S. I. Zetěl

Konstrukce některých vzorců a posloupností

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 2, 167--178

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137285

S. I. ZETĚL

KONSTRUKCE NĚKTERÝCH VZORCŮ A POSLOUPNOSTÍ*)

V článku se ukazuje, jak opakovaným užitím jedné základní konstrukce lze elementárními prostředky (pravítkem a kružítkem) konstruovat konečné posloupnosti úseček, případně jejich součty a limity těchto součtů, to jest součty nekonečných číselných řad. Zpracování uvedeného thematu v tomto článku představuje jednu z možností, jak přispět k názornějšímu způsobu vyučování partie o posloupnostech a o nekonečných číselných řadách na našich jedenáctiletkách. V každém případě lze tohoto materiálu využít pro práci studentského matematického kroužku na jedenáctiletce.

Ve výkladu článku budeme pod názvem „konstrukce" rozumět konstrukci pomocí pravítka a kružítka. Pod názvem „posloupnost" budeme rozumět konečnou posloupnost na rozdíl od vžitého významu tohoto termínu, kterým v analysi rozumíme vždy nekonečnou posloupnost.

Koncepce celého článku je založena na konstrukci úsečky délky

$$\frac{ab}{a+b},$$

jsou-li dány úsečky délek a a b. Popišme a pak dokažme tuto konstrukci (viz *obr. 1*): Narýsujeme úhel 120° s vrcholem O. Na jedno jeho rameno naneseme úsečku $\overline{OA} = a$, na druhé rameno pak úsečku $\overline{OB} = b$. Spojnice AB protne osu daného úhlu BOA (která tedy svírá s jeho stranami úhly 60°) v bodě M, jehož vzdálenost od vrcholu O dává již hledanou délku $\overline{OM} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že obsah trojúhelníka OAB je roven součtu obsahů trojúhelníků OAM a OMB, platí tato rovnice (délku $\overline{OM}$ jsme si na okamžik označili znakem x):

$$\frac{1}{2}\,ab.\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\,ax.\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\,bx.\sin 60^\circ .$$

Odtud již plyne

$$x = \overline{OM} = \frac{ab}{a+b}. \qquad (1)$$

Důsledek. Je-li $b = a$, plyne ze vzorce (1): $x = \dfrac{a}{2}$;

je-li $b = \dfrac{a}{2}$, plyne ze vzorce (1): $x = \dfrac{a}{3}$;

je-li $b = \dfrac{a}{3}$, plyne ze vzorce (1): $x = \dfrac{a}{4}$;

. . . .

*) S. I. Zetěl, *Postrojenije někotorych formul i posledovatělnostěj*, Mat. v škole, č. 3, 1955.

$$\text{je-li } b = \frac{a}{n}, \text{ plyne ze vzorce (1): } x = \frac{a}{n+1}.$$

Na základě tohoto důsledku můžeme již snadno řešit tuto úlohu:

Úloha 1. K dané úsečce délky a máme sestrojit úsečky délek

$$\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}, \ldots, \frac{a}{n} \quad (n \text{ přirozené číslo}).$$

Řešení. Sestrojme kružnici se středem O a s poloměrem $\overline{OA_1} = a$ (viz *obr. 2*). Sestrojme vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_6$ pravidelného šestiúhelníka vepsaného této kružnici. Sestrojme dále průměry A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 této kružnice. Narýsujme spojnici A_1A_3, která protíná úsečku OA_2 v bodě X_2. Délka $\overline{OX_2} = \frac{a}{2}$. Spojnice X_2A_4 protne úsečku OA_3 v bodě X_3, pro který $\overline{OX_3} = \frac{a}{3}$. Podobně sestrojíme bod X_4, pro který $\overline{OX_4} = = \frac{a}{4}$, a tak můžeme pokračovat dále. Z uvedeného je již patrný obecný postup pro konstrukci úsečky $OX_{n+1} = \frac{a}{n+1}$, kdy bod X_{n+1} konstruujeme na základě znalosti bodu X_n.

