Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Josef Schmidtmayer

Řešení soustav lineárních algebraických rovnic s komplexními koeficienty

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 5-6, 571--578

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137363

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

JOSEF SCHMIDTMAYER

ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC S KOMPLEXNÍMI KOEFICIENTY

Řešení soustav s komplexními koeficienty v komplexním oboru je nevýhodné a nevhodné pro strojové zpracování. V článku je popsán způsob, jak určit hledané řešení jen operacemi v reálném oboru.

1. Úvod

Předpokládáme, že čtenář zná theorii soustav lineárních algebraických rovnic, zejména tyto její výsledky:

O řešení soustavy m lineárních algebraických rovnic o n neznámých nad číselným tělesem $\mathbf{T}$ platí:

Nutnou a postačující podmínkou pro existenci řešení dané soustavy je, aby hodnost h matice soustavy byla rovna hodnosti h_r matice rozšířené. Při $h = h_r$ má soustava

a) jediné řešení, je-li $h = n$,

b) více řešení, je-li $h < n$.

V této práci se ukazuje, jak je možno obejít řešení soustavy s komplexními koeficienty řešením náhradní soustavy s koeficienty reálnými. Předností takového postupu je především možnost použití strojových početních pomůcek.

Výhodně se uplatní maticový počet.

2. Hodnost původní a ekvivalentní soustavy

Předpokládejme, že máme řešit soustavu m rovnic o n neznámých z_k nad tělesem komplexních čísel $\mathbf{T}_K$ (t. j. rovnic s komplexními koeficienty)

$$\left.\begin{aligned} p_{11}z_1 + p_{12}z_2 + \dots + p_{1n}z_n &= q_1, \\ p_{21}z_1 + p_{22}z_2 + \dots + p_{2n}z_n &= q_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{m1}z_1 + p_{m2}z_2 + \dots + p_{mn}z_n &= q_m, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

kde $p_{ik} \in \mathbf{T}_K$ a

$$\left.\begin{aligned} p_{ik} &= a_{ik} + \mathrm{j}b_{ik}, & i &= 1, 2, \dots, m, \\ z_k &= x_k + \mathrm{j}y_k, \\ q_i &= u_i + \mathrm{j}v_i, & k &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$\mathrm{j}^2 = -1$; $a_{ik}, b_{ik}, x_k, y_k, u_i, v_i$ jsou vesměs čísla reálná, t. j. prvky tělesa reálných čísel $\mathbf{T}_R$.

Dosazením podle (2) do (1) nabudou rovnice soustavy (1) tvaru rovností mezi dvěma komplexními čísly; odtud vyplývajícím porovnáním reálných a imaginárních částí levé a pravé strany každé rovnice dostáváme soustavu nad $\mathbf{T}_R$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_{11}y_1 - b_{12}y_2 - \dots - b_{1n}y_n &= u_1, \\ a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_{21}y_1 - b_{22}y_2 - \dots - b_{2n}y_n &= u_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - b_{m1}y_1 - b_{m2}y_2 - \dots - b_{mn}y_n &= u_m, \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n &= v_1, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n &= v_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n + a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n &= v_m. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Zavedeme zatím tato označení:

Matici soustavy (1), resp. její matici rozšířenou označíme p, resp. p_r. Podobně u soustavy (3) užijeme označení P, resp. P_r. Jsou tedy, označíme-li ještě matice pravých stran q, resp. Q,

$$\mathsf{p}_r = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} p_{11}; & p_{12}; & \dots; & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1}; & p_{m2}; & \dots; & p_{mn} \end{matrix}}_{\mathsf{p}} & \underbrace{\begin{matrix} q_1 \\ \dots \\ q_m \end{matrix}}_{\mathsf{q}} \end{array}\right], \tag{4}$$

