v G_h, zatímco d_j jsou spojité v G_h spolu s prvními derivacemi $d/d_x\, d_j$ a platí při tom

$$\text{(1e)} \qquad 0 \leqq \sigma_{jk}^{(s)},\ 0 \leqq \sigma_{jk}^{(f)},\ \sigma_{jk} = \sigma_{jk}^{(s)} + \sigma_{jk}^{(f)}$$
$$0 < d \leqq d_j(x) \leqq D,\ 0 \leqq \sigma_{jk}(x) \leqq \sum,$$
$$0 \leqq \sigma_j(x) \leqq \sum,\ 0 \leqq \alpha_j(x) \leqq A,\ j, k = 1, \ldots, N .$$

Funkce d_j, σ_j, α_j, σ_{jk} charakterizují dané prostředí, v němž probíhají jaderné reakce a jsou zřejmě obecně nespojité v bodech R_h. Uvedené funkce závisejí na některých parametrech, jako je třeba složení paliva a podobně. Tuto závislost předpokládáme známou a explicite ji nevyznačujeme, pouze symbolicky, a to symbolem γ, který ve výše uvedeném příkladě může charakterizovat stupeň obohacení paliva materiálem s větším účinným průřezem pro štěpení vzhledem k danému standardu; γ lze vyjadřovat např. v procentech.

Celou soustavu rovnic (1) budeme zapisovat symbolicky. K tomu účelu zavedeme operátory L_j, B_{jk}, C_{jk}:

$$\text{(2)} \qquad L_j\Psi_j \equiv -\frac{d}{dx}\left[d_j(x)\frac{d}{dx}\Psi_j(x)\right] + \sigma_j(x)\Psi_j(x)$$

s podmínkami (1b) – (1d),

$$(3) \qquad B_{jk}\Psi_k \equiv \sigma_{jk}^{(s)}(x)\,\Psi_k(x),\ C_{jk}\Psi_k \equiv \sigma_{jk}^{(f)}(x)\,\Psi_k(x)\,.$$

Soustavu (1) lze tedy zapisovat stručně ve tvaru

$$(4) \qquad \mathbf{L}\Psi = \mathbf{B}\Psi + \lambda\mathbf{C}\Psi + \mathrm{S}\,,$$

kde

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_N \end{pmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11}, \ldots, B_{1N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{N1}, \ldots, B_{NN} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11}, \ldots, C_{1N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{N1}, \ldots, C_{NN} \end{pmatrix},\quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix},\quad \mathrm{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že $\mathbf{L}$ – vyjadřuje difúzi a pohlcení, $\mathbf{B}$ – rozptyl, $\mathbf{C}$ – štěpení a S – vnější zdroje. Parametr λ charakterizuje v určitém smyslu stav daného prostředí. V případě, že $\mathrm{S} \not\equiv 0$, tedy v případě, jestliže existují vnější zdroje, je zřejmé, že reakce budou probíhat vždy, a to alespoň s těmi neutrony, které dodává zdroj. Jinak je tomu v případě, kdy vnější zdroje nejsou. Matematicky se takový případ nazývá vlastním a úloha nalézt nenulové řešení Ψ_0 homogenní úlohy, tj. vektoru Ψ_0 a hodnoty λ_0 tak, aby platila rovnice (4), úlohou na vlastní čísla. Poznamenejme, že nezáporné řešení rovnice (4) má význam hustoty neutronového toku.

Podle definice řešením soustavy (1) neboli rovnice (4) je každá integrovatelná se čtvercem v G vektor-funkce Ψ, jež má potřebné derivace a jež splňuje podmínky (1b) – (1d). Naším úkolem je ukázat, že soustava (1) má při vhodném $\lambda_0 > 0$ vždy řešení a při $\mathrm{S} \equiv 0$, že existuje $\lambda_0 > 0$ a Ψ_0 taková, že $\Psi_0(x) > 0$ pro $x \in G$ a platí

$$(5) \qquad \mathbf{L}\Psi_0 = \mathbf{B}\Psi_0 + \lambda_0\mathbf{C}\Psi_0$$

a že toto řešení je až na normovací kladnou konstantu jediné nezáporné řešení úlohy.

Napřed uvedeme některé vlastnosti zavedených operátorů $\mathbf{L}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. Z podmínek (1b) – (1e) vyplývá snadno, že rovnice $\mathbf{L}\Psi = 0$ má jediné řešení Ψ a $\Psi(x) \equiv 0$ pro $x \in G$.

Podobně jako v klasickém případě rovnic se spojitými koeficienty lze dokázat, že existuje inverzní operátor L_j^{-1} ke každému z operátorů L_j, $j = 1, \ldots, N$. Operátor L_j^{-1} je integrálním operátorem a jeho jádrem je Greenova funkce $\mathcal{G}_j$, příslušná rovnici (1a) s podmínkami (1b) – (1d). Tedy

$$L_j^{-1}\Psi_j \equiv \int_G \mathcal{G}_j(x, x')\,\Psi_j(x')\,\mathrm{d}x'\,.$$

Označme symbolem $L_2(G)$ množinu všech tříd integrovatelných se čtvercem v G

komplexních funkcí, přičemž dvě takové funkce lišící se na množině Lebesgueovy míry rovné nule definují tutéž třídu. Pro třídy budeme používat téhož označení jako pro jednotlivé jejich reprezentanty.

