

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

A. Hruška

Theorie magneto-hydrodynamických vln a její aplikace v astrofysice

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 2 (1957), No. 5, 576--588

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137189>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

procesů v masivních betonových stavbách, řešení strojírenských otázek v podmínkách věčného mrazu (výběr základů atd.) a další. V metalurgii je to zkoumání procesu ochlazování odlitků a válcovaného materiálu, při kterém vznikají bunkry, usazeniny, průhyby, často vedoucí ke zmetkům.

Nebylo úkolem tohoto článku seznámit čtenáře s celou metodikou elektrického modelování a nebylo také možno se dotknout všech oblastí tohoto nového oboru. V rozsáhlé literatuře, která dnes existuje, najde ten, kdo se blíže zajímá o tento obor, potřebné údaje. Je také těžké vyčíslit všechny úlohy, při kterých je účelné použití elektrických modelů. Nesporné však je, že metoda elektrického modelování může a také jistě sehraje velkou roli ve všech oblastech vědy a techniky.

#### Použitá literatura

L. I. Gutenmacher, *Električeskije modely*, Moskva 1949 Leningrad.

L. I. Gutenmacher, *Električeskije modelirovanije*, Izdatelstvo „Znanije“, Moskva 1955.

Stanislav Kubík

## THEORIE MAGNETO-HYDRODYNAMICKÝCH VLN A JEJÍ APLIKACE V ASTROFYSICE

A. HRUŠKA

Theorie magneto-hydrodynamických vln je poměrně velmi mladým odvětvím fyziky. Již název nám napovídá, že zde jde o kombinaci hydrodynamiky a teorie elektromagnetického pole. Předmětem teorie magnetohydrodynamických vln (dále zkráceně M-H vln) je pohyb vodivého kontinua v magnetickém poli a vlivy pohybu tohoto kontinua na magnetické pole, na vznik elektrických proudů a pod. Teorie M-H vln vznikla z potřeb astrofyziky, a právě zde se v poslední době značně uplatňuje. Řada otázek ze sluneční fyziky a problémů týkajících se mezihvězdné hmoty vede totiž právě na teorii M-H vln. Ta byla matematicky formulována po prvé Alfvénem v roce 1942. Experimentálně byla existence M-H vln dokázána Lunquistem r. 1952. Od té doby se zájem astrofysiků a teoretických fyziků o M-H vlny neustále zvyšuje, takže v současné době vychází v různých časopisech měsíčně značné množství prací týkajících se této problematiky. Většina z nich se zabývá řešením rozličných speciálních případů. Ty jsou často velmi komplikované po matematické stránce a nebudeme se zde proto jimi zabývat. Omezíme se pouze na nejelementárnější otázky teorie M-H vln, aby si čtenář mohl učinit alespoň přibližnou představu o celé problematice.

Nejprve si povšimneme vzniku M-H vln, dále probereme M-H vlny v různých prostředích a v závěru si ujasníme aplikace teorie M-H vln na vybrané části sluneční fyziky.

### 1. Vznik M-H vln, základní vztahy

Mějme na mysli vodivou kapalinu o permeabilitě  $\mu$ , pohybující se rychlostí  $v$  v magnetickém poli intenzity  $H$ . Pohybem kapaliny vzniká elektrické pole o intenzitě  $E$ . V absolutní soustavě elektromagnetické, kterou budeme dále užívat, platí

$$E = \mu v \times H.$$

Toto indukované pole dává vznik elektrickému proudu o intenzitě  $i$ , který působí na kapalinu mechanickou reakcí o velikosti

$$\mu i \times H.$$

Mimó to  $i$  působí též poruchu původního magnetického pole podle rovnice

$$\text{rot } h = 4 \pi i,$$

kde indukovanou intenzitu magnetického pole jsme označili  $h$ . Posuvný proud jsme zanedbali.

Chceme-li přesně formulovat problém, musíme vyjít z Maxwellových rovnic a z rovnic hydrodynamiky.

V dalším budeme pokládat posuvný proud za zanedbatelný vůči proudu vodivému; to je přijatelná aproximace ve většině případů, které v astrofysice přicházejí v úvahu. Mimo to budeme předpokládat, že vyšetřované kontinuum není viskosní, a že jeho permeabilita i dielektrická konstanta jsou rovny jedné. Rozšíření všech dalších úvah v tom smyslu, že permeabilita a dielektrická konstanta mají konstantní hodnotu různou od jedné je velmi snadné, avšak pro náš cíl celkem nepodstatné. Můžeme psát

$$\text{rot } H = 4 \pi i, \quad (1)$$

$$\text{rot } E = - \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2)$$

$$i = \sigma_0 E_{//} + \sigma_1 E_{\perp} + \sigma_2 \frac{E_{\perp} \times H}{H}, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{G} + \frac{1}{\rho} \{i \times H - \text{grad } p\}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (5)$$