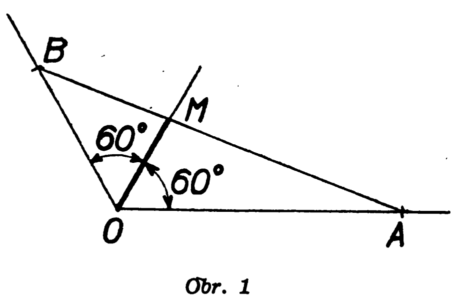
Užitím výsledku této úlohy můžeme nyní snadno řešit úlohu:

Úloha 2. K dané úsečce délky a máme sestrojit úsečky délek

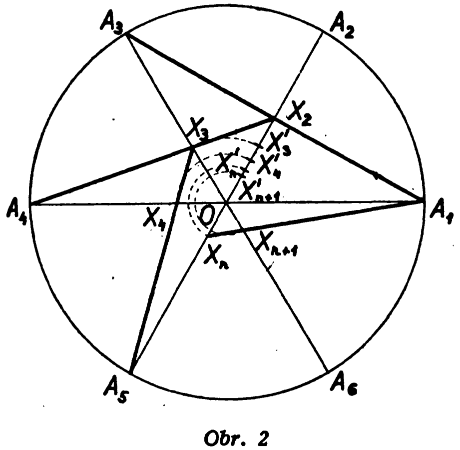
$$\frac{a}{1\cdot 2}, \frac{a}{2\cdot 3}, \frac{a}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{a}{n\cdot(n+1)}, \tag{2}$$

dále jejich součet a limitu tohoto součtu pro $n \to \infty$.

Řešení. Sestrojme opět známým způsobem délky $\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}, \ldots, \frac{a}{n}, \frac{a}{n+1}$, to jest body $X_2, X_3, X_4, \ldots, X_n, X_{n+1}$ (viz *obr. 2*). Na úsečce OA_2 sestrojme body



Obr. 1



Obr. 2

$X'_3, X'_4, \ldots, X'_n, X'_{n+1}$ přenesením délek $\overline{OX_3}, \overline{OX_4}, \ldots, \overline{OX_{n+1}}$. Platí tedy $\overline{OX'_3} = \overline{OX_3}, \overline{OX'_4} = \overline{OX_4}, \overline{OX'_n} = \overline{OX_n}, \overline{OX'_{n+1}} = \overline{OX_{n+1}}$. Pro délky jednotlivých úseků na OA_2 dostáváme:

$$\overline{AX_2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{1 \cdot 2},$$

$$\overline{X_2X'_3} = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{2 \cdot 3},$$

$$\overline{X'_3X'_4} = \frac{a}{3} - \frac{a}{4} = \frac{a}{3 \cdot 4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{X'_nX'_{n+1}} = \frac{a}{n} - \frac{a}{n+1} = \frac{a}{n \cdot (n+1)}.$$

Pro součet S_n těchto úseček platí:

$$S_n = \overline{A_2X_2} + \overline{X_2X'_3} + \overline{X'_3X'_4} + \ldots + \overline{X'_nX'_{n+1}} = \overline{A_2X'_{n+1}} = a - \frac{a}{n+1}.$$

Limitujeme-li nyní S_n pro $n \to \infty$, dostaneme:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = a - \lim_{n \to \infty} \frac{a}{n+1} = a.$$

Máme zde názornou ilustraci součtu nekonečné řady (pro $a = 1$):

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots = 1.$$

Dále můžeme řešit tuto úlohu:

Úloha 3. Určeme obsahy $P_1, P_2, \ldots, P_n$ trojúhelníků $A_1OX_2, X_2OX_3, X_3OX_4, \ldots, X_nOX_{n+1}$ podle *obr. 2*. Stanovme dále součet S_n těchto obsahů a jeho limitu pro $n \to \infty$.