V $L_2(G)$ definujeme obvyklým způsobem skalární součin

$$\langle \Psi_j, \Phi_j \rangle = \int_G \psi_j(x)\, \overline{\Phi_j(x)}\, \mathrm{d}x\,, \tag{6}$$

přičemž $\bar{\alpha}$ značí hodnotu komplexně sdruženou s α. Se skalárním součinem (6) se $L_2(G)$ stane Hilbertovým prostorem, tj. úplným unitárním prostorem vzhledem k metrice indukované skalárním součinem (6).

Operátor L_j^{-1} je zřejmě definován pro všechny prvky prostoru $L_2(G)$, zatímco operátor L_j je definován jen na lineálu $\mathscr{D}(L_j) \subset L_2(G)$, do něhož patří funkce mající potřebné derivace v G a splňující podmínky (1b) – (1d). Operátory B_{jk}, C_{jk} jsou definovány pro všechny prvky prostoru $L_2(G)$.

Je-li $\mathbf{A}$ nějaký operátor zobrazující jeho definiční obor $\mathscr{D}(\mathbf{A}) \subset L_2(G)$ do $L_2(G)$ a platí-li rovnost

$$\mathbf{A}(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha\mathbf{A}\Psi + \beta\mathbf{A}\Psi, \quad \Phi, \Psi \in \mathscr{D}(\mathbf{A}), \quad \alpha, \beta - \text{čísla}\,,$$

pro libovolné α, β, Φ, Ψ, pak se $\mathbf{A}$ nazývá lineárním operátorem; nemusí být tedy spojitým zobrazením. Zřejmě všechny operátory L_j, L_j^{-1}, B_{jk}, C_{jk} jsou lineární.

Nechť

$$\mathscr{X} = L_2(G) \times \ldots \times L_2(G) \quad (N\text{-krát})$$

je kartezský součin prostorů $L_2(G)$ a nechť

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{k=1}^{N} \langle \Phi_k, \Psi_k \rangle, \quad \Phi, \Psi \in \mathscr{X}\,, \tag{7}$$

kde $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_N)$, $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_N)$. Snadno se zjistí, že (7) je skalární součin v $\mathscr{X}$ a že prostor $\mathscr{X}$ je s tímto součinem Hilbertovým prostorem.

3. KLADNOST A JEJÍ VÝZNAM PRO ŘEŠENÍ OPERÁTOROVÝCH ROVNIC

Buď K množina vektor-funkcí $\Psi \in \mathscr{X}$, jež mají tu vlastnost, že pro $x \in G$ platí $\Psi_j(x) \geqq 0$, $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_N)$.

Poznámka. Zde jednou Ψ_j značí třídu, po druhé zase některého reprezentanta této třídy. Podle naší úmluvy nebudeme mezi těmito pojmy činit rozdíl.

Právě zavedená množina K má tyto vlastnosti:

(α) $\emptyset \in K$, kde $\emptyset$ značí nulový prvek;

(β) $\Psi \in K$, $\Phi \in K \Rightarrow \Phi + \Psi \in K$;

(γ) $\Psi \in K$, $c > 0 \Rightarrow c\Psi \in K$;

(δ) $\Psi \in K$, $\Psi \not\equiv 0 \Rightarrow -\Psi \,\bar{\in}\, K$;

(ε) $\Psi_n \in K$, $\Psi_n \to \Psi \Rightarrow \Psi \in K$.

Množina, jež splňuje požadavky (α) – (ε), se nazývá *kuželem*. Je tedy množina nezáporných vektor-funkcí $\Psi \in \mathscr{X}$ kuželem v prostoru $\mathscr{X}$. Uvedeme ještě jiné příklady kuželů.

Příklad 1. Buď E_l l – rozměrný vektorový prostor, jeho prvky jsou vektory o souřadnicích $(x_1, \ldots, x_l)$. Kuželem v E_l je množina vektorů s nezápornými souřadnicemi.

Příklad 2. V E_2 reprezentovaném komplexní rovninou, tj. čísly tvaru $z = \varrho\, e^{i\psi}$, kde $\varrho \geqq 0$, $-\pi < \varphi \leqq \pi$, je kuželem každý klín se středovým úhlem $\alpha < \pi$. Kuželem je tedy každá množina komplexních čísel taková, že do ní patří $z = \varrho\, e^{i\psi}$, právě když platí buď $\varrho = 0$, anebo $|\varphi - \vartheta_0| \leqq \alpha$, kde ϑ_0 je nějaké reálné číslo ležící v intervalu $(-\pi, \pi)$.

Buď nyní Y nějaký Banachův prostor, tj. lineární normovaný prostor úplný vzhledem k normě. To znamená, že pro $x \in Y$ je definováno reálné číslo – norma prvku –, jež značíme symbolem $\|x\|$ a jež má tyto vlastnosti:

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = \emptyset, \text{ kde } \emptyset \text{ značí nulový prvek v } Y;$$

$$\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|;$$

$$\|cx\| = |c|\,\|x\|, \; c - \text{konstanta}.$$

Buď K kužel v prostoru Y. Operátor $\mathbf{T}$ zobrazující Y do sebe se nazývá K kladným, jestliže $\mathbf{T}x \in K$ pro $x \in K$.

Příklad. Buď $Y = E_l$ eukleidovský prostor, $\mathbf{T} = (t_{jk})$ matice s prvky $t_{jk} > 0$. Zřejmě $y = \mathbf{T}x$ má nezáporné prvky, jakmile vektor x má nezáporné prvky. $\mathbf{T} = (t_{jk})$, je tedy K–kladný operátor, jestliže K je kužel vektorů s nezápornými souřadnicemi.

