Ivan Netuka; Jiří Veselý

Nedávné poznatky o čísle π

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 43 (1998), No. 3, 217--236

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137587

[8] LARSEN, P. K., DOBSON, P. J.: *RHEED and Reflection Electron Imaging of Surfaces.* New York, Plenum Press 1988.
[9] MATOLÍN, V., PEUCHOT, B.: Thin Solid Films *259* (1995), 65.
[10] DOERING, D. L., DICKINSON, J. T., POPPA, H.: J. Catalysis *73* (1982), 104.
[11] MATOLÍN, V., GILLET, E., REED, N., VICKERMAN, J. C.: J. Chem. Soc. Faraday Trans. *85* (15) (1990), 2749.
[12] STARÁ, I., MATOLÍN, V.: Surface Sci. *313* (1994), 99.
[13] HENRY, C. R., CHAPON, C., DURIEZ, C.: Z. Phys. *D19* (1991), 347.
[14] MATOLÍN, V.: *Application de la spectrométrie de masse d'ions secondaires à l'étude de l'oxydation catalytique de CO sur particules de palladium.* (Doktorská disertační práce.) Universita Aix-Marseille 1987.
[15] HENRY, C. R., CHAPON, C., GOYHENEX, C., MONOT, R.: Surface Sci. *272* (1992), 283.
[16] LACQUANITI, V., MAGGI, S., MONTICONE, E., STENI, R.: Phys. Stat. Sol. (a), 151 (1995). 335
[17] GIBAUD, A., MCMORROW, D. F., SWADDLING, P. P.: J. Phys. Condens. Matter *7* (1995). 2645
[18] FLYNN, C. P., YADAVALLI, S.: Acta Metall. Mater. *40* (1992), S45.
[19] MAŠEK, K., MATOLÍN. V.: Thin Sol. Films *317* (1998), 183.

Nedávné poznatky o čísle π

Ivan Netuka a Jiří Veselý, Praha

Úvodem. Na konci prvního čtvrtletí r. 1998 se na českém knižním trhu objevil překlad [8] knížky PETRA BECKMANNA s názvem *Historie čísla* π. Je to čtivě napsaná publikace, kterou může čtenář zhltnout v krátkém čase a která přináší zajímavé informace, bohužel bez větších nároků na úplnost a přesnost obvyklou u matematických textů. Nebyl to však také autorův záměr, neboť sám píše v předmluvě toto:

„*Ačkoliv nejsem ani historik, ani matematik, cítil jsem se pro napsání této historie velmi kvalifikován.* (...) *Tato poznámka je míněna sarkasticky, ale je v ní pravdivé jádro. Nejsa historikem, nejsem povinen nosit masku chladné nestrannosti.* (...) *Nejsa matematikem, nejsem povinen komplikovat své výklady přemrštěnou matematickou přesností.*“

Přestože knížka pokrývá časový úsek bezmála 4000 let, nezahrnuje vůbec vývoj posledního čtvrtstoletí; např. závěrečná tabulka důležitých výsledků je dovedena do r. 1967. V překladu není uvedena žádná informace o nedávném pokroku v poznání π,

Prof. RNDr. IVAN NETUKA, DrSc. (1944), a doc. RNDr. JIŘÍ VESELÝ, CSc. (1940), jsou pracovníky Matematického ústavu UK, MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: netuka@karlin.mff.cuni.cz, jvesely@karlin.mff.cuni.cz

Tato práce vznikla s podporou Grantové agentury UK (grant 186/96).

a proto může být tato poznámka o novějších výsledcích užitečná. Stručnou exkurzi do starší historie uvádíme pouze jako základ pro popis nových poznatků a souvislostí.

Trochu historie. První podstatný výsledek pro určení hodnoty π pochází od ARCHIMEDA (289–212 před n. l.). Ten pomocí *metody komprese*, spočívající v odhadu délky jednotkové kružnice pomocí obvodů pravidelných opsaných a vepsaných n-úhelníků, obdržel pro $n = 96$ odhad

$$\tfrac{223}{71} < \pi < \tfrac{22}{7}, \quad \text{neboli} \quad 3{,}140845\ldots < \pi < 3{,}142857\ldots .$$

Tento na svou dobu pozoruhodný výkon (průměr odhadů aproximuje π s chybou cca 0,0002) byl po staletí teoretickým základem dalších výpočtů. O mnoho století později LUDOLPH VAN CEULEN (1540–1610) spočetl touto metodou π s přesností na 35 desetinných míst.

Všimneme si jednoho detailu. V soudobém označení platí pro poloviční obvody b_j vepsaných pravidelných $(3 \cdot 2^{j-1})$-úhelníků a poloviční obvody a_j opsaných pravidelných $(3 \cdot 2^{j-1})$-úhelníků vztahy

$$a_j = 3 \cdot 2^{j-1} \operatorname{tg}(\pi/3 \cdot 2^{j-1}), \quad b_j = 3 \cdot 2^{j-1} \sin(\pi/3 \cdot 2^{j-1}).$$

Pomocí poznatků z elementární geometrie lze snadno ukázat, že pro $j \geqq 1$ je

$$\frac{1}{a_j} + \frac{1}{b_j} = \frac{2}{a_{j+1}}, \quad \text{tj.} \quad a_{j+1} = \frac{2a_j b_j}{a_j + b_j},$$

a dále

$$a_{j+1} b_j = (b_{j+1})^2, \quad \text{tj.} \quad b_{j+1} = \sqrt{a_{j+1} b_j}.$$

Tato rekurze bývá nazývána *Borchhardův algoritmus*; srv. [11].

Archimedes tedy vlastně pracoval se vstupními daty $a_2 = 2\sqrt{3}$, $b_2 = 3$, přičemž použil aproximaci hodnoty $\sqrt{3}$ pomocí $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$. Při postupném zaokrouhlování dospěl k odhadu, odpovídajícímu v zavedeném označení nerovnostem $b_6 < \pi < a_6$. S ohledem na další výklad zdůrazňujeme na tomto místě význam průměrů při výpočtu π. Archimedova metoda výpočtu se v podstatě užívala dalších 1800 let; je relativně pomalá, neboť na určení n platných míst π vyžaduje $O(n)$ *operací*, přičemž její další nevýhodou je nutnost odmocňovat.