Řešení. Obsahy uvedených trojúhelníků jsou:

$$P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2},$$

$$P_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3},$$

$$P_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Součet S_n těchto obsahů je roven:

$$S_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Limita tohoto součtu bude pak zřejmě:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Řešme dále tuto úlohu:

Úloha 4. Máme sestrojit úsečky délek

$$\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3}, \frac{a}{2\cdot 3\cdot 4}, \frac{a}{3\cdot 4\cdot 5}, \ldots, \frac{a}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)},$$

dále máme určit součet S_n a limitu tohoto součtu pro $n \to \infty$.

Řešení. Podle výsledků 2. úlohy (viz *obr. 2*) platí zřejmě tyto vztahy:

$$\frac{1}{2}(\overline{OX_2} - \overline{X_2X_3'}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1\cdot 2} - \frac{a}{2\cdot 3}\right) = \frac{a}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\frac{1}{2}(\overline{X_2X_3'} - \overline{X_3'X_4'}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2\cdot 3} - \frac{a}{3\cdot 4}\right) = \frac{a}{2\cdot 3\cdot 4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}(\overline{X_n'X_{n+1}'} - \overline{X_{n+1}'X_{n+2}'}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{n\cdot(n+1)} - \frac{a}{(n+1)\cdot(n+2)}\right) =$$

$$= \frac{a}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}.$$

Součet délek těchto úseček bude

$$S_n = \frac{a}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{a}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{a}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{OX_2} - \overline{X_{n+1}'X_{n+2}'}) = \frac{a}{2}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right).$$

Limita tohoto součtu pak je rovna

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{a}{4}.$$

Tímto způsobem jsme geometricky ilustrovali součet nekonečné řady (pro $a = 1$):

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots = \frac{1}{4}.$$

Konstrukce úsečky $\dfrac{ab}{a+b}$ a jejího opakování podle příslušného schematu lze užít ke konstrukci i některých jiných posloupností úseček, jak ukážeme v dalších úlohách.

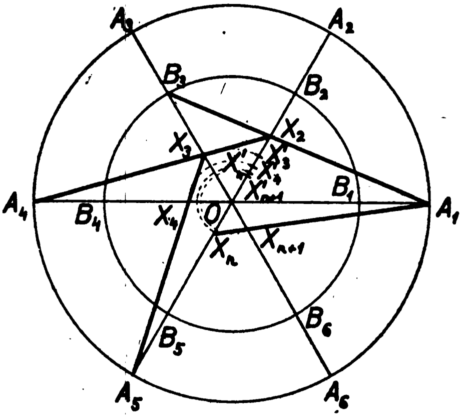
Úloha 5. Máme sestrojit úsečky délek

$$\frac{ab}{a+b}, \quad \frac{ab}{a+2b}, \quad \frac{ab}{a+3b}, \quad \ldots, \quad \frac{ab}{a+nb} \tag{3}$$

pro dané úsečky a, b.

Řešení. Sestrojme dvě soustředné kružnice se společným středem O a s poloměry $\overline{OA_1} = a$, $\overline{OB_1} = b$ (viz *obr. 3*, kde bylo zvoleno $a > b$). Na první kružnici vyznačme opět body $A_1, A_2, \ldots, A_6$, vrcholy pravidelného šestiúhelníka. Sestrojme dále průměry A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 této kružnice a jejich průsečíky $B_1, B_2, \ldots, B_6$ s druhou kružnicí. Hledané úsečky budeme postupně konstruovat takto: Sestrojíme spojnici A_1B_3, která protne úsečku OA_2 v bodě X_2, pro který platí:

$$\overline{OX_2} = \frac{ab}{a+b}.$$



Obr. 3

Spojnice A_4X_2 protíná úsečku OA_3 v bodě X_3, pro který platí:

$$\overline{OX_3} = \frac{\overline{OX_2} \cdot \overline{OA_4}}{\overline{OX_2} + \overline{OA_4}} = \frac{a^2 \cdot b}{(a+b) \cdot \left(\dfrac{ab}{a+b} + a\right)} = \frac{ab}{a+2b},$$

což je druhý člen posloupnosti (3). Sestrojme dále spojnici A_5X_3 a její průsečík X_4 s úsečkou OA_4. Zřejmě platí:

$$\overline{OX_4} = \frac{\overline{OX_3} \cdot \overline{OA_5}}{\overline{OX_3} + \overline{OA_5}} = \frac{a^2 \cdot b}{(a+2b) \cdot \left(\dfrac{ab}{a+2b} + a\right)} = \frac{ab}{a+3b},$$

což je třetí člen posloupnosti (3). Obecně pak sestrojíme úsečku $\overline{OX_{n+1}}$ takto: Předpokládáme, že jsme již sestrojili bod X_n, takže úsečka $\overline{OX_n} = \dfrac{ab}{a+(n-1)b}$. Spojíme bod X_n s odpovídajícím vrcholem šestiúhelníka $A_1A_2 \ldots A_6$ a najdeme bod X_{n+1}. Příslušná úsečka bude již

$$\overline{OX_{n+1}} = \frac{\overline{OX_n} \cdot a}{\overline{OX_n} + a} = \frac{a^2 b}{\left[a + (n-1)b\right] \cdot \left[\dfrac{ab}{a+(n-1)b} + a\right]} = \frac{ab}{a+nb}.$$

Povšimněme si toho, že řešení prvé úlohy je zvláštním případem řešení této úlohy.

Úloha 6. K daným úsečkám a, b máme sestrojit úsečky délek

$$\frac{ab^2}{(a+b)\cdot(a+2b)}, \quad \frac{ab^2}{(a+2b)\cdot(a+3b)}, \ldots, \frac{ab^2}{[a+(n-1)b]\cdot(a+nb)};$$

dále máme určit jejich součet a limitu tohoto součtu.

Řešení. Užijeme řešení předešlé úlohy (viz *obr. 3*). Na úsečce OA_2 sestrojíme body $X'_3, X'_4, \ldots, X'_n, X'_{n+1}$ přenesením délek $\overline{OX_3}, \overline{OX_4}, \ldots, \overline{OX_n}, \overline{OX_{n+1}}$. Určeme nyní postupně vzájemné vzdálenosti těchto bodů:

$$\overline{X_2X'_3} = \frac{ab}{a+b} - \frac{ab}{a+2b} = \frac{ab^2}{(a+b)\cdot(a+2b)},$$

$$\overline{X'_3X'_4} = \frac{ab}{a+2b} - \frac{ab}{a+3b} = \frac{ab^2}{(a+2b)\cdot(a+3b)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{X'_nX'_{n+1}} = \frac{ab}{a+(n-1)b} - \frac{ab}{a+bn} = \frac{ab^2}{[a+(n-1)b]\cdot(a+nb)}.$$

Sečtením těchto délek pak dostaneme

$$S_n = \overline{X_2X'_3} + \overline{X'_3X'_4} + \ldots + \overline{X'_nX'_{n+1}} = \overline{OX_2} - \overline{OX'_{n+1}} =$$

$$= \frac{ab}{a+b} - \frac{ab}{a+nb} = ab\cdot\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+nb}\right).$$

Limita tohoto součtu je zřejmě

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{ab}{a+b}.$$

Máme zde tedy ilustraci součtu nekonečné konvergentní číselné řady

$$\frac{ab^2}{(a+b)\cdot(a+2b)} + \frac{ab^2}{(a+2b)\cdot(a+3b)} + \ldots = \frac{ab}{a+b}.$$

Ve zvláštním případě pro $b = a$ dostaneme po úpravě

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

Dále pro $a = 2$, $b = 3$ máme

$$\frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 14} + \ldots = \frac{1}{15},$$

odkud plyne tento odhad:

$$\frac{1}{8^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{14^2} + \ldots < \frac{1}{15}.$$

V další úloze uvedeme konstrukci, pomocí níž budeme moci konstruovat další posloupnosti úseček.