Vrátíme-li se opět do našeho prostoru $\mathscr{X} = L_2(G) \times \ldots \times L_2(G)$ a k našemu původnímu problému, zjistíme, že pro $\Phi_j \in \mathscr{D}(L_j)$ platí

$$\langle L_j\Psi_j, \Psi_j \rangle = -\int_G \frac{d}{dx}\left[d_j(x)\frac{d}{dx}\Psi_j(x)\right]\overline{\Psi_j(x)}\,dx =$$

$$= -\left[d_j(x)\frac{d}{dx}\Psi_j(x)\,\overline{\Psi_j(x)}\right]_{x=0}^{x=R_p} +$$

$$+ \int_G d_j(x)\left|\frac{d}{dx}\Psi_j(x)\right|^2 dx =$$

$$= -\,d_j(R_p)\,\overline{\Psi_j(R)}\left[\frac{d}{dx}\Psi_j(x)\right]_{x=R_p} +$$

$$+ d_j(0)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\Psi_j(x)\right]_{x=0}\Psi_j(0)\,+$$

$$+\int_G d_j(x)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\Psi_j(x)\right|^2\mathrm{d}x\,.$$

Je-li $\alpha(R_p) > 0$, obdržíme rovnost

$$\langle L_j\Psi_j,\Psi_j\rangle = d_j(R_p)\,\frac{1}{\alpha_j(R_p)}\,|\Psi_j(R_p)|^2 + \int_G d_j(x)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\Psi_j(x)\right|^2\mathrm{d}x \tag{8}$$

a je-li $\alpha_j(R_p) = 0$, pak

$$\langle L_j\Psi_j,\Psi_j\rangle = \int_G d_j(x)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\Psi_j(x)\right|^2\mathrm{d}x\,. \tag{9}$$

Z formulí (8) a (9) je patrné, že

$$\langle L_j\Psi_j,\Psi_j\rangle \geqq 0\,, \tag{10}$$

přičemž $\langle L_j\Psi_j,\Psi_j\rangle = 0$ právě když $\Psi_j(x) \equiv 0$ pro $x \in G$, což je evidentní zejména v případě (8), zatímco v případě (9) plyne uvedená rovnost odtud, že je-li $\Psi_j(x) \equiv$ konst, pak podle (1b) $\psi_j(x) \equiv 0$ v G. Odtud pak již plyne nezápornost, vlastně kladnost jádra $\mathscr{G}_j$:

$$\mathscr{G}_j(x, x') \geqq 0 \text{ pro } x, x' \in G\,. \tag{11}$$

O Greenově funkci $\mathscr{G}_j$ je známo, že tato funkce je spojitá v $G \times G$, takže operátor L_j^{-1} je spojitým K-kladným operátorem. To, že B_{jk}, C_{jk} jsou K-kladné operátory, je evidentní. Bezprostředním důsledkem toho je, že operátory $L^{-1} = \operatorname{diag}\{L_j^{-1}, \ldots, L_N^{-1}\}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou $\tilde{K}$-kladnými operátory v $\mathscr{X}$, přičemž $\tilde{K} = K \times \ldots \times K$.

Spojitost jader $\mathscr{G}_j = \mathscr{G}_j(x, x')$ zaručuje, že operátory L_j^{-1}, $j = 1, \ldots, N$, jsou kompaktní, tj. zobrazují každou ohraničenou množinu $\mathfrak{N}_j \subset L_2(G)$ do kompaktní množiny $\mathfrak{M} = L_j^{-1}\mathfrak{N}$. Pro takové operátory platí známé Fredholmovy věty.

(I) Rovnice

$$\Psi - \lambda\mathbf{A}\Psi = \Phi \tag{12}$$

má buď právě jedno řešení pro každý daný prvek $\emptyset \in \mathscr{X}$, nebo existuje nenulové (netriviální) řešení rovnice

$$\Psi - \lambda\mathbf{A}\Psi = \Phi\,. \tag{13}$$

(II) Má-li rovnice (13) netriviální řešení, pak existuje netriviální řešení rovnice

$$\Phi^* - \bar{\lambda}\mathbf{A}^*\Phi^* = \emptyset\,, \tag{14}$$

kde $\mathbf{A}^*$ je operátor sdružený s operátorem $\mathbf{A}$, přičemž počet lineárně nezávislých řešení rovnice (13) je roven počtu lineárně nezávislých řešení rovnice (14).

Poznamenejme, že adjungovaný neboli sdružený operátor $\mathbf{A}^*$ je definován vztahy

$$(\Psi, \mathbf{A}^*\Phi) = (\mathbf{A}\Psi, \Phi) \quad \text{pro} \quad \Psi \in \mathscr{D}(\mathbf{A}), \Phi \in \mathscr{D}(\mathbf{A}^*) .$$

(III) Rovnice (12) má řešení, právě když $(\chi, \Phi^*) = 0$ pro každé řešení Φ^*rovnice (14).

Tyto Fredholmovy věty jsou zobecněním známých vět o řešitelnosti soustavy lineárních algebraických rovnic s maticí $\mathbf{A} = (a_{jk})$, kde $\mathbf{A}^*$ adjungovaná matice je tvořena prvky $a^*_{jk} = \bar{a}_{kj}$.