$$\mathsf{P}_r = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11}; & a_{12}; & \dots; & a_{1n}; & -b_{11}; & -b_{12}; & \dots; & -b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}; & a_{m2}; & \dots; & a_{mn}; & -b_{m1}; & -b_{m2}; & \dots; & -b_{mn} \\ b_{11}; & b_{12}; & \dots; & b_{1n}; & a_{11}; & a_{12}; & \dots; & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}; & b_{m2}; & \dots; & b_{mn}; & a_{m1}; & a_{m2}; & \dots; & a_{mn} \end{matrix}}_{\mathsf{P}} & \underbrace{\begin{matrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \\ v_1 \\ \dots \\ v_m \end{matrix}}_{\mathsf{Q}} \end{array}\right]. \tag{5}$$

Pro určení hledaného řešení soustavy (1) řešením soustavy (3) má zásadní význam

Věta 1: *Soustava* (1) *a rovnice* (2) *jsou ekvivalentní soustavě* (3) *a rovnicím* (2).

Je-li hodnost matice p_r *rovna číslu* $h_r \leq \min(m, n)$, *je hodnost matice* P_r *rovna číslu* $2\,h_r$.

Tvoří-li přitom na př. právě prvních h_r *řádků matice* p_r *skupinu řádků lineárně nezávislých nad* $\mathbf{T}_K$, *platí o řádcích matice* P_r:

a) *první až* h_r*-tý řádek spolu s* $(m + 1)$*-ním až* $(m + h_r)$*-tým řádkem jsou lineárně nezávislé nad* $\mathbf{T}_R$;

b) $(h_r + 1)$*-ní až* m*-tý a* $(m + h_r + 1)$*-ní až* $2\,m$*-tý řádek jsou lineárními kombinacemi řádků sub a) nad* $\mathbf{T}_R$.

Obdobné tvrzení platí i o řádcích matic p (*hodnosti* h) *a* P (*hodnosti* $2\,h$).

Vše, co bylo řečeno o řádcích, platí s příslušnými slovními změnami o sloupcích příslušných matic.

Důkaz:

Ekvivalence plyne z vytvoření soustavy (3).

Jsou-li čísla z_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ řešením soustavy (1), jsou nutně čísla x_k, y_k řešením soustavy (3) a obráceně, pokud čísla z_k, x_k, y_k jsou vázána vztahy (2).

Předpoklad o pořadí lineárně nezávislých řádků matice p_r (v počtu h_r) je zřejmě nepodstatný, neboť neovlivňuje hodnost matice.

K důkazu tvrzení a) proto předpokládejme, že k matici p_r neexistují (komplexní) konstanty (z nichž alespoň jedna by byla nenulová)

$$\gamma_l = \alpha_l - \mathrm{j}\,\beta_l \quad (l = 1, 2, \dots, h_r;\ \alpha_l, \beta_l \text{ reálná č.}) \tag{6}$$

tak, aby

$$\sum_{l=1}^{h_r} \gamma_l\, p_{lk} = 0 \tag{7}$$

pro všechna $k = 1, 2, \dots, n$.

To však značí — po dosazení za γ_l a p_{lk} podle (6) a (2) — že neexistují nikoli vesměs nulová reálná čísla α_l, β_l tak, aby mohly být současně splněny tyto podmínky pro lineární závislost nad $\mathbf{T}_R$:

$$\alpha_1 a_{1k} + \alpha_2 a_{2k} + \ldots + \alpha_{h_r} a_{h_r k} + \beta_1 b_{1k} + \beta_2 b_{2k} + \ldots + \beta_{h_r} b_{h_r k} = 0, \tag{8a}$$

$$-\beta_1 a_{1k} - \beta_2 a_{2k} - \ldots - \beta_{h_r} a_{h_r k} + \alpha_1 b_{1k} + \alpha_2 b_{2k} + \ldots + \alpha_{h_r} b_{h_r k} = 0, \tag{8b}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{h_r} u_{h_r} + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{h_r} v_{h_r} = 0, \tag{8c}$$

$$-\beta_1 u_1 - \beta_2 u_2 - \ldots - \beta_{h_r} u_{h_r} + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{h_r} v_{h_r} = 0. \tag{8d}$$

Navíc je zřejmé, že na př. z nemožnosti splnit podmínky (8a) plyne přímo, že nelze splnit ani podmínky (8b) a obráceně. Podobně pro (8c) a (8d), nikoli však pro (8a, b) a (8c, d).