$$p = p(\rho), \quad (6)$$

$\sigma_0$  je vodivost ve směru vnějšího magnetického pole,  $\sigma_1$  vodivost ve směru složky intenzity elektrického pole kolmé k magnetickému poli, a  $\sigma_2$  vodivost ve směru vektoru  $E_{\perp} \times H$ .  $E_{//}$  respektive  $E_{\perp}$  jsou složky intenzity elektrického pole rovnoběžné, nebo kolmé k  $H$ ,  $E$  je celková intenzita elektrického pole.  $\mathbf{G}$  značí mechanickou sílu na jednotku hmoty o hustotě  $\rho$  při tlaku  $p$ . (1) a (2) jsou Maxwellovy rovnice. Vztah (3) je Ohmův zákon pro pohybující se anisotropně vodivé prostředí. (4) je Eulerova rovnice, (5) rovnice kontinuity a konečně (6) je rovnice, udávající závislost tlaku na hustotě. Pokud nebudeme předpokládat, že prostředí je nestlačitelné, budeme se zabývat jen takovými případy, kdy tlak lze vyjádřit právě vztahem tvaru (6).

Je na první pohled patrné, že soustavu (1)–(6) nelze vyřešit v celé její obecnosti. V rozličných konkrétních úlohách je proto, podle charakteru problému, třeba volit vhodné aproximace.

## 2. M-H vlny v nestlačitelné kapalině

Budeme se nyní zabývat nejjednodušším případem M-H vln. Budeme předpokládat, že kapalina, ve které vznikají M-H vlny, má konstantní hustotu, a že její vodivost  $\sigma$  je isotropní. Vnější magnetické pole nechť je homogenní, má intenzitu  $H_0$  a míří ve směru

osy  $z$ . Magnetické pole indukované proudem budeme považovat za malou poruchu a označíme jeho intenzitu  $h$ . Pro celkovou intenzitu magnetického pole platí

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad (h \ll H_0).$$

Dále budeme předpokládat, že lze zanedbat konvektivní složky časové derivace rychlosti, takže můžeme psát

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Mimo to ať  $\mathbf{G} = 0$ . Rovnice (1)–(5) tak přejdou v soustavu

$$\text{rot } \mathbf{h} = 4\pi \mathbf{i}, \quad (1a)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad (2a)$$

$$\mathbf{i} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \{ \mathbf{i} \times \mathbf{H} - \text{grad } p \}, \quad (4a)$$

$$\text{div } \rho = 0. \quad (5a)$$

Z těchto vztahů vyloučíme  $\mathbf{i}$  a  $\mathbf{E}$ . Na rovnici (1a) aplikujeme operaci rotace a dosadíme do ní za  $\mathbf{i}$  výraz (3a), pro  $\mathbf{E}$  při tom použijeme vztahu (2a). Vzhledem k tomu, že je

$$\text{rot rot } \mathbf{h} = -\Delta \mathbf{h} + \text{grad div } \mathbf{h},$$

$$\text{div } \mathbf{h} = 0,$$

dostaneme

$$\Delta \mathbf{h} + 4\pi\sigma \left\{ \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right\} = 0. \quad (7)$$

Dosazením (1a) do (4a) plyne

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\rho} \text{rot } \mathbf{h} \times \mathbf{H} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (8)$$

Budeme předpokládat, že všechny veličiny jsou závislé pouze na čase  $t$  a na souřadnici  $z$ . Souřadnicové osy  $x, y$  volíme tak, aby bylo  $h_x = 0$ . Tak získáme rovnice

$$\frac{1}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} + H_0 \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial h_y}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{H_0}{4\pi\rho} \frac{\partial h_y}{\partial z}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{h_y}{4\pi\rho} \frac{\partial h_y}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}. \quad (11)$$

Mimo to je patrné, že můžeme položit

$$v_x = v_z = 0, \quad H_z = H_0.$$

Derivujeme (9) parciálně podle  $t$  a (10) podle  $z$  a vylučme z obou rovnic  $\frac{\partial^2 v_y}{\partial t \partial z}$ . Platí

$$\frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} - \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} - \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{\partial^3 h_y}{\partial z^2 \partial t} = 0. \quad (12)$$

Vidíme, že pro  $\sigma \rightarrow \infty$  je (12) vlnovou rovnicí pro vlnění šířící se rychlostí

$$V = \pm \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (13)$$

Položme

$$h_y = e^{j\omega\left(t - \frac{z}{V}\right)}.$$

Dosažením posledního vztahu do (10) dostaneme rovnici pro  $v_y$ , a odtud integrací plyne

$$v_y = -\frac{V}{H_0} e^{j\omega\left(t - \frac{z}{V}\right)}.$$

Rychlost hmoty se tedy mění se stejnou frekvencí jako indukovaná intenzita magnetického pole.