Známé je vyjádření π pomocí nekonečného součinu, které r. 1674 odvodil JOHN WALLIS (1616–1703) (viz [25], [36]):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdots, \quad \text{a tudíž} \quad \pi = 2 \lim_{n\to\infty} \left(2^{2n} \Big/ \binom{2n}{n} \right)^2 .$$

Dále je známo, že

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}. \tag{1}$$

Vyjádření první řadou v (1) znal již JAMES GREGORY (1638–1675) r. 1671 a dokazuje se v elementárních kurzech analýzy (viz např. [22], s. 310 nebo [36], s. 423). Po dosazení $x = 1$ dostaneme vyjádření π, nazývané po GOTTFRIEDU W. LEIBNIZOVI (1646–1716); ten ho popsal r. 1684, bylo však nalezeno o více než 100 let dříve v Indii:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots . \tag{2}$$

Tato řada se však *zásadně nehodí* k praktickému výpočtu hodnoty π s větší přesností. Jako příklad uveďme rovnost

$$4 \sum_{n=0}^{499999} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 3{,}14159\underline{0}65358979324\underline{0}\underline{4}... $$

$$4 \sum_{n=0}^{499999} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 3{,}14159\underline{0}6535897932\underline{40}4626433832\underline{6}9502884197,$$

která ukazuje, že již 6. desetinné místo je nesprávné (nesprávné číslice rozvoje jsou podtrženy); výsledek vypadá trochu záhadně, ze 40 míst nesouhlasí pouze 4 podtržené číslice. To lze vysvětlit pomocí Eulerových a Bernoulliových čísel; viz [14]. Závěr je zřejmý: ne všechna vyjádření π jsou pro výpočet vhodná.

Druhou řadu ve vyjádření arkustangenty v (1), konvergující pro malé hodnoty $|x|$ velmi rychle, objevil LEONHARD EULER (1707–1783) r. 1755. První známá jemnější metoda výpočtu π je též založena na užití funkce arkustangens. Pochází od JOHNA MACHINA (1680–1752) a využívá vztahu

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} \tfrac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \tfrac{1}{239} \tag{3}$$

z r. 1706; Machin ho použil k určení 100 desetinných míst π. Některé další vzorce tohoto typu jsou uvedeny v [36], s. 425. Značný počet vzorců tohoto typu lze nalézt na Internetu na adrese [38]. Vyjadřují π pomocí racionální kombinace několika hodnot arkustangenty malých racionálních čísel. Budeme o nich mluvit jako o vzorcích *Machinova typu*. Euler např. použil k výpočtu π podobný vzorec

$$\pi = 5 \operatorname{arctg} \tfrac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \tfrac{3}{79}$$

a pomocí něj a druhé řady z (1) spočetl 20 desetinných míst π za méně než hodinu; viz [18], s. 93. Efektivita těchto vzorců je ilustrována např. v [25], s. 255.

Existuje mnoho vyjádření čísla π pomocí řad, nekonečných součinů, řetězových zlomků apod. Metody výpočtu na nich založené vyžadují $O(\sqrt{n})$ až $O(n)$ operací na určení n platných míst. Hledání stále přesnějších aproximací π mohlo v průběhu rozvoje matematiky souviset se snahou dozvědět se, zda π je či není racionální číslo. R. 1767 JOHANN H. LAMBERT (1728–1777) předložil důkaz tvrzení, že číslo π je *iracionální*. Nicméně zájem o výpočet π na mnoho desetinných míst neuhasl. R. 1853 WILLIAM SHANKS (1812–1882) spočetl („ručně") pomocí Machinova vzorce (3) hodnotu π nejprve na 318, pak na 607 a později, r. 1873, na 707 desetinných míst. Ač v té době ještě nebyl pojem *normálního* reálného čísla znám (viz níže), byla v Shanksově výsledku shledána nápadná anomálie ve výskytu číslice 7. Bylo zjištěno[1]), že číslice 7 se vyskytuje na prvních 608 místech pouze 44krát. V r. 1945 D. F. FERGUSON nalezl na 528. desetinném místě Shanksova rozvoje chybu. Lze říci, že k odhalení této chyby přispěly jisté de Morganovy numerické experimenty. Dnes víme, že ve skutečnosti relativní četnost výskytu číslice 7 vypadá takto: na prvních 10^n místech se vyskytuje pro $n = 1, \dots, 7$ s četností 0; 0,08; 0,095; 0,097; 0,10025; 0,0998; 0,1000207; četnosti se přibližují k $\frac{1}{10}$ rychlostí, která je ve shodě s rychlostí předvídanou pro náhodné rozložení na základě teorie pravděpodobnosti; srv. [37], s. 67.

V zásadě lze říci, že vzorce Machinova typu mají jednu společnou vlastnost: počet platných desetinných míst roste *lineárně* v závislosti na *počtu operací*, které je třeba provést. Přesto však volba vhodného vzorce tohoto typu výpočet velmi usnadní (Euler). Kupodivu teprve v poslední době se podařilo najít algoritmy nesrovnatelně „rychlejší".

R. 1882 dokázal CARL LOUIS FERDINAND LINDEMANN (1852–1939), že číslo π je *transcendentní*, tj. není kořenem žádného polynomu s celočíselnými koeficienty. Tím byla definitivně vyvrácena možnost *kvadratury kruhu*.

Číselně teoretické vlastnosti čísla π a kvadratura kruhu. Úloha *sestrojit* pomocí kružítka a pravítka k danému kruhu čtverec stejného obsahu se nazývá *kvadratura kruhu*. V algebře se dokazuje (viz např. [24], s. 453), že číslo lze zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka, právě když padne do tělesa vzniklého z racionálních čísel postupným přidáváním konečně mnoha odmocnin. Proto takto nelze zkonstruovat číslo, které není algebraické. Cesta k důkazu tvrzení, že číslo π je transcendentní, byla však dlouhá.

Zmínka o nesouměřitelnosti obvodu kružnice s jejím průměrem se vyskytuje bez důkazu již u ARISTOTELA (384–322 před n. l.). Lambertův důkaz iracionality π je založen na vyjádření hodnoty $\operatorname{tg} x$ řetězovým zlomkem; na základě tohoto vyjádření Lambert předložil (neúplný) důkaz tvrzení, že pro racionální $x \neq 0$ je $\operatorname{tg} x$ iracionální. Stačilo si pak uvědomit, že $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, a bylo zřejmé, že je π iracionální.

R. 1794 odstranil ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752–1833) zmíněnou mezeru v důkazu, neboť odůvodnil iracionalitu jednoduchých (též normálních) řetězových zlomků[2]) a dokázal, že π^2 je iracionální číslo. Vyslovil též domněnku, že π je transcendentní, a poznamenal, že důkaz bude patrně velmi obtížný. Není nám znám žádný přístupný důkaz transcendence π vhodný pro článek tohoto typu; odkazujeme čtenáře např. na [20], [12] či [10]. Tvrzení, že π je iracionální, lze však elementárně dokázat sporem např. takto:

Předpokládejme, že existují čísla $a, b \in \mathbb{N}$ tak, že $\pi = a/b$. Pro každé číslo $n \in \mathbb{N}$ definujme polynom p_n stupně $2n$ rovností

$$p_n(x) := x^n(a - bx)^n/n!, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[1]) Zpravidla se jako autor tohoto zjištění uvádí AUGUSTUS DE MORGAN (1806–1871).

[2]) Tyto řetězové zlomky mají „v čitatelích" vždy číslici 1.