Tvrzení a) plyne z (8a, b, c). Podmínka (8d), zatím zdánlivě přebytečná, se uplatní později.

Tvrzení b) lze dokázat zcela obdobně a proto je podrobně neprovedeme.

Důkaz pro sloupce by byl formálně shodný.

V c e l k u: Je-li h_r hodnost matice p_r, je číslo $2h_r$ hodností matice P_r.

Závěry o maticích p a P plynou z (8a) a (8b).

Tím je věta dokázána.

P o z n á m k a:

Při řešení soustavy (1) mohou nastat prakticky dva případy, jimž mohou vyhovět dva podstatně odlišné pracovní postupy.

Především může mít soustava (1) regulární (čtvercovou) matici, t. j. $h = m = n$.

Dále může být dána soustava, o jejíž hodnosti nic nevíme.

V každém z těchto dvou případů je možno volit jiný postup. V obou případech jde o jistá maticová zobrazení dané soustavy.

3. Řešení regulární čtvercové soustavy

Předpokládejme, že $h = n = m$. Soustava (1) má určitě řešení.

Užijeme těchto označení:[1])

$$\mathsf{p} = [p_{ik}] = \mathsf{a} + \mathrm{j}\,\mathsf{b}, \quad \mathsf{a} = [a_{ik}], \quad \mathsf{b} = [b_{ik}], \tag{9a}$$

$$\mathsf{z} = [z_k] = \mathsf{x} + \mathrm{j}\,\mathsf{y}, \quad \mathsf{x} = [x_k], \quad \mathsf{y} = [y_k], \tag{9b}$$

$$\mathsf{q} = [q_i] = \mathsf{u} + \mathrm{j}\,\mathsf{v}, \quad \mathsf{u} = [u_i], \quad \mathsf{v} = [v_i], \tag{9c}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Pak bude soustava (1) zobrazena maticovou rovnicí

$$\mathsf{p}\,\mathsf{z} = \mathsf{q}, \tag{10}$$

čili

$$(\mathsf{a} + \mathrm{j}\,\mathsf{b})(\mathsf{x} + \mathrm{j}\,\mathsf{y}) = \mathsf{u} + \mathrm{j}\,\mathsf{v};$$

této rovnici lze vyhovět právě jen tehdy, bude-li současně

$$\mathsf{a}\,\mathsf{x} - \mathsf{b}\,\mathsf{y} = \mathsf{u}, \tag{11a}$$

$$\mathsf{b}\,\mathsf{x} + \mathsf{a}\,\mathsf{y} = \mathsf{v}, \tag{11b}$$

nebo, dále zobrazeno jedinou rovnicí,

$$\begin{bmatrix} \mathsf{a}; & -\mathsf{b} \\ \mathsf{b}; & \mathsf{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{x} \\ \mathsf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{u} \\ \mathsf{v} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

---

[1]) Závorkami [. . .] označujeme sloupcovou matici (vektor).

Rovnice (12) je zřejmě maticovým zobrazením soustavy (3), a to pomocí submatic a až v, viz (9); lze ji psát stručněji [viz (4), (5), (9)]

$$\mathsf{P}\,\mathsf{Z} = \mathsf{Q}. \tag{13}$$

Věta 2: *Jediné řešení $z_1, z_2, \ldots, z_n$ soustavy (1) při $h = m = n$ je — v maticovém tvaru, a to pokud mají naznačené operace smysl —*

$$\mathsf{z} = \mathsf{x} + \mathrm{j}\,\mathsf{y},$$

kde

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{x} &= (\mathsf{a} + \mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{b})^{-1}\,\mathsf{u} + (\mathsf{a} + \mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{b})^{-1}\,\mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{v}, \\ \mathsf{y} &= -(\mathsf{a} + \mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{b})^{-1}\,\mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{u} + (\mathsf{a} + \mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{b})^{-1}\mathsf{v}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Důkaz:

Z $h = m = n$ vyplývá, že řešení je jediné. Vztahy (13) dostaneme přímým řešením soustavy (11) nebo řešením rovnice (12) pomocí matice inversní k matici rozdělené v submatice (t. j. k hypermatici).