Konečně z rovnice (11) plyne

$$p = p_0 - \frac{1}{8\pi} e^{2j\omega\left(t - \frac{z}{V}\right)}.$$

Zavedeme-li vlnový vektor  $k$

$$|k| = \frac{2\pi}{\lambda},$$

kde  $\lambda$  je vlnová délka, daná rovnicí

$$\lambda = \frac{2\pi V}{\omega},$$

můžeme poslední tři vztahy upravit na tvar

$$\begin{aligned} h_y &= e^{j(\omega t - kz)}, \\ v_y &= -\frac{V}{H_0} e^{j(\omega t - kz)}, \\ p &= p_0 - \frac{1}{8\pi} e^{2j(\omega t - kz)}. \end{aligned}$$

Situace se poněkud změní, předpokládáme-li, že  $\sigma$  má konečnou hodnotu. At  $h_y$  a  $v_y$  jsou tvaru

$$\left. \begin{aligned} h_y &= e^{\alpha z + j\omega t}, \\ v_y &= v_0 e^{\alpha z + j\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

kde  $\alpha$  je komplexní číslo. Aby (14) bylo řešením (12), musí, jak snadno zjistíme dosažením předpokládaného tvaru řešení do rovnic (12), platit

$$\alpha = \pm j \frac{\omega}{V \sqrt{1 + j \frac{\omega}{4\pi\sigma V^2}}}.$$

Pro malý útlum můžeme po rozvinutí odmocniny psát

$$\alpha = \pm j \frac{\omega}{V} \pm \frac{\omega^2}{8 \pi \sigma V^3}.$$

Z (10) a (14) plyne, že

$$v_0 = \frac{V}{H_0} - j \frac{\omega}{8 \pi \sigma V H_0}.$$

Kmity jsou v tomto případě tlumené a mimo to, jak je vidět z poslední rovnice, je rychlost hmoty při konečné vodivosti prostředí fázově posunuta vzhledem k  $h$ .

Nyní si povšimneme poněkud obecnějšího případu, kdy vodivost je anisotropní. Tomu tak je na příklad u ionisovaného plynu. S otázkami souvisejícími s pohybem ionisovaného plynu se v astrofysice setkáváme dosti často.

### 3. M-H vlny v ionisovaném plynu

V našich úvahách se omezíme na dva případy, které mají význam v astrofysice. Je to jednak plyn skládající se pouze z elektronů a kladných iontů — budeme ho nazývat binárním plynem — jednak málo ionisovaný plyn, který je z převážné části tvořen neutrálními molekulami (nebo atomy), a mimo to jsou v něm přítomny i volné elektrony a těžké kladné ionty. Matematickou teorií ionisovaného plynu se zde nebudeme zabývat, protože nespadá do rámce našich úvah. Uvedeme pouze některé výsledky, které budeme v dalším nutně potřebovat. (Odvození následujících vztahů nalezneme čtenář na př. v knize Chapman, Cowling: *The mathematical Theory of Non-uniform Gasses*, nebo v Cowlingově práci v *Month. Not. R. A. S.*, Vol. 93, str. 90 [(1933)]. Pro binární plyn platí

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{n_e e \omega \tau}{H}, \\ \sigma_1 &= \frac{\sigma_0}{1 + \omega^2 \tau^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_0 \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

kde  $n_e$  je hustota elektronů,  $e$ ,  $m$  náboj a hmotnost elektronu,

$$\omega = \frac{e H}{m},$$

a konečně  $\tau$  je střední doba mezi dvěma srážkami elektronu s ionty. Platí přibližný vztah

$$\tau \sim \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_e},$$

kde  $T$  je elektronová teplota plynu. Ze vztahů (15) vidíme, že v binárním plynem je vodivost určena pouze veličinami, závislými na elektronech, a nikoli veličinami, závislými na kladných iontech.

Pro velmi zředěný plyn, nebo pro plyn v slabém magnetickém poli, kdy  $\omega \tau \ll 1$ , přejdou rovnice (15) ve vztahy

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{n_e e \omega \tau}{H}, \\ \sigma_1 &= \frac{n_e e}{H \omega \tau}, \\ \sigma_2 &= \frac{n_e e}{H}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Pro složky vodivosti slabě ionisovaného plynu můžeme psát

$$\sigma_0 = \sigma_e = \sigma_i,$$

kde

$$\sigma_e = \frac{n_e e \omega_e \tau_e}{H}, \quad \sigma_i = \frac{n_i Z^2 e \omega_i \tau_i}{H}, \quad (15a)$$

dále

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_e}{1 + \omega_e^2 \tau_e^2} + \frac{\sigma_i}{1 + \omega_i^2 \tau_i^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_e \omega_e \tau_e}{1 + \omega_e^2 \tau_e^2} - \frac{\sigma_i \omega_i \tau_i}{1 + \omega_i^2 \tau_i^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

Indexem  $e$  jsme zde označili veličiny vztahující se k elektronům, indexem  $i$  veličiny vztahující se ke kladným iontům. V posledních rovnicích bereme v úvahu pouze srážky mezi elektrony a neutrálními molekulami a mezi kladnými ionty a neutrálními molekulami, zanedbáváme srážky mezi ionty a elektrony. V případě, že plyn je kvasineutrální, to znamená, že  $n_e = n_i = n$ , můžeme rovnice (15b) ještě upravit příslušným vytknutím. Dále budeme pro názornost mít na mysli vždy kvasineutrální plyn.