Poněvadž máme na mysli konečně rozměrný prostor E_l, hledáme analogii okruhu čtvercových matic daného stupně. Pro Banachův prostor Y obdržíme prostor $[Y]$ ohraničených lineárních zobrazení prostoru Y do sebe s normou

$$\|\mathbf{T}\| = \sup_{\|\Psi\| = 1} \|\mathbf{T}\Psi\| .$$

Zřejmě každý Hilbertův prostor je též Banachovým prostorem, zavedeme-li normu výrazem $\|\Psi\| = (\Psi, \Psi)^{1/2}$.

Dá se ukázat, že pro každý operátor $\mathbf{T} \in [Y]$ existuje limita

$$\lim_{m \to \infty} \|\mathbf{T}^n\|^{1/n} = r(\mathbf{T}) .$$

Číslo $r(\mathbf{T})$ se nazývá *spektrálním poloměrem operátoru* $\mathbf{T} \in [Y]$.

Dále uvedeme jedno lemma velmi dobře známé v případě matic.

Lemma 1: Je-li $\mathbf{T} \in [Y]$ a $r(\mathbf{T}) < 1$, pak existuje operátor $(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}$ a v normě prostoru $[Y]$ platí vyjádření

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k ,$$

přičemž $(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \in [Y]$.

Tohoto lemmatu použijeme ke konstrukci operátoru $(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}$ za předpokladu, že $r(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}) < 1$. Tento předpoklad je splněn díky vlastnostem jaderných veličin d_j, σ_j, σ_{jk}, α_j a je splněn ve všech případech, kdy rovnice (1) popisují hustotu neutronového toku v jaderném reaktoru.

Lemma 2: Předpokládejme, že $r(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}) < 1$, pak existuje operátor $(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}$, platí vyjádření

$$(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B})^k \mathbf{L}^{-1} \tag{15}$$

a operátor $(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}$ je kompaktní.

Důkaz. Z rovností

$$\mathbf{L} - (\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1} = - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1} ,$$

$$(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1} = [\mathbf{I} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{L}^{-1}$$

plyne podle lemmatu 1, že

$$(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B})^k \mathbf{L}^{-1} .$$

Kompaktnost operátoru $(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}$ plyne odtud, že součin kompaktního operátoru a operátoru ohraničeného je operátor kompaktní.

Jak známo, v E_l platí

Lemma 3′. Nezáporná matice $\mathbf{T} = (t_{jk})$, pro niž $r(\mathbf{T}) > 0$, má alespoň jedno kladné vlastní číslo μ_0 a jemu přísluší alespoň jeden vlastní vektor φ_0 s nezápornými souřadnicemi.

Obdobou v nekonečněrozměrném prostoru Y je následující lemma.

Lemma 3. K-kladný kompaktní operátor $\mathbf{T} \in [Y]$, pro nějž $r(\mathbf{T}) > 0$, má alespoň jedno kladné vlastní číslo a tomuto vlastnímu číslu přísluší alespoň jeden vlastní vektor $\Psi_0 \in K$.

Zatímco v konečněrozměrném prostoru E_l má každý K-kladný operátor $\mathbf{T}$ vždy alespoň jeden nezáporný vlastní vektor, obdobná věta v nekonečněrozměrných prostorech neplatí ani za předpokladu, že vyšetřovaný operátor je kompaktní. Příkladem může být v prostoru $C(\langle 0, 1\rangle)$ spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ Volterrův integrální operátor $\mathbf{V}$ určený jádrem v spojitým na $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ a takovým, že

$$v(x, x') > 0 \quad \text{pro} \quad x > x'$$

a

$$v(x, x') = 0 \quad \text{pro} \quad x < x' ,$$

$$\Phi = \mathbf{V}\Psi \equiv \int_0^x v(x, x')\Psi(x')\,\mathrm{d}x .$$

Je známo, že $r(\mathbf{V}) = 0$ a bod $\lambda = 0$ není vlastní hodnotou operátoru $\mathbf{V}$.

V konečněrozměrných prostorech platí důležitá Perronova věta.

Věta 1′. Jsou-li všechny prvky matice $\mathbf{T}$ typu $l \times l$ kladné, existuje kladná vlastní hodnota μ_0 a jí přísluší vlastní vektor φ_0 s vesměs kladnými souřadnicemi. Kromě vektorů tvaru $c\Phi_0$, kde $c > 0$, neexistuje žádný jiný nezáporný vlastní vektor matice $\mathbf{T}$. Pro ostatní vlastní hodnoty $\lambda \neq \mu_0$ matice $\mathbf{T}$ platí nerovnost

$$|\lambda| < \mu_0 . \tag{16}$$

Taková věta, jakou je věta 1′, by se hodila pro řešení naší úlohy z reaktorové fyziky, neboť z fyzikálního významu veličiny Ψ_0 je patrné, že tato veličina musí být nezápornou vektor-funkcí a že je určena jednoznačně až na normovací faktor, který je do značné míry nepodstatný. K odvození takové věty v nekonečněrozměrném prostoru je však zapotřebí zobecnit pojem matice s kladnými prvky. Toto zobecnění se dá provést několika způsoby. Zde uvedeme jednu celkem přirozenou možnost.