Zvolme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $\pi^n a^n/n! < 1$, a položme $p = p_n$, $P = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j p^{(2j)}$. Zřejmě je $p^{(2n+2)} = 0$, takže $P'' + P = p$ a v důsledku toho

$$(P' \sin - P \cos)' = P'' \sin + P' \cos - P' \cos + P \sin = p \sin .$$

Jelikož na $(0,\pi)$ je $0 < p < \pi^n a^n/n! < 1$, plyne odtud, že $0 < \int_0^\pi p \sin < 1$.

Ukážeme, že $p^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ pro $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pro $k = 0$ to je zřejmé, neboť $p(0) = 0$. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $q(x) = x^n$, $r(x) = (a - bx)^n$, $x \in \mathbb{R}$, takže $p = qr/n!$. Zřejmě je $q^{(n)}(0) = n!$, $q^{(j)}(0) = 0$ pro $j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n\}$ a $r^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$. Protože

$$p^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} q^{(j)}(0) r^{(k-j)}(0),$$

platí $p^{(k)}(0) = 0$ pro $k < n$. Pro $k \geqq n$ je proto

$$p^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} q^{(n)}(0) r^{(k-n)}(0) = \binom{k}{n} r^{(k-n)}(0) \in \mathbb{Z}.$$

Vidíme, že $P(0) \in \mathbb{Z}$ a také $P(a/b) = P(\pi) \in \mathbb{Z}$, neboť $p(a/b - x) = p(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že $\int_0^\pi p \sin$ je celé číslo, neboť

$$\int_0^\pi p \sin = \left[P' \sin - P \cos\right]_0^\pi = P(\pi) + P(0) \in \mathbb{Z}.$$

To je však ve sporu s dokázanými nerovnostmi $0 < \int_0^\pi p \sin < 1$. Číslo π tedy není racionální číslo. Důkaz je v podstatě převzat z článku [26]; srv. též [28]. V [21] je modifikací tohoto důkazu odvozena iracionalita π^2.

Charles Hermite (1822–1901) v r. 1873 dokázal transcendenci čísla e a pak se Lindemannovi podařilo zjemněním Hermiteovy metody dokázat transcendenci čísla π. Tvrzení o transcendenci e a π je zahrnuto v této Lindemann-Weierstrassově větě: Nechť $c_1, \dots, c_n$ jsou navzájem různá komplexní algebraická čísla a nechť $a_1, \dots, a_n$ jsou nenulová algebraická čísla. Potom je

$$a_1 \mathrm{e}^{c_1} + \dots + a_n \mathrm{e}^{c_n} \neq 0;$$

viz [10], s. 224 a 649 a [12], s. 357. Speciálně pro $n = 2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ vyplývá z rovnosti $1 \cdot \mathrm{e}^1 - \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^0 = 0$ transcendence čísla e. S ohledem na rovnost $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} - 1 = 0$ je také π transcendentní. Poznamenejme, že z uvedeného tvrzení lze dostat i transcendenci $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ pro algebraická $\alpha \neq 0$ a $\log\alpha$ pro kladná algebraická $\alpha \neq 1$.

Později, r. 1874, dokázal Georg Cantor (1845–1918) nespočetnost množiny všech transcendentních čísel. Převážná „většina" reálných čísel je tedy tvořena transcendentními čísly; patrně nejznámějším reprezentantem transcendentních reálných čísel je právě číslo π, protože je délkou kružnice s jednotkovým průměrem. Je podivuhodné, co vše o tomto čísle ještě *nevíme.*

Co se o čísle π ještě neví. Přes tisíciletí, po která je číslo π lidstvu známo, se o něm neví ani zdaleka všechno. Neví se např., zda jsou čísla $\pi + e$, π/e, 2^π, či $\log \pi$ iracionální, natož transcendentní (součin πe je iracionální); srv. [16] a [18], s. 88.

Víme sice, že tato čísla nejsou kořeny polynomu stupně nejvýše 8 s celočíselnými koeficienty o průměrné velikosti nepřesahující 10^9, ale ne víc. R. 1929 dokázal ALEKSANDR OSIPOVIČ GELFAND (1906–1968) iracionalitu e^π. Spolu s THEODOREM SCHNEIDEREM (1911–1988) pak r. 1934 rozřešili sedmý problém DAVIDA HILBERTA (1862–1943) položený r. 1900. Hilbert se tázal, zda pro algebraické číslo $\alpha \notin \{0,1\}$ a algebraické iracionální číslo β je α^β vždy transcendentní nebo alespoň iracionální číslo. Z věty Gelfand-Schneiderovy plyne, že číslo e^π je transcendentní, ale o čísle π^e to není známo; srv. [27]. Není ani známo, zda se v desetinném rozvoji π vyskytují všechny číslice $0, 1, \ldots, 9$ nekonečněkrát.

Z výsledků, za něž v r. 1970 dostal ALAN BAKER Fieldsovu medaili, plyne např., že číslo $\pi + \log 2 + \sqrt{2} \log 3$ je transcendentní. Připomeňme, že číslo x je tzv. Liouvilleovým číslem, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ tak, že platí $0 < |x - a/b| < b^{-n}$; srv. [29]. Z osmdesátých let je znám výsledek, že pro dostatečně velká čísla $b \in \mathbb{N}$ existují $a \in \mathbb{Z}$ tak, že platí $|\pi - a/b| < b^{-14{,}65}$, a byla vyslovena domněnka, že číslo 14,65 lze nahradit číslem $2 + \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$; srv. [16], s. 203. Liouvilleova čísla jsou transcendentní, tvoří množinu Lebesgueovy míry 0 (dokonce s-rozměrné Hausdorffovy míry 0 pro libovolné $s > 0$) a zároveň 2. kategorie v Baireově smyslu. Další informace elementárního charakteru o π lze nalézt v [35]; náročnější výsledky popisuje [18], kde je uveden též rozsáhlý seznam citací.

Nové algoritmy. V Beckmannově knížce [8] jsou zmíněny výpočetní metody pro π užívané do r. 1967. Celkový dojem by mohl vést ke skeptickému závěru, že se vývoj zastavil: skutečně, všechny „rekordní" výpočty prováděné na počítačích byly až do 70. let založeny na vzorci (3) a vzorcích Machinova typu. Je zajímavé, že za pouhých pět let po pátém vydání Beckmannovy knihy dochází k podstatnému pokroku. V r. 1976 publikovali EUGÈNE SALAMIN a RICHARD BRENT nezávisle na sobě nový algoritmus pro výpočet π, založený na aritmeticko-geometrickém průměru a na myšlenkách CARLA F. GAUSSE (1777–1855); viz [17], [33]. Sám Salamin, který k tomuto algoritmu dospěl v prosinci 1973, poznamenává, že algoritmus je založen na výsledcích klasické matematiky známých do r. 1818. Tento algoritmus poskytuje posloupnost aproximací π, konvergující *kvadraticky*. To znamená, že při každém kroku se přibližně *zdvojnásobuje* počet platných míst desetinného rozvoje π, takže pomocí n iterací lze dostat 2^n platných míst. Počínaje rokem 1985 JONATHAN BORWEIN, PETER BORWEIN a další postupně nalezli *kubické* a *kvartické* algoritmy pro výpočet π.