Abychom si učinili představu o numerických hodnotách složek vodivosti v různých případech, s nimiž se setkáváme v astrofysice, jsou některé tyto veličiny přehledně shrnuty v *tab. I*. Tabulka je doplněna hodnotami  $n_e, T a |H_0|$  kde  $|H_0|$  má význam intenzity vnějšího magnetického pole.

Tabulka 1.

|            | Oblast neutrálního vodíku | Oblast ionis. vodíku | Sluneční korona    | Sluneční chromosféra | Ionosférická vrstva E | Ionosférická vrstva F <sub>1</sub> |
|------------|---------------------------|----------------------|--------------------|----------------------|-----------------------|------------------------------------|
| $n_e$      | $10^{-2}$                 | 10                   | $10^8$             | $3 \cdot 10^9$       | $10^5$                | $10^6$                             |
| $T$        | $10^3$                    | $10^4$               | $10^6$             | $2 \cdot 10^4$       | $3 \cdot 10^3$        | $10^3$                             |
| $H_0$      | $10^{-5}$                 | $10^{-3}$            | 30                 | $10^2$               | 0,3                   | 0,3                                |
| $\sigma_e$ | $6 \cdot 10^{-13}$        | $6 \cdot 10^{-9}$    | $6 \cdot 10^{-8}$  | $3 \cdot 10^{-8}$    | $10^{-18}$            | $> 10^{-11}$                       |
| $\sigma_1$ | $5 \cdot 10^{-23}$        | $5 \cdot 10^{-24}$   | $6 \cdot 10^{-23}$ | $7 \cdot 10^{-16}$   | $2 \cdot 10^{-16}$    | $3 \cdot 10^{-16}$                 |
| $\sigma_2$ | $2 \cdot 10^{-17}$        | $6 \cdot 10^{-9}$    | $6 \cdot 10^{-8}$  | $3 \cdot 10^{-18}$   | $3 \cdot 10^{-16}$    | $\ll 10^{-16}$                     |

Ve vztazích (4), (5) vystupuje rychlost kontinua. Na první pohled není v případě ionisovaného plynu zcela jasné, jak máme tuto rychlost chápat. Musíme zde totiž pokládat rychlost jedné částice za součet dvou složek, jedna složka je různá pro různé druhy částic, které jsou v plynu přítomny, a rozdíly v této složce pro různé druhy částic jsou příčinou existence proudu  $i$ . Druhá složka rychlosti je společná všem částicím a je stejná s  $\mathbf{v}$  ve vztazích (4), (5). V slabě ionisovaném plynu je  $\mathbf{v}$  velmi blízké rychlosti neutrálních molekul, v binárním plynu je  $\mathbf{v}$  přibližně stejné jako rychlost těžkých iontů.

Mějme na mysli malý objemový element ionisovaného plynu, který je v homogenním gravitačním a magnetickém poli. Budeme sledovat jeho pohyb za předpokladu, že lze zanedbat v rovnici (4) gradient tlaku, deformace tohoto elementu při změně místa a magnetické pole indukované proudem  $i$ . Z rovnice (4) plyne

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{G} + \frac{i \times \mathbf{H}}{e};$$

je za uvedených předpokladů dáno (podle rovnice [3]) vztahem

$$i = \sigma_1 \mathbf{v} \times \mathbf{H} - \sigma_2 \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}}{H}.$$

Odpadá člen  $\sigma_0 E_{\parallel}$ , neboť elektrické pole nemá složku rovnoběžnou s  $\mathbf{H}$ . Z posledních dvou rovností dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{G} + \frac{1}{e} \left\{ \sigma_1 (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} - \frac{\sigma_2}{H} [(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}] \mathbf{H} \right\}. \quad (17)$$

Zvolme souřadný systém tak, aby  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{G}$  mělo složky

$$(0, 0, H_z = H); \quad (G_x, 0, G_z).$$

Rozepsáním (17) získáme v tomto případě rovnice

$$\begin{aligned} \dot{v}_x + \alpha v_x - \beta v_y &= G_x, \\ \dot{v}_y + \beta v_x + \alpha v_y &= 0, \\ \dot{v}_z &= G_z, \end{aligned}$$

kde

$$\alpha = \frac{\sigma_1 H^2}{e}, \quad \beta = \frac{\sigma_2 H^2}{e}. \quad (18)$$