Definice. K-kladný operátor $\mathbf{T} \in [Y]$ se nazývá u_0-kladným operátorem, jestliže existuje vektor $u_0 \in K$, $\|u_0\| = 1$, takový, že pro každý vektor $\Phi \in K$, $\Phi \neq 0$, existují kladná čísla $\alpha = \alpha(\Phi)$, $\beta = \beta(\Phi)$ a přirozené číslo $p = p(\Phi)$ tak, že platí vztahy

$$\alpha u_0 \prec \mathbf{T}^p \Phi \prec \beta u_0 , \tag{17}$$

přičemž symbol $\Phi \prec \Psi$ nebo $\Psi \succ \Phi$ značí, že $\Psi - \Phi \in K$; tedy $\Psi_j(x) - \Phi_j(x) \geqq 0$ pro $x \in G$, jestliže $Y = L_2(G)$.

Věta 1. Kompaktní u_0-kladný operátor $\mathbf{T} \in [Y]$ má kladný spektrální poloměr $r(\mathbf{T})$. Existuje kladná vlastní hodnota μ_0 operátoru Ψ a jí přísluší vlastní vektor $\Psi_0 \in K$, takže platí rovnost

$$\mathbf{T}\Psi_0 = \mu_0 \Psi_0 ,$$

přičemž nerovnost

$$|\lambda| < \mu_0$$

platí pro každou jinou vlastní hodnotu operátoru $\mathbf{T}$ různou od μ_0. Kromě vektorů tvaru $c\Psi_0$, kde $c > 0$, v kuželi K jiné vlastní vektory operátoru neleží.

Poznámka. Tato věta je zobecněním Perronovy věty o maticích s kladnými prvky. Prvek u_0, o němž hovoří věta 1, lze v prostoru E_l volit třeba takto $u_0 = (c, \ldots, c)$, kde c je vhodná kladná konstanta. Ostatní podmínky věty 1 jsou splněny, neboť v konečněrozměrném prostoru je každý lineární operátor kompaktní a u_0-kladnost operátoru daného maticí s kladnými prvky, kde $u_0 = (c, \ldots, c)$, je zřejmá.

Věta 1 je klíčem k řešení problému existence kladného řešení homogenní soustavy rovnic (1). Stačí totiž dokázat, že operátor $(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}$ je kompaktní a u_0-kladný při vhodném $u_0 \in K$. To se však přímo dá provést jen těžko. Postupujeme proto trochu jinak. Snadno zjistíme, že operátor $\mathbf{C}(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}$ je v_0-kladný, kde $v_0 = [\mathbf{C}(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}]^s \mathrm{I}$, s je vhodné přirozené číslo a I označuje vektor-funkci, jejíž všechny souřadnice jsou rovny funkci identicky rovné jedné. Kompaktnost operátoru $\mathbf{C}(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}$ plyne podobně jako kompaktnost operátoru $(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}$ z lemmat 1 a 2. Podle věty 1 existuje vlastní vektor $\varphi_0 \in K$ a vlastní hodnota $\mu_0 > 0$ tak, že platí vztahy

$$\mathbf{C}(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\Phi_0 = \mu_0 \Phi_0,\ \Phi_0 \neq \emptyset$$

$$|\lambda| < \mu_0,\ \lambda \neq \mu_0,\ \lambda - \text{vlastní hodnota } \mathbf{C}(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1} .$$

Snadno lze dokázat, že je-li vektor Φ vlastním vektorem operátoru $\mathbf{C}(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}$ příslušný nenulové vlastní hodnotě λ, pak vektor $\Psi = (\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\Phi$ je vlastním vektorem operátoru $(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}$ příslušným téže hodnotě λ a naopak.

Nyní již okamžitě obdržíme existenční větu.

Věta 2. Soustava diferenciálních rovnic (1) s okrajovými podmínkami (1b) a s podmínkami na rozhraní pásem (1c), (1d) má pro $S_j(x) \equiv 0$, $j = 1, \ldots, N$, nenulové řešení Ψ_0, jež je kladné v G a jež přísluší kladné charakteristické hodnotě $\lambda_0 = \mu_0^{-1}$. Kromě řešení $c\Psi_0$, kde $c > 0$, soustava (1) nemá jiná vlastní nezáporná řešení. Hodnota λ_0 má tu vlastnost, že nerovnost

$$|\lambda| > \lambda_0$$

platí pro každou charakteristickou hodnotu $\lambda \neq \lambda_0$ soustavy (1).

Podmínky řešitelnosti nehomogenní soustavy (1), tj. soustavy (1) s $S_j(x) \not\equiv 0$ alespoň pro jeden index j, obdržíme jako přímé důsledky vlastností (I) – (III) plynoucí z kompaktnosti operátoru $(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}$. Nebudeme je v tomto pojednání uvádět, neboť nemají bezprostřední vztah k Perronově větě.

4. KRITIČNOST JADERNÉHO REAKTORU

Víme již, že vektor-funkce $\Psi_0 \in K$, jejíž existenci jsme dokázali v předchozím odstavci, má význam hustoty neutronového toku. Zmíněné existenční tvrzení zaručuje, že veličina Ψ_0, jež je definována jakožto počet neutronů dané rychlosti v daném jednotkovém objemu, je kladná, což je z fyzikálního hlediska vcelku zřejmé. Viděli jsme rovněž, že zmíněná již kladnost spolu s kompaktností operátoru $(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}$ zaručuje existenci kladné charakteristické hodnoty λ_0. Vzhledem k platnosti nerovnosti $|\lambda| > \lambda_0$ pro libovolnou jinou charakteristickou hodnotu vyšetřovaného systému rovnic nazývá se hodnota dominantní charakteristickou hodnotou soustav (1).