Abychom předešli nedorozumění, popišme přesněji míru rychlosti konvergence posloupnosti $\{a_n\}$ konvergující k číslu a: existuje-li konstanta $c > 0$ tak, že pro všechna n platí $|a_{n+1} - a| \leqq c|a_n - a|^2$, říkáme, že $\{a_n\}$ konverguje k a *kvadraticky*. V takovém případě existují konstanty $b > 0$, $d > 1$ tak, že pro všechna dostatečně velká n je

$$|a_n - a| \leqq bd^{-2^n},$$

přičemž a_n a a se shodují na prvních $O(2^n)$ místech (pokud uplatníme konvenci o shodě čísel typu $0,\ldots 1000\ldots$ a $0,\ldots 0999\ldots$ na příslušném počtu míst). Když vyšetřovaný algoritmus poskytuje posloupnost aproximací popsané vlastnosti, budeme mu říkat kvadratický.

Na místě dvojky mohou být obecněji čísla $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$. O těchto případech se však jen letmo zmíníme. Jestliže bychom v následující části pracovali se zobecněnými průměry $P_m(a,b)$, $G_m(a,b)$ závislými na m, pak bychom pro $m = 3, 4, \ldots$ dostali kubické, kvartické, … algoritmy. Dnes jsou dokonce známy algoritmy „libovolného řádu", tj. s libovolným přirozeným $m \geqq 2$; podrobnosti čtenář nalezne v [7] a tam citovaných pracích.

Aritmeticko-geometrický průměr. Zavedeme následující označení: je-li $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$, položíme

$$A(a,b) := \tfrac{1}{2}(a+b), \quad G(a,b) := \sqrt{ab};$$

definujeme rekurentně posloupnosti $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ pomocí vztahů $a_0 := a$, $b_0 := b$ a dále pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = A(a_n, b_n), \quad b_{n+1} = G(a_n, b_n). \tag{4}$$

Pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (viz např. [36], s. 29) odvodíme $a_n \geqq a_{n+1} \geqq b_{n+1} \geqq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a vztah

$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \left(\tfrac{1}{2}(a_n + b_n)\right)^2 - a_n b_n = \left(\tfrac{1}{2}(a_n - b_n)\right)^2. \tag{5}$$

Dále platí odhad

$$a_{n+1} - b_{n+1} \leqq a_{n+1} - b_n = 2^{-1}(a_n - b_n),$$

z něhož vyplývá, že

$$0 \leqq a_n - b_n \leqq 2^{-n}(a_0 - b_0). \tag{6}$$

Existuje tedy společná limita obou posloupností, kterou označíme

$$P(a,b) := \lim a_n \quad (= \lim b_n)$$

a kterou ze zřejmých důvodů nazveme *aritmeticko-geometrický průměr* čísel a, b. Obě posloupnosti konvergují k $P(a,b)$ kvadraticky.

Moderní algoritmy. Salamin v [33] spolu s (4) definuje ještě pomocnou posloupnost $c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Vzhledem k (5) je zřejmě

$$c_{n+1} = c_n^2 / 4a_{n+1} \leqq c_n^2 / 4b_0,$$

a tak $\{c_n\}$ konverguje k 0 kvadraticky. Nyní vstupují do hry eliptické integrály, jejichž numerický výpočet souvisí s $P(a,b)$. Pro $a > b > 0$ definujeme

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)^{-1/2}\,\mathrm{d}u,$$
$$J(a,b) = \int_0^{\pi/2} (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)^{1/2}\,\mathrm{d}u.$$

(Poznamenejme, že $4J(a,b)$ je obvod elipsy o délce poloos a, b.) Vtip dále spočívá v tom, že výraz $I(a,b)$ je vzhledem k transformaci $(a,b) \to \left(\frac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}\right)$ invariantní. Proto lze odtud odvodit rovnosti $I(a_{n+1}, b_{n+1}) = I(a_n, b_n)$ a posléze s ohledem na skutečnost, že $\lim a_n = \lim b_n = P(a_0, b_0)$, i vztah $I(a_0, b_0) = (\pi/2)P(a_0, b_0)$. Nyní několik věcí pouze popíšeme. Z teorie eliptických integrálů vyplývá pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ vzorec

$$2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n) = a_n b_n I(a_{n+1}, b_{n+1}),$$

ze kterého se odvodí, že

$$J(a_0, b_0) = \left(a_0^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} 2^j c_j^2\right) I(a_0, b_0).$$

Dále budeme ještě potřebovat vzorec pocházející od Legendrea: je-li $a' > b' > 0$ a $(b/a)^2 + (b'/a')^2 = 1$, potom

$$a^2 I(a,b)J(a',b') + (a')^2 I(a',b')J(a,b) - (aa')^2 I(a,b)I(a',b') = (\pi/2)aa'.$$

Zvolíme nyní $k \in (0,1)$ a položíme $k' = \sqrt{1-k^2}$, $a_0 = a_0' = 1$, $b_0 = k$, $b_0' = k'$ a $c_n' = \sqrt{(a_n')^2 - (b_n')^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Ze vztahů, které jsme uvedli, lze eliptické integrály eliminovat. Výsledkem je pozoruhodný vzorec

$$\pi = 4P(1,k)P(1,k') \Bigg/ \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \left(c_j^2 + (c_j')^2\right)\right).$$

„Symetrická volba“ $k = k' = \sqrt{2}/2$ dává elegantní vyjádření

$$\pi = 4\left(P(1, \sqrt{2}/2)\right)^2 \Bigg/ \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1} c_j^2\right).$$

Připomeňme, že zde je $a_0 = 1$, $b_0 = \sqrt{2}/2$ a $c_0 = \sqrt{2}/2$, $c_{j+1} = \frac{1}{2}(a_j - b_j)$, $j \in \mathbb{N}_0$. Jestliže nyní položíme

$$\pi_n = 4a_{n+1}^2 \Bigg/ \left(1 - \sum_{j=1}^{n} 2^{j+1} c_j^2\right),$$

pak $\{\pi_n\}$ konverguje k π kvadraticky. Připomínáme, že pak se při každém kroku (přechodu od π_n k π_{n+1}) počet platných míst zhruba zdvojnásobuje. Podrobnější analýza ukazuje, že π_{16} dá 178 000 platných míst, π_{19} již přes milion atd. Přitom si výpočet π_n vyžádá $7n$ operací v pohyblivé čárce. Při užití metody založené na vzorci Machinova typu (Shanks a Wrench) bylo zapotřebí k výpočtu 100 000 platných míst takřka 105 000 operací v pohyblivé čárce, při popsaném „kvadratickém“ algoritmu jich stačí pro stejnou přesnost cca 1000krát méně.