Vyřešíme tuto soustavu. Výsledek je

$$\left. \begin{aligned} v_x &= G_x \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \beta e^{-\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \\ v_y &= -G_x \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \beta e^{-\alpha t} (C_2 \cos \beta t - C_1 \sin \beta t), \\ v_z &= G_z t + C_3, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

kde  $C_1$ ,  $C_2$  a  $C_3$  jsou integrační konstanty určené počátečními podmínkami. Vidíme, že objemový element koná periodický tlumený pohyb a translaci. Porovnejme tento



výsledek s pohybem volné nabitě částice v magnetickém poli. Pro částici hmoty  $m$ , má-li  $\mathbf{H}$  složky  $(0, 0, H_x = H)$  a  $\mathbf{G}$  složky  $(G_x, 0, G_z)$ , musí platit

$$\dot{v}_x - \omega v_y = G_x, \quad \dot{v}_y + \omega v_x = 0, \quad \dot{v}_z = G_z.$$

$$\left( \omega = \frac{eH}{m} \right).$$

Integrací dostaneme

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega (K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t), \\ v_y &= -\frac{G_x}{\omega} + \omega (K_2 \cos \omega t - K_1 \sin \omega t), \\ v_z &= G_z t + K_3, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

kde  $K_1, K_2, K_3$  jsou integrační konstanty.

Rozdíl mezi pohybem podle (19) a podle (20) je v tom, že periodické členy v rychlosti volné částice jsou netlumené, kdežto v případě pohybu elementu kontinua tlumené u těchto členů existuje. To je důsledkem srážek částic plynu. V případě, že ke srážkám nedochází, je  $\tau \rightarrow \infty$  a podle rovnic (15), (15a), (15b) platí:

$$\sigma_0 \rightarrow \infty, \quad \sigma_1 \rightarrow 0,$$

$$\sigma_2 \rightarrow \frac{n_e |e|}{H} \quad \text{pro binární plyn,}$$

$$\sigma_2 \rightarrow \frac{n_e |e|}{H} + \frac{n_i Z^2 e}{H} \quad \text{pro slabě ionisovaný plyn.}$$

• Pro velmi zředěný binární plyn platí vztahy (16) a podle nich

$$\alpha = \frac{n |e| H}{\rho \omega \tau}, \quad \beta = \frac{n |e| H}{\rho}.$$

Jestliže  $\tau \rightarrow \infty$ , tak  $\omega = \beta$ , protože  $m n = \rho$  a rovnice (19) pro pohyb objemového elementu přecházejí v rovnice pro volnou částici.

Vyšetřovaný případ pohybu elementárního objemu v magnetickém poli je v určitém smyslu opakem zvukové vlny. Jak je to třeba chápat, uvidíme snadno z této úvahy: Předpokládejme, že  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{h}$  nabývají velmi malých hodnot, a že tlakové změny v plynu jsou adiabatické. Můžeme psát

$$\frac{dp}{d\rho} = U^2,$$

kde  $U$  je rychlost zvuku v plynu.

Derivujme rovnici (4) podle času a zaveďme do ní rovnici kontinuity a vztah (1); dostaneme

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - U^2 \text{grad div } \mathbf{v} + \frac{V^2}{H_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}_0 \times \text{rot } \mathbf{H}) = 0, \quad (21)$$

$$\left( V^2 = \frac{U_0^2}{4\pi\rho} \right).$$

Jestliže je rychlost  $V$  malá vzhledem k rychlosti  $U$ , můžeme třetí člen v rovnici (21) zanedbat a řešením (21) je obyčejná zvuková vlna s rychlostí  $U'$ . Jestliže lze zanedbat druhý člen, dostáváme právě studovaný případ vln popsáných rovnicemi (19). Obecnější diskuse rovnice (21) je dosti komplikovaná a nebudeme se jí zabývat zde.

Probírali jsme dva velmi jednoduché případy M-H vln, které nám, alespoň částečně, po fyzikální stránce osvětlily jedno odvětví astrofysiky.

Přikročíme k aplikaci teorie M-H vln na konkrétní případ. Protože obecné úvahy bývají dosti často nepřehledné, bude nejlépe vybrat jeden typický problém astrofysiky, řešený pomocí M-H vln, a na něm ukázat použití předcházejících výsledků. K tomu se velmi dobře hodí teorie vzniku slunečních skvrn, vypracovaná Walénem.