Úloha 7. Pro dané úsečky a, b, c máme sestrojit úsečku délky

$$\frac{abc}{ab + ac + bc}.$$

Řešení. Na ramena úhlu 120° a 180° se společným vrcholem O naneseme postupně délky $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$ (viz *obr. 4*). Sestrojíme spojnici AB a její průsečík M s osou úhlu BOA. Jak známo, bude

$$\overline{OM} = \frac{ab}{a + b}.$$

Sestrojíme-li dále průsečík N spojnice CM s úsečkou OB, bude délka

$$\overline{ON} = \frac{\overline{OM} \cdot c}{\overline{OM} + c} = \frac{\frac{ab}{a + b} \cdot c}{\frac{ab}{a + b} + c} = \frac{abc}{ab + ac + bc}.$$

Tím je úloha rozřešena.

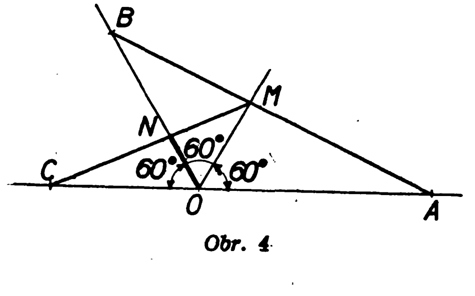
Opakováním této konstrukce můžeme nyní řešit tuto úlohu:

Úloha 8. K daným třem úsečkám a, b, c máme sestrojit n úseček o délkách

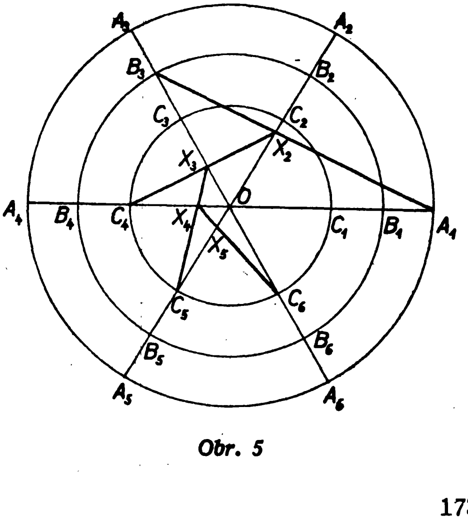
$$\frac{abc}{ab + ac + bc}, \quad \frac{abc}{2ab + ac + bc}, \quad \ldots, \quad \frac{abc}{nab + ac + bc}.$$

Řešení. Narýsujeme tři kružnice se společným středem O, mající poloměry $\overline{OA_1} = a$, $\overline{OB_1} = b$, $\overline{OC_1} = c$ (viz *obr. 5*, kde bylo zvoleno $a > b > c$). Sestrojíme opět vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_6$ pravidelného šestiúhelníka vepsaného kružnici první, a s nimi stejnolehlé vrcholy $B_1, B_2, \ldots, B_6$ a $C_1, C_2, \ldots, C_6$ šestiúhelníků vepsaných do obou zbývajících kružnic. Podle postupu předchozí úlohy sestrojíme nyní spojnici A_1B_3 a její průsečík X_2 s úsečkou OA_2. Dále sestrojíme spojnici X_2C_4 a její průsečík X_3 s úsečkou OA_3. Pro délku $\overline{OX_3}$ platí podle předešlého

$$\overline{OX_3} = \frac{abc}{ab + ac + bc}.$$



Obr. 4



Obr. 5

Dále sestrojíme spojnici X_3C_5 a její průsečík X_4 s úsečkou OA_4, takže bude:

$$\overline{OX_4} = \frac{abc^2}{(ab + ac + bc) \cdot \left(\frac{abc}{ab + ac + bc} + c\right)} = \frac{abc}{2\,ab + ac + bc}.$$

Spojnice X_4C_6 dává bod X_5, takže

$$\overline{OX_5} = \frac{abc}{3\,ab + ac + bc}.$$

Tímto způsobem nakonec též sestrojíme úsečku

$$\overline{OX_{n+2}} = \frac{abc}{nab + ac + bc}.$$

Obdobně bychom mohli postupovat dále při konstrukci složitějších vzorců a posloupností úseček.