Jak jsme poznamenali, jsou dnes známy konkrétní algoritmy, při kterých se počet platných míst při každém kroku ztrojnásobuje atd. až zdevítinásobuje, a takto lze postupovat libovolně „daleko". Je zde však „něco za něco": k větší přesnosti stačí méně kroků, ale každý krok je početně „náročnější". Proto mají tyto algoritmy „hodně vysokého řádu" význam spíše teoretický. Je však patrně na místě pro ilustraci popsat např. jeden efektivní kvartický algoritmus, který objevili J. a P. Borweinové r. 1985: položme $\alpha_0 = 6 - 4\sqrt{2}$ a $y_0 = \sqrt{2} - 1$. Dále definujme iterační schéma

$$y_{n+1} := \frac{1 - (1 - y_n^4)^{1/4}}{1 + (1 - y_n^4)^{1/4}},$$

$$\alpha_{n+1} := (1 + y_{n+1}^4)\alpha_n - 2^{2n+3} y_{n+1}(1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2).$$

Lze dokázat, že $\{\alpha_n\}$ konverguje k $1/\pi$ kvarticky a že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí (srv. [7])

$$0 < \alpha_n - 1/\pi < 16 \cdot 4^n e^{-2 \cdot 4^n \pi}.$$

Poznamenejme ještě, že hlubší rozvinutí teorie, kterou nastínil KARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804–1851) r. 1829, umožnilo Borweinům konstruovat algoritmy v rámci teorie, v níž je popsaný Brentův a Salaminův algoritmus speciálním případem.

Moderní metody výpočtu. Nežli popíšeme, jak se rekordy ve výpočtu rozvojů vytvářejí, připomeneme si ještě jeden poměrně starý matematický výsledek: SRINIVASA RAMANUJAN (1887–1920) publikoval r. 1914 článek [32], ve kterém studoval otázky vztahu eliptických integrálů a π. Dokázal rovnost

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\,(1103 + 26390n)}{(n!)^4\,(396)^{4n}} \tag{7}$$

a některé další, objevené patrně kolem r. 1910. Poznamenejme, že přičtením n-tého členu řady (7) k součtu předcházejících členů se získá dalších 9 platných míst $1/\pi$. Ramanujanovy práce o π se váží k jeho vyšetřování tzv. modulárních rovnic. Zhruba řečeno jde o teorii rovnic, ve kterých vystupuje neznámá funkce f proměnné x spolu s f „v proměnné" x^2, x^3 atd. Nejvyšší exponent je pak řád příslušné modulární rovnice. Brent-Salaminův algoritmus souvisí s rovnicí

$$(1 + x) \cdot f(x^2) = f\big(4x/(1 + x)^2\big)$$

pro neznámou funkci f, jejíž řešení ve tvaru

$$f(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 \left(\frac{x}{4}\right)^{2n}$$

nalezl na základě velkého počtu numerických experimentů s hypergeometrickou řadou již Gauss. Všimněme si výskytu kombinačního čísla v řadě: s podobnými řadami, obsahujícími tato kombinační čísla, se ještě setkáme. (Podrobnější výklad o Ramanujanovi a části matematiky, kterou se do své předčasné smrti zabýval, lze nalézt spolu s dalšími odkazy např. v [16].)

„Tabulky rekordů“ ve výpočtu rozvoje π od konce druhé světové války ilustrují zejména pokrok výpočetní techniky. Zmíníme se pouze o ENIACu v r. 1949 (2037 míst pomocí Machinova vzorce), o prolomení hranice milionu míst r. 1973 a o faktu, že od r. 1986 každý zápis obsahuje jména Yasumasa Kanada nebo David a Gregory Chudnovsky. Oba posledně jmenovaní užívali vzorce „Ramanujanova typu“, který objevili a který dává přičtením dalšího členu navíc 14 platných míst:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{53360\sqrt{640320}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!\,(13591409 + 545140134n)}{(3n!)\,(n!)^3\,(8 \cdot 100100025 \cdot 327843840)^n} =$$

$$= 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(6n)!\,(13591409 + 545140134n)}{(3n!)\,(n!)^3\,(640320)^{3n+3/2}}.$$

První z vyjádření se lépe hodí pro numerické výpočty; srovnejte se (7).

Jaký je současný rekord? Dne 3. 8. 1997 byl dokončením třetího kontrolního a optimalizovaného výpočtu, který trval něco přes 25 hod., vytvořen světový rekord v délce desetinného rozvoje π spočtením jeho 51 539 600 000 desetinných míst. Spočetl je japonský matematik Kanada, tentokrát spolu s Daisuke Takahashim v Tokiu; oznámení je na síti, viz [23].

Ukazuje se, že pro počítačové výpočty lze též použít algoritmy Brent-Salaminova typu; při posledním rekordním výpočtu [23], kdy bylo ve skutečnosti spočteno o něco více platných míst ($3 \cdot 2^{34}$) pomocí Brent-Salaminova algoritmu, byl ke srovnávací kontrole použit „borweinovský“ kvartický algoritmus. Abychom ocenili kvalitativní skok, uveďme srovnání: algoritmus výpočtu použitý v r. 1973 k překonání „milionové hranice“ by i při stonásobně větší rychlosti počítače potřeboval k určení miliardy míst asi 25 let[3]). Na skoku se podílejí tedy nejen vyšší rychlosti počítačů, ale i popsané iterační algoritmy a také efektivní metody násobení založené na rychlé Fourierově transformaci (FFT).

Normální čísla. R. 1909 zavedl Émile Borel (1871–1956) pojem *normálního reálného čísla*, který souvisí s frekvencí výskytu číslic $0, 1, \ldots, (g-1)$ v rozvoji čísla $x \in \mathbb{R}$ při základu $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Reálné číslo x je normální při základu g, jestliže se v jeho g-adickém rozvoji vyskytují všechny číslice i skupiny číslic „stejně často“. Přesněji: číslo $x \in \mathbb{R}$ se nazývá *normální při základu* g, jestliže pro každý řetězec $s = (a_1 a_2 a_3 \ldots a_m)$ číslic a_n o délce m platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(s,n)}{n} = \frac{1}{g^m},$$

přičemž $N(s,n)$ je počet výskytů řetězce s v řetězci $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ z vyjádření čísla $x = (a_1 a_2 a_3 \ldots)_g$. Číslo $x \in \mathbb{R}$ je *normální*, je-li normální při každém základu g. Borel

[3]) Jde o výpočet provedený v r. 1973 Bouyerem a Guilloudem; srv. [13].

dokázal, že množina všech reálných čísel, která nejsou normální, má nulovou Lebesgueovu míru. Poznamenejme, že např. číslo (důkaz podal D. G. CHAMPERNOWNE)

$$0{,}1234567891011121314151617181920 21\ldots \tag{8}$$

je normální při základu 10, srv. [37]; explicitní příklad normálního čísla není dosud znám.