Za předpokladu, že všechny operace, jichž použijeme, mají smysl, je postupně: Podle (11a)

$$\mathsf{x} = \mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{b}\,\mathsf{y} + \mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{u}.$$

Dosazením do (11b) dostáváme

$$(\mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{b} + \mathsf{a})\,\mathsf{y} = -\,\mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{u} + \mathsf{v},$$

$$\mathsf{y} = -(\mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{b} + \mathsf{a})^{-1}\,\mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{u} + (\mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{b} + \mathsf{a})^{-1}\,\mathsf{v},$$

t. j. (14). Podobně pro x. Tím dokázáno.

Poznámka: Vztahům (14) lze dát i jiný tvar a bylo by možno je podrobit hlubšímu rozboru. Nečiníme tak proto, že tento způsob řešení je výhodný jen potud, pokud lze snadno invertovat matice a i $(\mathsf{a} + \mathsf{b}\,\mathsf{a}^{-1}\,\mathsf{b})$, t. j. zřídkakdy. Vcelku je formálně jednodušší a přehlednější způsob z odst. 4.

4. Řešení soustavy, jejíž hodnost není známa

Není-li známa hodnost soustavy (1), je vhodnější postupovat jinak.

Je známo, že každé komplexní číslo tvaru

$$z = x + \mathrm{j}y$$

lze vzájemně jednoznačně zobrazit čtvercovou maticí nad $\mathbf{T}_{\mathrm{R}}$

$$\mathsf{z} = \begin{bmatrix} x; & -y \\ y; & x \end{bmatrix}; \tag{15}$$

stručně to vyjádříme (symetrickým) vztahem

$$z \approx \mathsf{z}. \tag{16}$$

Toto přiřazení je isomorfismem.

Soustavu (1) lze proto zobrazit soustavou maticových rovnic

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{p}_{11}\,\mathsf{z}_1 + \mathsf{p}_{12}\,\mathsf{z}_2 + \ldots + \mathsf{p}_{1n}\,\mathsf{z}_n &= \mathsf{q}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathsf{p}_{m1}\,\mathsf{z}_1 + \mathsf{p}_{m2}\,\mathsf{z}_2 + \ldots + \mathsf{p}_{mn}\,\mathsf{z}_n &= \mathsf{q}_m, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

kde

$$\mathsf{p}_{ik} = \begin{bmatrix} a_{ik}; & -b_{ik} \\ b_{ik}; & a_{ik} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{z}_k = \begin{bmatrix} x_k; & -y_k \\ y_k; & x_k \end{bmatrix}, \quad \mathsf{q}_i = \begin{bmatrix} u_i; & -v_i \\ v_i; & u_i \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

a tu opět jedinou rovnicí

$$\mathsf{P}^* \mathsf{Z}^* = \mathsf{Q}^*, \tag{19}$$

kde matice

$$\mathsf{P}_r^* = \left[\underbrace{\begin{array}{cc|cc|c|cc} a_{11}; & -b_{11} & a_{12}; & -b_{12} & & a_{1n}; & -b_{1n} \\ b_{11}; & a_{11} & b_{12}; & a_{12} & \cdots & b_{1n}; & a_{1n} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline a_{m1}; & -b_{m1} & a_{m2}; & -b_{m2} & & a_{mn}; & -b_{mn} \\ b_{m1}; & a_{m1} & b_{m2}; & a_{m2} & \cdots & b_{mn}; & a_{mn} \end{array}}_{\mathsf{P}^*} \; \underbrace{\begin{array}{|cc} u_1; & -v_1 \\ v_1; & u_1 \\ \hline \cdots & \cdots \\ \hline u_m; & -v_m \\ v_m; & u_m \end{array}}_{\mathsf{Q}^*} \right], \tag{20}$$