Uveďme nyní způsob konstrukce jedné zajímavé posloupnosti úseček.

Úloha 9. K dané úsečce délky a máme sestrojit úsečky, jejichž délky jsou $\frac{a}{u_n}$, kde u_n jsou tak zvaná čísla Fibonacciova.

Poznámka. Čísla Fibonacciova tvoří nekonečnou posloupnost čísel

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots,$$

kde první dva členy jsou rovny 1, a každý další člen je součtem dvou předcházejících čísel, takže platí vztahy:

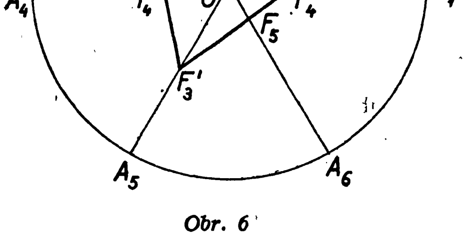
$$u_1 = u_2;\ u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

Řešení. Sestrojme kružnici se středem O a s poloměrem $\overline{OA_1} = a$ (viz *obr. 6*). Sestrojme dále vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_6$ pravidelného šestiúhelníka do této kružnice vepsaného a dále průměry A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 této kružnice. Sestrojme spojnici A_1A_3 a označme znakem F_3 její průsečík s úsečkou OA_2. Vidíme, že platí vztahy

$$\overline{OA_1} = \frac{a}{u_1}, \text{ kde } u_1 = 1,$$

$$\overline{OA_2} = \frac{a}{u_2}, \text{ kde } u_2 = 1,$$

$$\overline{OF_3} = \frac{a}{u_3}, \text{ kde } u_3 = 2.$$



Obr. 6

Sestrojme nyní bod F_3' souměrný k bodu F_3 podle středu Oj. Spojnice A_3F_3' protne OA_4 v bodě F_4, takže podle předešlého bude již

$$\overline{OF_4} = \frac{a}{u_4}, \text{ kde } u_4 = 3\,.$$

Sestrojme dále bod F'_4 souměrný k bodu F_4 podle středu O. Spojnice $F'_3F'_4$ protne OA_6 v bodě F_5, pro který platí:

$$\overline{OF_5} = \frac{a}{u_5}, \text{ kde } u_5 = 5\,;$$

takto můžeme pokračovati dále. Předpokládejme, že jsme již sestrojili body F'_{n-1} a F'_n, pro které platí:

$$\overline{OF'_{n-1}} = \frac{a}{u_{n-1}}, \qquad \overline{OF'_n} = \frac{a}{u_n}\,.$$

Snadno pak již sestrojíme bod F_{n+1}, pro který platí

$$\overline{OF_{n+1}} = \frac{\overline{OF'_{n-1}} \cdot \overline{OF'_n}}{\overline{OF'_{n-1}} + \overline{OF'_n}} = \frac{a^2}{u_{n-1} \cdot u_n \left(\dfrac{a}{u_{n-1}} + \dfrac{a}{u_n}\right)} = \frac{a}{u_{n+1}}\,.$$

Tím jsme již danou úlohu rozřešili.