Rekordní výpočty π jsou proto zpravidla doprovázeny tabulkami četnosti výskytu jednotlivých číslic a skupin číslic (dělává se i tzv. pocker-test, spočívající ve zkoumání frekvence výskytu dvojic, trojic, ..., tj. „pockerových skupin"). Přitom např. řetězec 0123456789 se v rozvoji vyskytne poprvé, napočteme-li více než 17 miliard míst[4]), a pro řetězec 27182818284, kterým začíná rozvoj čísla e, potřebujeme k objevení jeho prvního výskytu v rozvoji π více než 45 miliard míst. Frekvence výskytu číslic však ani při výpočtech s vysokou přesností nevykazuje abnormalitu vůči předpokládanému pravděpodobnostnímu rozdělení; např. na prvních 10 milionech míst se jednotlivé číslice $0,1,\ldots,9$ vyskytují v počtech: 999 440, 999 333, 1 000 306, 999 964, 1 001 093, 1 000 466, 999 337, 1 000 207, 999 814 a 1 000 040; viz [37], s. 67. Také zveřejněné výsledky posledního rekordního pokusu [23] nevykazují žádnou anomálii.

Pravděpodobnostní interpretace. Z geometrické pravděpodobnosti vyplývá, že volíme-li náhodně bod ve čtverci o délce strany 2, pak je pravděpodobnost, že jeho vzdálenost od středu čtverce je nejvýše 1, rovna $\pi/4$. Mnohem zajímavější je poměrně známý pokus, umožňující „experimentální" určení π. Jestliže náhodně házíme jehlu o délce L na vodorovnou rovinu, na níž je dána soustava nekonečně mnoha navzájem rovnoběžných přímek, z nichž každé dvě sousední mají vzdálenost $a > L$, pak pravděpodobnost, že jehla bude „protínat" jednu z přímek, je

$$\int_0^{2\pi} \frac{L\,|\cos\varphi|}{a}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} = \frac{2L}{\pi a}.$$

Tento výsledek určil GEORGES LOUIS LECLERC, COMTE DE BUFFON (1707–1788). Výsledek lze i zajímavě zobecnit; viz [34]. V [18] se připisuje idea využít k *určení* π experiment s jehlou R. WOLFOVI r. 1850. Poznamenejme, že údajně LAZZERINI r. 1901 na základě 31 080 opakování pokusu získal hodnotu π s přesností na 5 desetinných míst. Dokumentovaných pokusů tohoto typu je více; dnes máme možnost je modelovat na počítačích. V r. 1985 byl v časopise *Scientific American* popsán program tohoto typu, který vzbudil velikou pozornost čtenářů. Při asi 40 000 pokusech získávali čtenáři π s chybou až na třetím desetinném místě.

Nežli pokročíme dále, poznamenejme, že LEONHARD EULER (1707–1783) r. 1736 odvodil vzorec

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

---

[4]) Zde se objevuje zajímavá souvislost s intuicionistickou matematikou; srv. [39]. (Doplněno při korektuře.)

Řada vpravo konverguje rychleji než řada (2), avšak ani toto vyjádření se pro praktický výpočet π nehodí. Součet této řady, resp. jeho převrácená hodnota, se objevuje ve velmi zajímavých souvislostech.

Říkáme, že bod v rovině je viditelný z počátku, pokud uvnitř úsečky, která ho spojuje s počátkem, neleží žádný mřížový bod, tj. bod s oběma celočíselnými souřadnicemi. Pak lze jeden méně známý výsledek popsat takto: jestliže volíme v rovině náhodně mřížový bod, pak pravděpodobnost, že je vidět z počátku, je rovna $6/\pi^2$. V jiné formulaci lze říci, že pravděpodobnost, že náhodně vybraná dvě celá čísla jsou nesoudělná, je $6/\pi^2$. A ještě jeden příbuzný výsledek: pro pravděpodobnost $P(x)$, že náhodně vybrané přirozené číslo $n < x$ není dělitelné čtvercem nějakého prvočísla, je $P(x) = 6x/\pi^2 + O(\sqrt{x})$; viz [18].

Jiné algoritmy. Dalším, z teoretického hlediska velmi zajímavým algoritmem je zvláštní „tabulkový“ postup, pocházející z r. 1990. Jde o tzv. „spigot“ algoritmus Stanleye D. Rabinowitze a Stana Wagona, vyložený v článku [31][5]). Tento algoritmus je pomalý, avšak nepoužívá ***žádné operace v pohyblivé čárce***. Základem je následující pozorování:

$$\pi = \mathbf{3} + \frac{1}{10}\Bigl(\mathbf{1} + \frac{1}{10}\Bigl(\mathbf{4} + \frac{1}{10}\Bigl(\mathbf{1} + \frac{1}{10}\bigl(\mathbf{5} + \cdots\bigr)\Bigr)\Bigr)\Bigr).$$

Toto je vyjádření v bázi $\mathbf{b} = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \dots)$. V jiných bázích lze dostat zajímavá vyjádření, např. „periodický“ rozvoj e v bázi $\mathbf{d} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

$$\mathrm{e} = \mathbf{1} + \frac{1}{1}\Bigl(\mathbf{1} + \frac{1}{2}\Bigl(\mathbf{1} + \frac{1}{3}\Bigl(\mathbf{1} + \frac{1}{4}\bigl(\mathbf{1} + \cdots\bigr)\Bigr)\Bigr)\Bigr).$$

O takových bázích (ne o všech!) lze dokázat řadu tvrzení, jako např. o existenci a jednoznačnosti vyjádření apod. Podstata spigot algoritmu je v převodu vyjádření π v jedné speciální bázi $\mathbf{c} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots)$ do báze $\mathbf{b}$. Je totiž

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2\, 2^{n+1}}{(2n+1)!}, \tag{9}$$

což je speciální případ řady, se kterou jsme se již setkali. Ze vzorce (9) plynou rovnosti

$$\begin{aligned}\pi = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} &= 2\Bigl(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9} + \cdots\Bigr) = \\ &= \mathbf{2} + \frac{1}{3}\Bigl(\mathbf{2} + \frac{2}{5}\Bigl(\mathbf{2} + \frac{3}{7}\Bigl(\mathbf{2} + \frac{4}{9}\bigl(\mathbf{2} + \cdots\bigr)\Bigr)\Bigr)\Bigr),\end{aligned}$$

kde $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n$ pro lichá $n \in \mathbb{N}$. Vidíme, že π má v bázi $\mathbf{c}$ „periodický rozvoj“, tj. platí $\pi = (2{,}222\dots)_{\mathbf{c}}$. Převod do báze $\mathbf{b}$ se realizuje pomocí tabulky, která je grafickým zápisem spigot algoritmu. Algoritmem lze počítat rozvoj při ***libovolném*** základu g; srv. [7]. Poznamenejme, že vyjádření v bázi $\mathbf{d}$ je jednoznačné, nikoli však v bázi $\mathbf{c}$; podobně algoritmus pro výpočet e je jednodušší než pro π.