Ukážeme, jak hodnota λ_0 souvisí s pojmem kritičnost. Intuitivně řečeno, kritickým se nazývá reaktor tehdy, když při jaderných reakcích v něm vzniká právě tolik neutronů dané rychlosti, kolik se jich pohltí a kolik jich unikne.

Říkáme, že jaderný reaktor je *kritický* neboli že je v *kritickém stavu*, jestliže odpovídající dominantní charakteristická hodnota λ_0 je rovna jedné. V případě, že $\lambda_0 < 1$, respektive $\lambda_0 > 1$, nazývá se reaktor *nadkritickým*, respektive *podkritickým*.

Existuje několik možností, jak dosáhnout kritičnosti reaktoru. Následující úvahu lze provést pro libovolný způsob sestrojování kritického stavu reaktoru. Názorně si budeme vše ilustrovat na příkladě, kdy kritičnosti dosahujeme obohacováním nebo ochuzováním štěpitelného materiálu látkami s větším či menším účinným průřezem pro štěpení. Je zřejmé, že čím bude v daném objemu Vol G více štěpitelného materiálu, tím více neutronů vznikne na jednu absorpci. Stupeň obohacení budeme vyjadřovat parametrem γ. Mírou obohacení bude třeba procentový obsah štěpitelnějšího izotopu ve směsi, jíž je prostředí vyplněno. Z toho, co jsme dosud uvedli, lze očekávat, že pro $\gamma' > \gamma$ je $\lambda(\gamma') < \lambda_0(\gamma)$; jinými slovy, při změněném obohacení (eventuální další parametry zůstávají beze změny) se mění kritičnost monotonně. Tato hypotéza se projevuje jako správná; její platnost dokážeme pomocí uvedeného již aparátu K-kladných operátorů. Řešení problému existence a jednoznačnosti kritického parametru vede k zajímavému tvrzení o monotonní závislosti dominantní charakteristické hodnoty na uvedeném parametru. Víme již, že k danému reaktoru je přiřazena soustava (1) neboli operátor $(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}$. Abychom vyznačili závislost na stupni obohacení, píšeme $[(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}](\gamma)$, což odpovídá stavu, kdy koeficienty soustavy (1) závisejí (a to známým způsobem) na γ, $0 \leqq \gamma \leqq +\infty$. Dokážeme, že je-li $\gamma' > \gamma$, pak pro příslušné dominantní charakteristické hodnoty platí ostrá nerovnost

$$\lambda_0(\gamma) > \lambda_0(\gamma')\,. \tag{18}$$

Je zřejmé, že za předpokladu spojitosti funkce $\lambda_0 = \lambda_0(\gamma)$ platnost nerovnosti (18) implikuje jednoznačnost kritického parametru. Nutnou a postačující podmínkou existence kritického parametru je platnost nerovnosti

$$\lambda_0(\gamma) \leqq 1$$

alespoň pro jednu hodnotu γ. Spojitost funkce $\lambda_0 = \lambda_0(\gamma)$ je důsledkem spojitosti operátor-funkce $\boldsymbol{\Phi} = [(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}](\gamma)$. Spojitost operátor-funkce $\boldsymbol{T} = \mathbf{T}(\varrho)$ v bodě $\varrho_0 \in (0, \infty)$ je definována jako obvykle.

Definice. Řekneme, že operátor-funkce $\boldsymbol{T} = \mathbf{T}(\varrho)$ je spojitá v bodě $\varrho_0 \in (0, \infty)$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $|\varrho - \varrho_0| < \delta$ platí nerovnost $\|\boldsymbol{T}(\varrho) - \boldsymbol{T}(\varrho_0)\| < \varepsilon$. Je-li $\boldsymbol{T}$ spojitá v každém bodě $\varrho \in (0, +\infty)$, pak říkáme, že $\boldsymbol{T}$ je spojitá v $(0, +\infty)$.

Poznamenejme, že spojitost operátor-funkce $\boldsymbol{\Phi} = [(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}](\gamma)$ v $(0, +\infty)$ je fyzikálně zřejmá a dá se poměrně snadno dokázat. Stačí proto k důkazu jednoznačnosti kritického parametru zaručit monotonii funkce $\lambda_0 = \lambda_0(\gamma)$. K tomu použijeme následující věty.

Věta 3. Předpokládejme, že 1. operátor-funkce $\boldsymbol{T} = \mathbf{T}(\varrho)$ je pro každé $\varrho \in (0, +\infty)$ u_0-kladným kompaktním operátorem (u_0 — nezávisí na ϱ). 2. Operátor-funkce $\boldsymbol{T} = \mathbf{T}(\varrho)$ je spojitá v $(0, +\infty)$ a spojitá zprava v $\varrho = 0$. 3. Vztah

$$[\boldsymbol{T}(\varrho') - \boldsymbol{T}(\varrho)]\,\Psi > \alpha(\varrho, \varrho')\,\Psi\,, \tag{19}$$

kde $\alpha(\varrho, \varrho') > 0$ pro $\varrho' > \varrho$, platí pro každý vektor $\Psi \in K$ takový, že existuje $v = v(\Psi)$ tak, že $\Psi > v u_0$.

Za těchto předpokladů je funkce $\lambda_0 = \lambda_0(\varrho)$ spojitá a klesající v intervalu $(0, +\infty)$.