Určeme dále rozdíly úseček:

$$\overline{OA_2} - \overline{OF_3} = \frac{a}{u_2} - \frac{a}{u_3} = \frac{au_1}{u_2 \cdot u_3},$$

$$\overline{OF_3} - \overline{OF_4} = \frac{a}{u_3} - \frac{a}{u_4} = \frac{au_2}{u_3 \cdot u_4},$$

$$\overline{OF_4} - \overline{OF_5} = \frac{a}{u_4} - \frac{a}{u_5} = \frac{au_3}{u_4 \cdot u_5},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{OF_n} - \overline{OF_{n+1}} = \frac{a}{u_n} - \frac{a}{u_{n+1}} = \frac{au_{n-1}}{u_n \cdot u_{n+1}}\,.$$

Stanovme nyní součet těchto rozdílů:

$$\overline{OA_2} - \overline{OF_{n+1}} = a \cdot \left(\frac{u_1}{u_2 \cdot u_3} + \frac{u_2}{u_3 \cdot u_4} + \ldots + \frac{u_{n-1}}{u_n \cdot u_{n+1}}\right).$$

Odtud vyplývá:

$$1 - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_1}{u_2 \cdot u_3} + \frac{u_2}{u_3 \cdot u_4} + \ldots + \frac{u_{n-1}}{u_n \cdot u_{n+1}}.$$

Vzhledem k tomu, že $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \infty$, plyne z posledního vztahu tento součet nekonečné řady

$$\frac{u_1}{u_2 \cdot u_3} + \frac{u_2}{u_3 \cdot u_4} + \frac{u_3}{u_4 \cdot u_5} + \ldots = 1,$$

čili

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{5}{8\cdot 13}+\ldots=1\,.$$

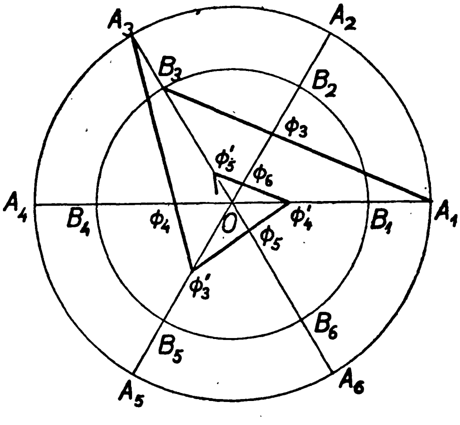
Nahradíme-li v každém zlomku posledního vztahu číslo u_k číslem u_{k+1}, dostaneme jako vedlejší výsledek tento odhad:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{8^2}+\frac{5}{13^2}+\ldots<1.$$

Nakonec můžeme řešiti tuto úlohu:

Úloha 10. Máme sestrojit posloupnost úseček, jejichž délky jsou rovny číslům $\dfrac{a_1\cdot a_2}{a_1\,u_{n-1}+a_2u_n}$, kde a_1, a_2 jsou libovolná kladná čísla, u_{n-1} a u_n jsou čísla Fibonacciova.

Řešení. Sestrojme dvě soustředné kružnice se společným středem O a s poloměry



Obr. 7

$\overline{OA_1}=a_1$, $\overline{OB_1}=a_2$ (viz *obr. 7*, kde je voleno $a_1>a_2$). Sestrojme spojnici A_1B_3 a její průsečík Φ_3 s úsečkou OA_2. Pro délku $\overline{O\Phi_3}$ platí:

$$\overline{O\Phi_3}=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}=\frac{a_1a_2}{a_1u_1+a_2u_2}\,.$$

Sestrojme nyní bod Φ_3' souměrný podle středu O k bodu Φ_3, takže $\overline{O\Phi_3'}=\overline{O\Phi_3}$. Sestrojme spojnici $A_3\Phi_3'$, která protíná úsečku OA_4 v bodě Φ_4. Pro vzdálenost $\overline{O\Phi_4}$ platí:

$$\overline{O\Phi_4}=\frac{\overline{OA_3}\cdot\overline{O\Phi_3'}}{\overline{OA_3}+\overline{O\Phi_3'}}=\frac{a^2{}_1\cdot a_2}{(a_1u_1+a_2u_2)\left(\dfrac{a_1a_2}{a_1u_1+a_2u_2}+a_1\right)}=\frac{a_1a_2}{a_1u_2+a_2u_3}\,.$$