[5]) Velký anglicko-český slovník (K. Heis – B. Hodek) uvádí pod heslem *spigot* významy: 1 *kolíková zátka* do průduchu sudu; *čep*; 2 AM *pípa*; *kohoutek* atd. Volba názvu je v článku [31] objasněna.

Výpočet individuálních číslic. Jeden z nejpřekvapivějších výsledků se objevil v práci [4]. Algoritmus, myšlenka apod. se často označují BBP podle autorů, jimiž jsou DAVID BAILEY, Peter Borwein a SIMON PLOUFFE; výsledek je ze srpna r. 1995. Je založen na vzorci

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right). \tag{10}$$

Tento vzorec umožňuje snadno získat číslici na n-tém místě rozvoje π v *šestnáctkové* soustavě, avšak *bez počítání číslic jí předcházejících*. Zde je ještě jednodušší vzoreček tohoto typu, který je převzat z článku [2]:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3}\right).$$

Tam lze nalézt postup, jak takový vzorec pomocí programu *Mathematica* verifikovat. Všimněme si trochu blíže charakteru podobných vzorců. Vzorcům

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{1}{n}, \quad \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n}\frac{2/3}{2n+1}, \quad \log\frac{9}{10} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\frac{1}{n} \tag{11}$$

říkáme *jednočlenné*, neboť obsahují vždy jednu převrácenou hodnotu lineárního členu („v n“). První řada v (11) se dostane dosazením $x = \frac{1}{2}$ do Taylorova rozvoje funkce $\log(1-x)$ o středu 0 a je to „dvojkový rozvoj“. Druhá řada je „devítkový rozvoj“ a vznikne dosazením $x = \frac{1}{3}$ do Taylorova rozvoje funkce $\log\bigl((1+x)/(1-x)\bigr)$ o středu 0 a třetí lze opět odvodit z Taylorova rozvoje.

BBP vzorec (10) je tedy čtyřčlenný a jde „o šestnáctkový rozvoj“. Ukažme si nejprve, jak ho lze dokázat; viz např. [7]. Pro $k = 1, \dots, 8$ platí rovnosti

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{k-1+8n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+k)},$$

takže výraz v (10) vpravo lze upravit na tvar

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x.$$

Provedeme-li lineární substituci $y = \sqrt{2}\,x$ a rozložíme-li výsledek na parciální zlomky, dostaneme

$$\int_0^1 \frac{16y-16}{y^4-2y^3+4y-4}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{4y}{y^2-2}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{4y-8}{y^2-2y+2}\,\mathrm{d}y = \pi.$$

Nežli postup okomentujeme, všimněme si, jak lze k výsledku dospět pomocí programu *Mathematica*. Zápisu lze porozumět i bez znalosti tohoto programu. Položíme-li (imitujeme zde zápisem výstup z programu *Mathematica*)

```
f[k_]:=Sum[1/16^n(8n+k),{n,0,Infinity}]
g[k_]:=2^(k/2)Integrate[Sum[z^(k-1+8n),{n,0,Infinity}],
       {z,0,1/Sqrt[2]}]
h[k_]:=2^(k/2)Sum[Integrate[z^(k-1+8n),{z,0,1/Sqrt[2]}],
       {n,0,Infinity}],
```

je `f[k_]=g[k_]=h[k_]`. Druhá rovnost plyne z možnosti zaměnit pořadí součtu řady a integrálu, první získáme integrací:

```
2^(k/2)*Integrate[z^(k-1+8n),z]/.z->1/Sqrt[2]//Simplify

                   1
             -------------
               4n
              2   (k+8n)
```

Pro poslední část výpočtu se použije speciální soubor programů *SymbolicSum*. Příkaz *PowerExpand* umožní úpravu logaritmů, které posléze z vyjádření vymizí:

```
Needs["Algebra`SymbolicSum`"]
Simplify[PowerExpand[4g[1]-2g[4]-g[5]-g[6]]
                        Pi
```

Tím se dospěje ke vzorci (10). Zbývá popsat cestu, jak z (10) získat „číslice rozvoje v šestnáctkové soustavě", a odpovědět na otázku, jak na to mohli autoři přijít. Předně: popíšeme postup jen pro jediný v detailu probíraný případ BBP algoritmu a pak se pokusíme čtenáři přiblížit problematiku s trochou nadhledu; odtud bude zřejmější, jak lze takové věci objevit.

Výpočet číslic rozvoje z BBP. Připomeňme znovu, že v (10) jde o „čtyřčlenný šestnáctkový rozvoj", a popišme princip převodu prvního ze čtyř členů v (10), tj. členu

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{16^n(8n+1)}.$$

Máme-li nalézt k-tou číslici šestnáctkového rozvoje čísla S_1 nebo ještě dalších pět číslic za ní následujících, rozdělíme především „nekonečný součet" pro S_1 násobený číslem 16^k na dva sčítance

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{4 \cdot 16^{k-n}}{8n+1} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{4 \cdot 16^{k-n}}{8n+1}. \tag{12}$$

U prvního součtu lze čitatele zlomků nahradit menšími čísly $4 \cdot 16^{k-n} \bmod (8n+1)$, která se snadno počítají; výpočet těchto čísel je založen na algoritmu, který lze podle Donalda Knutha stopovat alespoň do doby cca 200 před n. l.; srv. [4]. Po určení několika číslic lomené části tohoto konečného součtu (potřebujeme např. jedno nebo šest platných míst) stačí ještě určit jednu (nebo šest) číslic lomené části druhého členu v (12), avšak již jen pro konečný počet několika prvních „větších" sčítanců. V [4] je schematicky popsán použitelný program; další podrobnosti o tom, jak lze takový „extraktor číslic" vytvořit pomocí programu *Mathematica*, jsou uvedeny v [1].

Experimentální matematika? Připomeňme, že v matematice se v „objevovací fázi" při řešení problému vždy experimentovalo. Experimentoval např. CHRISTIAN HUYGENS (1629–1695) a jeho pokusy vedly později k Rombergově metodě pro výpočet integrálů; viz [37], s. 67. Také ISAACA NEWTONA (1642–1727) dovedly k binomické řadě experimenty; viz [19], s. 79. Eulerovy výsledky o řadách, ať konvergentních či divergentních, měly mnohdy charakter experimentování a mnohá jeho tvrzení byla dokázána později. Jeho představy o (mocninných) řadách vedly k mnoha objevům z oblasti sčítacích metod, až posléze ke sčítacím metodám „fungujícím" v tzv. Mittag--Lefflerově hvězdě. V předchozím textu jsme okrajově připomněli Gaussovo experimentování s hypergeometrickou řadou; to je přitom pouze několik vybraných příkladů z oblasti analýzy.