Poznamejme, že platnost vztahu (19) pro operátor-funkci $\boldsymbol{\Phi} = [(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}](\gamma)$ plyne z relací

$$\sigma_j(x, \gamma') \leqq \sigma_j(x, \gamma),\ \sigma_{jk}^{(s)}(x, \gamma') \geqq \sigma_{jk}^{(s)}(x, \gamma)\,,$$

$$d_j(x, \gamma') \leqq d_j(x, \gamma),\ \sigma_{jk}^{(f)}(x, \gamma') > \sigma_{jk}^{(f)}(x, \gamma)$$

$$\text{pro } \gamma' > \gamma\,.$$

Odtud již plyne řešení úlohy nalézt kritický parametr reaktoru, neboť z uvedeného obdržíme nutné a postačující podmínky jeho existence a jednoznačnosti. K existenci a jednoznačnosti kritického parametru γ_0 jaderného reaktoru je nutné a stačí, aby pro totální obohacení, tj. pro palivo, jehož obohacení je charakterizováno parametrem $\gamma = 0$, bylo $\lambda_0(0) \leqq 1$.

5. METODA ITERACE ZDROJE

Ještě ukážeme, jak lze dokázaných faktů využít pro numerický výpočet kritického parametru. Zmíníme se zejména o tak zvané metodě „iterace zdroje". Tato metoda je, řekli bychom, matematickým modelem fyzikálních procesů, jež jsou popisovány vyšetřovanými rovnicemi. Rozhodujícím pro konvergenci této metody je dominantnost charakteristické hodnoty λ_0. Situace je zde taková jako v případě matice s kladnými prvky.

Buď $\mathbf{T}$ $K-$kladný operátor v $l-$rozměrném prostoru E_l. Podle Perronovy věty existuje μ_0 tak, že všechny kořeny charakteristického polynomu matice příslušné operátoru $\mathbf{T}$ jsou v absolutní hodnotě menší než μ_0. Dá se dokázat, že posloupnost $\{\mu_0^{-n}\mathbf{T}^n\}$ konverguje v normě prostoru $[E_l]$ k operátoru $\mathbf{P} \in [E_l]$ a platí rovnost

$$\mu_0 \mathbf{P}\Psi = \mathbf{T}\mathbf{P}\Psi, \ \mathbf{P}\Psi \neq \emptyset,$$

a to pro každý vektor $\Psi \neq 0$ mající nezáporné souřadnice.

Podobné tvrzení platí i v případě u_0-kladného kompaktního operátoru v nekonečněrozměrném prostoru, a tedy též v případě jaderného reaktoru, tj. jde-li o operátor $\mathbf{T} = (\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}$ v prostoru $\mathscr{X} = L_2(G) \times \ldots \times L_2(G)$:

$$\lambda_0^n \mathbf{T}^n \to \mathbf{P}, \ \mathbf{P} \in [\mathscr{X}], \ \lambda_0 = \mu_0^{-1}, \tag{20}$$

$$\mu_0 \mathbf{P}\Psi = \mathbf{T}\mathbf{P}\Psi, \ \mathbf{P}\Psi \neq \emptyset \quad \text{pro } \Psi \in \tilde{K}, \ \Psi \neq \emptyset .$$

Pro výpočet metodou iterace zdroje zvolme „výchozí zdroj"

$$\Psi_{(0)} \in K, \ \Psi_{(0)} = (\Psi_{01}, \ldots, \Psi_{0N}), \ [C_{jk}\Psi_{0k}](x) \not\equiv 0,$$

a nalezněme vektor-funkci $\Psi^{(1)}$, pro niž

$$\mathbf{L}\Psi^{(1)} - \mathbf{B}\Psi^{(1)} = \mathbf{C}\Psi_{(0)} .$$

Dále pak položme

$$\Psi_{(1)} = \lambda_{(1)}\Psi^{(1)},$$

kde

$$\lambda_{(1)} = \frac{y_1'(\Psi_{(0)})}{z_1'(\Psi^{(1)})},$$

přičemž y_1', z_1' jsou kladné lineární funkcionály, tj. funkcionály, pro něž $y_1'(\Psi) \geqq 0$, $z_1'(\Psi) \geqq 0$ pro $\Psi \in \tilde{K}$. Vektor-funkci $\Psi_{(1)}$ považujeme za zdroj nové generace neutronů a tak postupujeme dále

$$\mathbf{L}\Psi^{(n+1)} - \mathbf{B}\Psi^{(n+1)} = \mathbf{C}\Psi_{(n)},$$

$$\Psi_{(n+1)} = \lambda_{(n)}\Psi^{(n+1)},$$

$$\lambda_{(n)} = \frac{y'_n(\Psi_{(n)})}{z'_n(\Psi^{(n+1)})}.$$

Zde y'_n, z'_n jsou kladné lineární funkcionály takové, že pro $\Psi \in \mathscr{X}$

$$\lim_{n\to\infty} y'_n(\Psi) = \lim_{n\to\infty} z'_n(\Psi) = y'(\Psi),$$

kde y' je nějaký kladný lineární funkcionál.

Je vidět, že v případě $z'_k(\Psi) = y'_k(\Psi) = y'(\Psi)$, $y'(\Psi_{(0)}) = 1$ je n-té přiblížení

$$\Psi_{(n)} = \frac{y'(\Psi_{(0)})}{y'(\Psi^{(n)})} \mathbf{T}^n\Psi_{(0)}$$

iterací stupně n operátoru $\mathbf{T} = (\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}$ užitou na prvek $\Psi_{(0)}$. Odtud dostala tato metoda svůj název.