$$\mathsf{Z}^* = [\mathsf{z}_k], \; \mathsf{Q}^* = [\mathsf{q}_i], \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

lze považovat za hypermatice rozdělené v submatice jak naznačeno.

Věta 3: *Soustava* (17) *a rovnice* (18) *jsou ekvivalentní soustavě* (1) *a rovnicím* (18). *Je-li hodnost matice* p_r *rovna číslu* $h_r \leq \min(m, n)$, *je hodnost matice* P_r^* *rovna číslu* $2h_r$. *Tvoří-li přitom na př. právě prvních* h_r *řádků matice* p_r *skupinu řádků lineárně nezávislých nad* $\mathbf{T}_K$, *platí o řádcích matice* P_r^*:

a) *první řádky v počtu* $2h_r$ *jsou lineárně nezávislé nad* $\mathbf{T}_R$;

b) *poslední řádky v počtu* $2(m - h_r)$ *jsou lineárními kombinacemi řádků sub a) nad* $\mathbf{T}_R$.

Obdobné tvrzení platí i o řádcích matic p (*hodnosti* h) *a* P^* (*hodnosti* $2h$).

Vše, co bylo řečeno o řádcích, platí s příslušnými slovními změnami o sloupcích příslušných matic.

Soustavu (17) *lze řešit redukcí matice* P^* *na pseudojednotkový tvar.*[2])

Důkaz:

Ekvivalence soustav (17) a (1) plyne z vytvoření soustavy (17).

Matice P_r^* se liší od P_r [viz (5)] tím, že má zřejmým způsobem přeskupené řádky a v submatici P^* obdobně i sloupce, a že má proti P_r o druhý sloupec v Q^* více. S hlediska lineární závislosti platí o tomto sloupci [podle (8d)] totéž, co o prvním sloupci z Q^*. Proto jsou správná tvrzení o hodnostech a o lineární závislosti a nezávislosti řádků.

Redukci na pseudojednotkový tvar lze provést, jak známo, na př. násobením zleva vhodnými regulárními maticemi, při čemž je lhostejné, zda s jednotlivými maticemi pracujeme jako s rozdělenými či nikoli. A tato násobení jsou rovnocenná postupným elementárním úpravám řádkovým.

Tím je věta dokázána.

Poznámka.

Při této úpravě vyjde na místě původní matice Q^* matice pravých stran redukované soustavy. Je však zřejmě zbytečné pracovat při numerickém výpočtu ještě s posledním

---

[2]) T. j. na tvar, v němž společné prvky prvních lineárně nezávislých řádků a sloupců v počtu $2h_r$ tvoří jednotkovou matici.

sloupcem; neboť v předposledním sloupci vyjdou postupně vždy reálná a imaginární část pravých stran redukované soustavy.

Podrobný postup ozřejmí nejlépe příklad.

Příklad.

Řešit soustavu

$$\begin{aligned} \mathrm{j}\, z_1 + (1 + \mathrm{j})\, z_2 + (2 - \mathrm{j})\, z_3 &= 5 + 4\,\mathrm{j}, \\ (1 + \mathrm{j})\, z_1 + 2\, z_2 + (1 - \mathrm{j})\, z_3 &= 5 + \mathrm{j}, \\ (-3 + 6\,\mathrm{j})\, z_1 + (3 + 9\,\mathrm{j})\, z_2 + (9 + 2\,\mathrm{j})\, z_3 &= 8 + 29\,\mathrm{j}. \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Podrobný výpočet je v *tab. 1.*

Vyjádříme-li redukovanou matici P^* a P^*_r (z řádků r_{25} až r_{30}) opět v komplexním tvaru, dostáváme místo soustavy (α) redukovanou soustavu

$$\begin{aligned} 1\, z_1 + (1 - \mathrm{j})\, z_2 \qquad &= 1 - \mathrm{j}, \\ 1\, z_3 &= 1 + 2\,\mathrm{j}. \end{aligned}$$

Tab. 1.