Podobně sestrojíme bod Φ_5: Sestrojíme nejprve bod Φ'_4 souměrný k bodu Φ_4. Dále vedeme spojnici $\Phi'_3\, A'_4$, která protne úsečku OA_6 v bodě Φ_5, takže

$$\overline{O\Phi}_5 = \frac{\overline{O\Phi}'_3 \cdot \overline{O\Phi}'_4}{\overline{O\Phi}'_3 + \overline{O\Phi}'_4} = \frac{a_1 a_2}{a_1 u_3 = a_2 u_4}\,.$$

Předpokládejme, že jsme již sestrojili bod Φ'_{n-1}, a tedy úsečku

$$\overline{O\Phi}'_{n-1} = \frac{a_1 a_2}{a_1 u_{n-3} + a_2 u_{n-2}}\,,$$

dále bod Φ'_n, a tedy úsečku

$$\overline{O\Phi}_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 u_{n-2} + a_2\, u_{n-1}}\,.$$

Snadno pak již sestrojíme bod Φ_{n+1}, a tedy úsečku

$$\overline{O\Phi}_{n+1} = \frac{\overline{O\Phi}'_{n-1} \cdot \overline{O\Phi}'_n}{\overline{O\Phi}'_{n-1} + \overline{O\Phi}'_n} = \frac{a_1 a_2}{a_1 u_{n-1} + a_2\, u_n}\,.$$

Určíme-li dále rozdíly úseček $\overline{O\Phi}_3 - \overline{O\Phi}_4$, $\overline{O\Phi}_4 - \overline{O\Phi}_5$, $\overline{O\Phi}_5 - \overline{O\Phi}_6, \ldots, \overline{O\Phi}_n - \overline{O\Phi}_{n+1}$, sečteme-li je a limitujeme tento součet pro $n \to \infty$, dostaneme součet nekonečné řady (kde za symboly $u_1, u_2, \ldots$ jsme již dosadili příslušné hodnoty):

$$\frac{a_2}{(a_1 + a_2)\cdot(a_1 + 2\,a_2)} + \frac{a_1 + a_2}{(a_1 + 2\,a_2)\cdot(2\,a_1 + 3\,a_2)} + \frac{a_1 + 2\,a_2}{(2\,a_1 + 3\,a_2)\cdot(3\,a_1 + 5\,a_2)} + \ldots = \frac{1}{a_1 + a_2}\,.$$

Příklady na cvičení

1. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots (m+1)} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\ldots (m+2)} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\ldots(n+m)} + \ldots = \frac{1}{(m-1)!\,(m-1)}\,.$$

[Pokyn: Jednotlivé členy součtu S_n vyjádřete nejprve takto:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m} = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots (m-1)} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots m}\right)\Bigg].$$

2. Specialisujte výsledek předešlého příkladu pro $m = 2, 3, 4$. Dokažte dále, že platí tyto odhady:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots<1,$$

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots<\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\ldots<\frac{1}{18}.$$

3. Sestrojte úsečky

$$\frac{ab}{a+b},\ \frac{ab}{2a+b},\ \frac{ab}{3a+b},\ \ldots,\ \frac{ab}{na+b}.$$

4. Sestrojte úsečky

$$\frac{a}{p+1},\ \frac{a}{p+2},\ \frac{a}{p+3},\ \ldots,\ \frac{a}{p+n}$$

a dále úsečky

$$\frac{a}{p+1},\ \frac{a}{2p+1},\ \frac{a}{3p+1},\ \ldots,\ \frac{a}{np+1};$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1},\ \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2},\ \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3},\ \ldots,\ \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+n}.$$

Zpracoval Fr. Martan