#### 4. Vznik slunečních skvrn

Skvrny můžeme na slunečním disku pozorovat jako tmavá místa buď jednotlivě, nebo ve skupinách. Zpravidla jsou však soustředěny v podlouhlých skupinách, ve kterých vynikají především dvě největší skvrny. Ty bývají na koncích skupiny přibližně ve stejné sluneční šířce. Skvrnám přísluší dosti silné magnetické pole o intenzitách řádu  $10^8$  gaussů. Dvě veliké skvrny, o kterých jsme se zmínili, mají opačnou polarisaci. Přísluší-li první skvrně (tím míním skvrnu ve směru sluneční rotace) severní magnetický pól, pak druhé skvrně přísluší jižní magnetický pól a naopak. Každé skupině na vybrané sluneční polokouli (severní nebo jižní) přísluší skupina, která vzniká a zaniká zároveň s ní, na polokouli opačné. Tato skupina má obrácenou polaritu. Skvrny se objevují na Slunci v 11letém cyklu, vždy přibližně po 11 letech můžeme na Slunci pozorovat velké množství skvrn a někdy mezi maximy nenalezneme na Slunci ani jedinou skvrnu. Sluneční cyklus začíná tím, že se na Slunci počnou objevovat skvrny zároveň na severní i na jižní polokouli v šířkách  $30^\circ$ — $40^\circ$  od slunečního rovníku a vytvářejí dvě pásma rovnoběžná s rovníkem. Tato pásma se posouvají k rovníku a když dospějí do vzdálenosti asi  $10^\circ$ — $15^\circ$ , nastává maximum počtu skvrn. Počtu skvrn pak ubývá, až v blízkosti rovníku počnou mizet a cyklus skončí.

Tyto pozorované efekty se pokusil, celkem se značným úspěchem, vysvětlit Walén svou magneto-dynamickou teorií vzniku slunečních skvrn, se kterou se nyní alespoň v principu seznámíme.

Vraťme se k úvahám odstavce 2. Tam jsme studovali M-H vlny v nestlačitelné kapalině a pro  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{h}$  jsme, za předpokladu, že se zabýváme malými poruchami, získali rovnice (7), (8). Předpokládejme nyní, že vodivost prostředí je nekonečná. Rovnice (7), (8) budou pro libovolně veliká  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{h}$  znít

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi\varrho} \mathbf{H} \times \text{rot} \mathbf{H} = - \text{grad} \left( \frac{p}{\varrho} \right), \quad (23)$$

kte opět

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}.$$

K úpravě rovnice (22) použijeme známé identity

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{ div} \mathbf{H},$$

kteřá v našem případě přejde v rovnici

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{H}_0 \text{ grad}) \mathbf{v} + (\mathbf{h} \text{ grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{h}.$$

Dosazením do (22) plyne

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - (\mathbf{H}_0 \text{ grad}) \mathbf{v} = (\mathbf{h} \text{ grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{h}. \quad (24)$$

Rovnici (23) přepíšeme pomocí vztahů

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} &= \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}, \\ \mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{H}_0 \times \text{rot } \mathbf{h} + \mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{h}, \\ &= \text{grad}(\mathbf{H}_0 \mathbf{h}) - (\mathbf{H}_0 \text{ grad}) \mathbf{h} + \mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \left( \frac{\mathbf{H}_0}{4\pi\rho} \text{grad} \right) \mathbf{h} + \frac{1}{\rho} \text{grad} \left\{ p + \frac{(\mathbf{H}_0 \mathbf{h})}{4\pi} + \rho \frac{v^2}{2} \right\} = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{h}. \quad (25)$$

Zavedeme nyní souřadnicový systém  $(q, r, s)$ .  $\mathbf{H}_0$  at má směr osy  $s$ . Můžeme psát

$$(\mathbf{H}_0 \text{ grad}) = H_0 \frac{\partial}{\partial s}.$$

Budeme vyšetřovat rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{H_0}{4\pi\rho} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = H_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}; \quad (27)$$

jejich kombinací dostaneme

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{v} = \left( V^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \mathbf{v}. \quad (28)$$

V čase  $t = 0$  at je

$$\mathbf{v}(q, r, s, t)|_{t=0} = \psi(q, r, s),$$

$$\mathbf{h}(q, r, s, t)|_{t=0} = \varphi(q, r, s),$$

kde  $\psi$  a  $\varphi$  jsou funkce od nuly různé jen v konečné části prostoru. Obecné řešení (28) je dáno vztahy

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} [\psi(q, r, s - Vt) + \psi(q, r, s + Vt)], \quad (29a)$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} [\varphi(q, r, s - Vt) + \varphi(q, r, s + Vt)], \quad (29b)$$

kde souřadnice  $q$  a  $r$  vystupují pouze jako parametry.

Počáteční stav se šíří ve směru a proti směru  $\mathbf{H}_0$  rychlostí  $V$ ,  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{h}$  mají pro jeden z těchto rozruchů poloviční hodnoty, než měly při  $t = 0$ .