	Matice →	P*						Q* zkr.	$-\Sigma_{s_1}^{s_7}$	Zkouška
Předpis ↓	↓ ř. →sl.	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	$\Sigma_{s_1}^{s_8}$
V každém šestiřádkovém pásu se počítá nejprve řádek označený tlustou čárkou	r_1	1	−1	2	0	1	1	5	−9	0
	r_2	1	1	0	2	−1	1	1	−5	0
	r_3	0	−1	1	−1	2	1	5	−7	0
	r_4	1	0	1	1	−1	2	4	−8	0
	r_5	−3	−6	3	−9	9	−2	8	0	0
	r_6	6	−3	9	3	2	9	29	−55	0
r_1	**r_7**	1	−1	2	0	1	1	5	−9	0
$r_2 - r_7$	r_8	0	2	−2	2	−2	0	−4	4	0
r_3	r_9	0	−1	1	−1	2	1	5	−7	0
$r_4 - r_7$	r_{10}	0	1	−1	1	−2	1	−1	1	0
$r_5 + 3 r_7$	r_{11}	0	−9	9	−9	12	1	23	−27	0
$r_6 - 6 r_7$	r_{12}	0	3	−3	3	−4	3	−1	−1	0
$r_7 + r_{14}$	r_{13}	1	0	1	1	0	1	3	−7	0
$r_8 : 2$	**r_{14}**	0	1	−1	1	−1	0	−2	2	0
$r_9 + r_{14}$	r_{15}	0	0	0	0	1	1	3	−5	0
$r_{10} - r_{14}$	r_{16}	0	0	0	0	−1	1	1	−1	0
$r_{11} + 9 r_{14}$	r_{17}	0	0	0	0	3	1	5	−9	0
$r_{12} - 3 r_{14}$	r_{18}	0	0	0	0	−1	3	5	−7	0
r_{13}	r_{19}	1	0	1	1	0	1	3	−7	0
$r_{14} + r_{21}$	r_{20}	0	1	−1	1	0	1	1	−3	0
r_{15}	**r_{21}**	0	0	0	0	1	1	3	−5	0
$r_{16} + r_{21}$	r_{22}	0	0	0	0	0	2	4	−6	0
$r_{17} - 3 r_{21}$	r_{23}	0	0	0	0	0	−2	−4	6	0
$r_{18} + r_{21}$	r_{24}	0	0	0	0	0	4	8	−12	0
$r_{19} - r_{28}$	r_{25}	1	0	1	1	0	0	1	−4	0
$r_{20} - r_{28}$	r_{26}	0	1	−1	1	0	0	−1	0	0
$r_{21} - r_{28}$	r_{27}	0	0	0	0	1	0	1	−2	0
$r_{22} : 2$	**r_{28}**	0	0	0	0	0	1	2	−3	0
$r_{23} + 2 r_{28}$	r_{29}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$r_{24} - 4 r_{28}$	r_{30}	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tab. 2.