Konvergence metody plyne z relací (20)

$$\Psi_{(n)} = \frac{y'(\Psi_{(0)})}{y'(\Psi^{(n)})} \lambda_0^n \mathbf{T}^n\Psi_{(0)} \quad\to\quad \frac{y'(\Psi_{(0)})}{y'(\mathbf{P}\Psi_{(0)})} \mathbf{P}\Psi_{(0)} = \Psi_0$$

$$\lambda_{(n)} = \frac{y'(\lambda_0^n \mathbf{T}^n\Psi_{(0)})}{y'(\lambda_0^n \mathbf{T}^{n+1}\Psi_{(0)})} \quad\to\quad \frac{y'(\mathbf{P}\Psi_{(0)})}{y'(\mathbf{T}\mathbf{P}\Psi_{(0)})} = \lambda_0 .$$

K určení kritického parametru γ_0 použijeme monotonie funkce $\lambda_0 = \lambda_0(\gamma)$. Máme-li spočtenu hodnotu $\lambda_0(\gamma)$ a platí-li na příklad nerovnost $\lambda_0(\gamma) > 1$, zvolíme $\gamma' > \gamma$ a počítáme odpovídající $\lambda_0(\gamma')$. Je-li opět $\lambda_0(\gamma') > 1$, pak postup opakujeme. Je-li $\lambda_0(\gamma') < 1$, stanovíme metodou regula falsi další hodnotu γ''. Tu je buď $\lambda_0(\gamma'') > 1$, nebo $\lambda_0(\gamma'') < 1$. Dále pak již postupujeme jako obvykle, až dospějeme k hledané hodnotě γ_0, pro niž $\lambda_0(\gamma_0) = 1$. Výhodou iterací je, že vzhledem k tomu, že $\Phi = [(\mathbf{L} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}](\gamma)$ závisí na γ slabě, liší se vlastní vektor $\psi_0(\gamma)$ od $\psi_0(\gamma')$ jen nepatrně, takže při změně parametru γ není nutné počítat celou posloupnost $\{\Psi_{(n)}(\gamma)\}$ vždy znovu, ale několika málo iteracemi poopravit vlastní vektor obdržený pro předchozí hodnotu parametru. Při hledání kritické hodnoty je vhodné kombinovat iterace se změnami parametru metodou regula falsi.

Literatura

[1] G. Birkhoff: Trans. Amer. Math. Soc. *85* (1957), 219–227.
[2] G. Birkhoff: Proc. Nat. Acad. Sci USA *45* (1949), 557–569.
[3] G. Birkhoff, R. S. Varga: Rep. WAPD – *166*, 1957.
[4] G. Birkhoff, R. S. Varga: J. Soc. Industr. Appl. Math. *6* (1958), 354–377.
[5] G. J. Habetler, M. A. Martino: Rep. KAPL – *1896*, *1958*.
[6] G. I. Marčuk: Čislennyje metody rasčeta jadernych reaktorov. Moskva 1958.
[7] I. Marek: Aplikace matematiky *8* (1963), 102–117.
[8] I. Marek: Aplikace matematiky *8* (1963), 442–470.
[9] I. Marek: Aplikace matematiky *9* (1964), 294–305.
[10] I. Marek: Čs. pěst. mat. *89* (1964), 155–172.
[11] I. Marek: Čs. pěst. mat. *89* (1964), 449–465.
[12] *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics.* Vol. XI. Nuclear Reactor Theory. Amer. Math. Soc. 1961.
[13] L. N. Usačev: *Teorija reaktorov.* Sborník, Moskva 1955.
[14] R. S. Varga, M. A. Martino: *Proc. of the II. Inter. Conf. on the Peaceful Uses of A. E.* P/1541, USA, 570–577.
[15] V. S. Vladimirov: Izv. Akad. Nauk SSSR ser. matem. *21* (1957), 3–52.
[16] V. S. Vladimirov: Izv. Akad. Nauk SSSR ser. matem. *21* (1957), 681–710.
[17] V. S. Vladimirov: Vyčislitelnaja matematika *3* (1958), 3–33; sborník statí MIAN.
[18] L. A. Ljusternik, V. I. Sobolev: *Elementy funkcionalnogo analiza.* Moskva 1951.

RENTGENOGRAFICKÉ STUDIUM RADIAČNÍHO POŠKOZENÍ KOVŮ

František Volf, Řež

ÚVOD

Bombardování kovů rychlými částicemi vytváří bodové poruchy, z nichž mohou za vhodných podmínek vznikat též složitější útvary, např. divakance, dislokační smyčky, trojrozměrné shluky apod. Mnohé z těchto defektů se mohou zachovat, jestliže kov má dostatečně nízkou teplotu. Většina z nich má tak malé rozměry, že přímé pozorování je velmi obtížné nebo vůbec nemožné, avšak jejich studium je umožněno skutečností, že přítomnost poruch v kovech ovlivňuje řadu fyzikálních vlastností.

Na difrakci rentgenových paprsků se může radiační poškození mřížky kovu projevit následujícím způsobem:

1. Změní se Braggovy reflexní úhly, nastane posuv difrakčních čar.
2. Vznikne záření rozptýlené difúzně mimo Braggovy reflexe.