Dosadíme-li (29b) do (26), (27), získáme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mp \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}, \quad (- \text{ pro šíření ve směru } \mathbf{H}_0, + \text{ pro šíření proti směru } \mathbf{H}_0).$$

Kombinací poslední rovnice a vztahů (26), (27) plyne

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} = \mp \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mp \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t},$$

a tedy

$$\mathbf{v} = \mp \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}} + v(q, r) \quad (- \text{ šíření ve směru } \mathbf{H}_0, + \text{ šíření proti směru } \mathbf{H}_0).$$

Protože jsme předpokládali, že  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{h}$  jsou různé od nuly jen v konečné části prostoru, je

$$\mathbf{v} = \mp \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (30)$$

Vraťme se k rovnicím (24), (25) a dosadíme do nich (30). Pravé strany těchto rovnic jsou identicky rovny nule. Aby (29a, b) bylo řešením (24), (25), k tomu je nutno, aby

$$\text{grad} \left\{ p + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{(\mathbf{H}_0 \mathbf{h})}{4\pi} \right\} = 0. \quad (31)$$

(31) bude splněno, když

$$p_0 = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} - \frac{(\mathbf{H}_0 \mathbf{h})}{4\pi},$$

to je [podle (30)]

$$p = p_0 - \frac{(\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})^2 - \mathbf{H}_0^2}{8\pi}, \quad (32)$$

kde  $p_0$  má význam hydrostatického tlaku za nepřítomnosti magnetického pole. (29a, b) jsou exaktním řešením rovnic (24), (25). Rovnice (32) je velmi důležitá. Jestliže na příklad vyšetřované prostředí je ideální plyn, pak  $p$  je úměrné teplotě  $T$  a podle (32)

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{(\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})^2 - \mathbf{H}_0^2}{8\pi p_0} \right),$$

$$(T_0 = \text{konst.}).$$

Je vidět, že magnetické pole způsobuje adiabatické ochlazení. K takovému ochlazení dochází prakticky v každém prostředí. Jestliže sluneční skvrny jsou místa, kde  $\mathbf{h} \neq 0$  a v jejich okolí  $\mathbf{h} = 0$ , pak mají nižší teplotu a budou se jevit temnější než okolí.

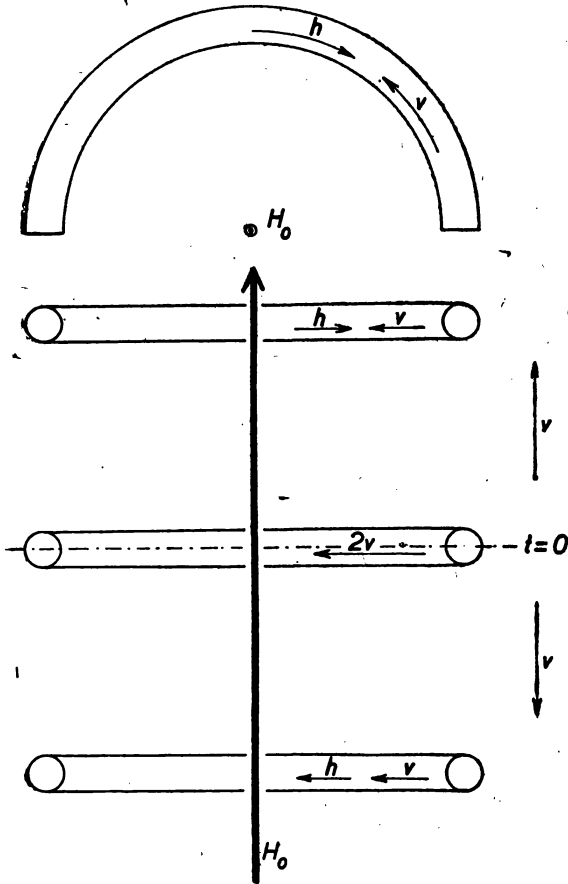
Předpokládejme, že v blízkosti středu Slunce vznikne konvektivními poruchami vířivý prstenec hmoty; protože uvnitř Slunce je dosti silné magnetické pole  $\mathbf{H}_0$  a prostředí je vodivé, vzniká M-H vlna. Celý děj je znázorněn na obr. 1. Prstenec o počáteční rychlosti  $2\mathbf{v}$  se rozdělí na dva prstence, posunující se podél magnetických siločar ve směru  $\pm \mathbf{H}_0$  rychlostí  $V$ . (Je třeba upozornit, že rychlost  $V$  je rychlostí pohybového stavu, kdežto rychlost  $\mathbf{v}$  je rychlostí hmoty.)

Pro prstenec posunující se ve směru  $H_0$  je podle předcházejícího

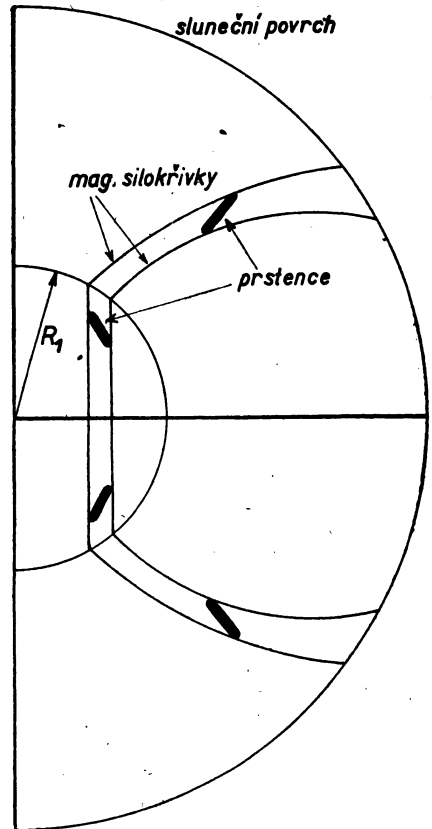
$$v = - \frac{h}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