Předpis ↓	Matice → / sl. → / ↓ ř.	P* s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	E* s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	Q* zkr. s_{13}	$-\Sigma_{s_1}^{s_{13}}$ s_{14}	Zkouška $\Sigma_{s_1}^{s_{14}}$
V každém šestiřádkovém pásu se počítá nejprve řádek označený tlustou čárkou	r_1	1	−1	1	2	2	−1	1						1	−6	0
	r_2	1	1	−2	1	1	2		1					−3	−2	0
	r_3	0	−1	2	1	2	2			1				−4	−3	0
	r_4	1	0	−1	2	−2	2				1			−8	5	0
	r_5	1	−2	3	3	7	−2					1		6	−17	0
	r_6	2	1	−3	3	2	7						1	−14	1	0
r_1	r_7	1	−1	1	2	2	−1	1						1	−6	0
$r_2 - r_7$	r_8	0	2	−3	−1	−1	3	−1	1					−4	4	0
r_3	r_9	0	−1	2	1	2	2	0		1				−4	−3	0
$r_4 - r_7$	r_{10}	0	1	−2	0	−4	3	−1			1			−9	11	0
$r_5 - r_7$	r_{11}	0	−1	2	1	5	−1	−1				1		5	−11	0
$r_6 - 2r_7$	r_{12}	0	3	−5	−1	−2	9	−2					1	−16	13	0
$r_7 + r_{14}$	r_{13}	1	0	0	2	3	4	0	1	1				−7	−5	0
$r_8 + r_9$	r_{14}	0	1	−1	0	1	5	−1	1	1				−8	1	0
$r_9 + r_{14}$	r_{15}	0	0	1	1	3	7	−1	1	2				−12	−2	0
$r_{10} - r_{14}$	r_{16}	0	0	−1	0	−5	−2	0	−1	−1	1			−1	10	0
$r_{11} + r_{14}$	r_{17}	0	0	1	1	6	4	−2	1	1	0	1		−3	−10	0
$r_{12} - 3r_{14}$	r_{18}	0	0	−2	−1	−5	−6	1	−3	−3	0	0	1	8	10	0
r_{13}	r_{19}	1	0	0	2	3	4	0	1	1				−7	−5	0
$r_{14} + r_{21}$	r_{20}	0	1	0	1	4	12	−2	2	3				−20	−1	0
r_{15}	r_{21}	0	0	1	1	3	7	−1	1	2				−12	−2	0
$r_{16} + r_{21}$	r_{22}	0	0	0	1	−2	5	−1	0	1	1			−13	8	0
$r_{17} - r_{21}$	r_{23}	0	0	0	0	3	−3	−1	0	−1	0	1		9	−8	0
$r_{18} + 2r_{21}$	r_{24}	0	0	0	1	1	8	−1	−1	1	0	0	1	−16	6	0
$r_{19} - 2r_{28}$	r_{25}	1	0	0	0	7	−6	2	1	−1	−2			19	−21	0
$r_{20} - r_{28}$	r_{26}	0	1	0	0	6	7	−1	2	2	−1			−7	−9	0
$r_{21} - r_{28}$	r_{27}	0	0	1	0	5	2	0	1	1	−1			1	−10	0
r_{22}	r_{28}	0	0	0	1	−2	5	−1	0	1	1			−13	8	0
r_{23}	r_{29}	0	0	0	0	3	−3	−1	0	−1	0	1		9	−8	0
$r_{24} - r_{28}$	r_{30}	0	0	0	0	3	3	0	−1	0	−1	0	1	−3	−2	0
$r_{25} - 7r_{35}$	r_{31}	1	0	0	0	0	1	$\frac{13}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	−2	$-\frac{7}{3}$		−2	$-\frac{7}{3}$	0
$r_{26} - 6r_{35}$	r_{32}	0	1	0	0	0	13	1	2	4	−1	−2		−25	7	0
$r_{27} - 5r_{35}$	r_{33}	0	0	1	0	0	7	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{8}{3}$	−1	$-\frac{5}{3}$		−14	$\frac{10}{3}$	0
$r_{28} + 2r_{35}$	r_{34}	0	0	0	1	0	3	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$		−7	$\frac{8}{3}$	0
$r_{29} : 3$	r_{35}	0	0	0	0	1	−1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$		3	$-\frac{8}{3}$	0
$r_{30} - r_{29}$	r_{36}	0	0	0	0	0	6	1	−1	1	−1	−1	1	−12	6	0
$r_{31} - r_{42}$	r_{37}	1	0	0	0	0	0	$\frac{25}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{13}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{10}{3}$	0
$r_{32} - 13_{42}$	r_{38}	0	1	0	0	0	0	$-\frac{7}{6}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{13}{6}$	1	−6	0
$r_{33} - 7r_{42}$	r_{39}	0	0	1	0	0	0	$\frac{3}{6}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{9}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{6}$	$-\frac{7}{6}$	0	$-\frac{11}{3}$	0
$r_{34} - 3r_{42}$	r_{40}	0	0	0	1	0	0	$-\frac{13}{6}$	$\frac{3}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3}{6}$	−1	$-\frac{1}{3}$	0
$r_{35} + r_{42}$	r_{41}	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{5}{3}$	0
$r_{36} : 6$	r_{42}	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	−2	1	0
		E*						$(P^*)^{-1}$								