pro prstenec pohybující se ve směru  $-H_0$  je

$$v = + \frac{h}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$



Obr. 1



Obr. 2

Podle současných výzkumů je sluneční magnetické pole přibližně homogenní až do určité vzdálenosti od středu, a od této vzdálenosti je polem dipólu s momentem ležícím ve směru rotační osy. Prstenec vzniknuvší poblíž středu Slunce se podle předcházejícího rozdělí, a obě části se posunují podél magnetických siločivek rychlostí  $V$ , která nabývá hodnot řádu  $10^6$  cm/sec k povrchu Slunce, jak je znázorněno na obr. 2. Předpokládáme-li,

že rovina prstence při jeho vzniku je kolmá k rovině rovníku i k rovině meridiánové, pak se prstence pohybují tak, že při dosažení slunečního povrchu je jejich rovina hodně odchýlená od povrchu Slunce, který protnou ve dvou místech o stejné heliografické šířce. Při dalším posouvání prstence se jeho „průsečky se slunečním povrchem“ — sluneční skvrny — pohybují neustále k rovníku. Alfvénova Walénova teorie o vířících prstencích tak vysvětluje, proč jsou skupiny skvrn tvořeny především dvěma velkými skvrnami a proč se objevují v párech, to je na severní a na jižní polokouli zároveň. I opačná polarita skupiny na severní polokouli vzhledem ke skupině na jižní polokouli je vysvětlena, neboť pro  $t > 0$  má  $h$  v obou prstencích opačný směr. Otázka vzniku vířících prstenců v nitru Slunce je dosud otevřená a nebudeme se jí proto zabývat. Všechny úvahy, které jsme prováděli, mají samozřejmě charakter hrubých odhadů, neboť jsme předpokládali, že hmota uvnitř Slunce je nestlačitelná, hustota konstantní a vodivost nekonečná. Všechny tyto předpoklady jsou dosti vzdálenou aproximací skutečných poměrů v nitru Slunce. Avšak i v této jednoduché formě může Walénova teorie, jejíž princip jsme si právě vyloužili, vysvětlit všechny dostatečně markantní jevy. Vznikem 11letého cyklu se zde nebudeme zabývat. Čtenář, který by se o otázky související s tímto cyklem zajímal, nalezne je velmi podrobně diskutovány v Alfvénově knize *Cosmical Electrodynamics* (dostupný je též ruský překlad: H. Alfvén, *Kosmická elektrodinamika*).

Bylo by možné uvádět ještě další příklady užití M-H vln, to však již nebudeme činit. Cílem tohoto článku bylo pouze seznámit čtenáře srozumitelným způsobem s principem teorie M-H vln a ukázat užitečnost této teorie v moderní astrofysice.

## METEORITY A JEJICH ÚLOHA V KOSMOGONII SLUNEČNÍ SOUSTAVY\*)

V. G. FESENKOV

Jediná kosmická tělesa, jež můžeme studovat v našich laboratořích, jsou meteority. Vyskytují se v nejrůznějších velikostech, od nejmenších mikrometeoritů, které procházejí zemskou atmosférou, aniž by se znatelně zahřály, neboť jsou brzděny už v nejvyšších vrstvách atmosféry, až k rozměrným tělesům, vážícím desítky, stovky, ano i tisíce tun. Největší meteority se obvykle při setkání se Zemí drobí a vzniká tak množství úlomků a prachu. Při drobení Tunguzského meteoritu, jenž dopadl 30. 6. 1908, se jemný meteoritický prach rozšířil po celé atmosféře a působil po několik měsíců značné zeslabení slunečního záření. Sichote-Alinský meteorit, který dopadl v sovětském Přímoří 12. 2. 1954, byl složen z mnoha nepravidelně orientovaných a vzájemně špatně vázaných krystalů niklového železa; jeho rozpad způsobil pravý železný déšť na ploše několika čtverečních km. Původní hmota tohoto meteoritu byla nejméně tisíc tun. Velké meteoritické krátery Chubb v severní Kanadě o průměru 3,5 km, Canyon Diablo v Arizoně (USA) o průměru 1,2 km a řada dalších zřejmě vznikly při dopadu obrovských meteoritů o hmotě mnoha milionů tun, které již mohou být srovnány s drobnými planetkami.

\*) V. G. Fesenkov, *Meteority i ich rol v kosmogonii solněčnoj sistěmy*, Astr. žurnal, č. 5, 1956.