Řešením je tedy na př. (volíme-li z_2 za parametr)

$$z_1 = (1 - j) + (-1 + j)\, z_2,$$
$$z_2 = \text{libovolné číslo},$$
$$z_3 = 1 + 2\,j.$$

Soustava (α) má hodnost $h = h_r = 2$.

5. Výpočet inversní matice

Postup z odst. 4 je vhodný i pro výpočet inversní matice.

Vycházíme z této úvahy:

Nechť je p regulární matice s reálnými prvky a e jednotková matice téhož řádu jako p. Napišme je vedle sebe:

$$\mathsf{p};\ \mathsf{e}.$$

Násobíme-li nyní obě matice zleva maticí p^{-1}, přejde p v e a současně e v p^{-1}, takže dostaneme dvojici

$$\mathsf{e};\ \mathsf{p}^{-1}. \tag{22}$$

Víme však, že násobení zleva regulární maticí lze nahradit vhodnými elementárními úpravami řádků. (Při násobení zprava by šlo o elementární úpravy sloupců.)

Nechť jsou nyní P^* a E^* regulární hypermatice zobrazující matice p a e způsobem z odst. 4. Pak lze opět převést dvojici

$$\mathsf{P}^*;\ \mathsf{E}^*$$

ve dvojici

$$\mathsf{E}^*;\ (\mathsf{P}^*)^{-1} \tag{23}$$

násobením zleva regulární hypermaticí $(\mathsf{P}^*)^{-1}$. Protože je přitom lhostejné, pracujeme-li s E^*, P^* a $(\mathsf{P}^*)^{-1}$ jako s hypermaticemi či jako s obyčejnými maticemi s číselnými prvky, jde opět o elementární řádkové úpravy. Výsledek, t. j. matici $(\mathsf{P}^*)^{-1}$, interpretujeme opět jako p^{-1}, neboť rozdělení matice $(\mathsf{P}^*)^{-1}$ musí být shodné s rozdělením matice P^*.

Příklad:

Řešte soustavu

$$\begin{aligned}
(1 + j)\, z_1 + (1 - 2\,j)\, z_2 + (2 + j)\, z_3 &= 1 - 3\,j,\\
j\, z_1 + (2 - j)\, z_2 + (2 - 2\,j)\, z_3 &= -4 - 8\,j,\\
(1 + 2\,j)\, z_1 + (3 - 3\,j)\, z_2 + (7 + 2\,j)\, z_3 &= 6 - 14\,j
\end{aligned} \tag{β}$$

a určete zároveň matici inversní k matici soustavy.

Podrobné řešení viz v *tab. 2.*

Soustava (β) má hodnost $h = 3$ a jejím jediným řešením je trojice

$$z_1 = j,\quad z_2 = -j,\quad z_3 = 1 - 2\,j.$$

Matice inversní k matici soustavy je

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 25 - 7\,j; & 7 + 11\,j; & -13 + j\\ 3 - 13\,j; & 9 - j; & -3 + 7\,j\\ -1 + j; & -1 + j; & 1 - j \end{bmatrix}.$$