Přechod k *počítačovým experimentům* je proto naprosto přirozený. Připomeňme „čtyři barvy" či stále více se uplatňující CAS (to je často užívaná zkratka pro Computer Algebra System, doslovný překlad termínu je však zavádějící), které se neustále zdokonalují. K ilustraci možností si vypůjčíme příklad z [6]. V dubnu r. 1993 začátečník, mladý student University of Waterloo ENRICO AU-YEUNG, upozornil na fakt, že počítačové experimenty naznačují, že čísla

$$A := \sum_{j=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{j}\Big)^2 j^{-2} \quad \text{a} \quad \frac{17\pi^4}{360}\ \Big(=\frac{17}{4}\zeta(4)\Big)$$

si jsou rovna. Podezření na možnou rovnost bylo založeno na součtu půl milionu členů[6]). Překvapivě se ukázalo, že k rovnosti těchto čísel dochází s přesností na 30 desetinných míst, a jak bylo později spočteno, dokonce na 100 desetinných míst. Zda opravdu platí rovnost, je možno s vysokou pravděpodobností rozhodnout pomocí tzv. PSLQ algoritmu; srv. [6] a [3][7]).

Tento algoritmus vyvinul v r. 1991 HELAMAN R. P. FERGUSON k rozpoznávání celočíselných identit; viz též [5]. Zhruba řečeno, je-li dán vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ reálných čísel, pak říkáme, že $\mathbf{x}$ vyhovuje celočíselné relaci, existuje-li netriviální lineární kombinace $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ s celočíselnými koeficienty $a_1, \dots, a_n$, která je rovna 0. Pokud jsou dány složky $\mathbf{x}$ s „dostatečnou přesností", algoritmus je schopen takovou celočíselnou relaci s vysokou pravděpodobností vyhledat, nebo nalézt meze, ve kterých taková kombinace *neexistuje*. Dnes je známa zjednodušená verze původního algoritmu, umožňující rozšíření na obor komplexních čísel. Uveďme příklady: označíme-li

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s \in (1,\infty),$$

$$S(m,n) := \sum_{j=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{j}\Big)^m (j+1)^{-n}, \quad m \geqq 1, \quad n \geqq 2,$$

[6]) Již Euler v korespondenci uvádí některé vztahy podobných součtů a funkce ζ, takže alespoň do jisté míry nejde o zcela „z nebe spadlou" domněnku.

[7]) Tento text podle recenze obsahuje popis PSLQ a historický komentář; nebyl autorům k dispozici.

byly tímto postupem „experimentálně“ získány přibližné rovnosti

$$S(2,2) \approx \frac{3}{2}\zeta(4) + \frac{1}{2}\zeta^2(2) = \frac{11\pi^4}{360}, \quad S(3,2) \approx \frac{15}{2}\zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3).$$

První byla později dokázána, takže $\approx$ lze nahradit rovností, druhá byla v době vzniku článku [15] (1995) stále jen hypotézou. Poznamenejme, že první rovnost zároveň dokazuje Au-Yeungovu domněnku, neboť z rovnosti pro $S(2,2)$ lze jednoduchou úpravou obdržet vztah A a součtů řad, které znal již Euler[8]).

Vrátíme-li se ke vzorci (10), lze tímto postupem zkoumat otázku, zda platí pro nějaká racionální čísla $a_0, \ldots, a_7$ rovnost

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{a_0}{8n} + \frac{a_1}{8n+1} + \frac{a_2}{8n+2} + \cdots + \frac{a_7}{8n+7}\right),$$

což po „snadné námaze“ pomocí PSLQ algoritmu vedlo k (10). Jak jsme již viděli, formuli, pokud ji již známe, není obtížné dokázat. Vzorce podobného typu (mají analogickou strukturu) byly stejným postupem nalezeny i pro π^2, $\log^2(2)$ atp.; podrobněji viz [4].

Jak vypadá „negativní výsledek“? Je známo, že platí

$$\zeta(2) = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\binom{2n}{n}\right)^{-1}, \quad \zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(n^3\binom{2n}{n}\right)^{-1},$$
$$\zeta(4) = \frac{36}{17}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4\binom{2n}{n}\right)^{-1},$$

což přirozeně vedlo některé matematiky k domněnce, že by mohla být hodnota

$$z_5 = \zeta(5) \Big/ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(n^5\binom{2n}{n}\right)^{-1}$$

racionální, eventuálně algebraické číslo. Pokud však tomu tak opravdu je a z_5 je kořenem algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty stupně nejvýše 25, pak (euklidovská) norma vektoru jeho koeficientů musí být větší než 2×10^{37}!

Má to smysl? Často se jako příklad uvádí, že znalost π s přesností na 40 desetinných míst stačí ke spočtení délky Mléčné dráhy s přesností větší, než je rozměr protonu. Přesto přesnější určení π není zcela samoúčelné. Již jsme se zmínili o Shanksově chybě ve výpočtu (mimochodem, věnoval mu 20 let svého života). Vznik podezření na anomálii vedl k odhalení chyby. V dnešní době se algoritmů pro výpočet hodnoty π na mnoho desetinných míst užívá k testování integrity softwaru a hardwaru apod.; srv. [18], s. 150. Např. r. 1986 tak byla odhalena chyba konstrukce prototypu počítače *Cray-2*.

---

[8]) Tento výsledek byl ve skutečnosti jen znovuobjeven, v článku [18] je připisován H. F. Sandhamovi.

Zvyšování přesnosti výpočtu π stimuluje také vývoj numerických metod: souvisí s ním přímo i objevení FFT, konstrukce rychlých algoritmů užitečných pro vysoce přesný výpočet celých *tříd* konstant a je jedním z faktorů intenzivního studia výpočetní složitosti a dalších otázek; viz [7], s. 55.

Nejnovější výsledky. Nedávno VICTOR ADAMCHIK a Stan Wagon ukázali v [1], že vzorec (10) je speciálním případem (netriviální) jednoparametrické formule, kde parametr probíhá všechna reálná i dokonce komplexní čísla, a pro nulovou hodnotu parametru dostaneme právě (10). Jejich výklad poodhaluje tajemství, jak se lze s programem *Mathematica* dobrat ke vzorcům podobného typu. Tak je možné např. získat rovnost

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{4+r}{4n+1} - \frac{3r}{4n+2} + \frac{r-4}{4n+3} + \frac{r}{4n+4}\Big)$$

platnou pro všechna reálná r. Tato jednoparametrická formule dává jakožto speciální případ pro $r = 0$ Leibnizovu řadu ze vztahu (2). Ke dni 21. 1. 1997 FABRICE BELLARD umístil na síť oznámení [9] o jiném podobném vzorci:

$$\pi = \frac{1}{2^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\Big(-\frac{2^5}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{2^8}{10n+1} - \\ - \frac{2^6}{10n+3} - \frac{2^2}{10n+5} - \frac{2^2}{10n+7} + \frac{1}{10n+9}\Big).$$

Tato formule umožňuje určení n-té číslice *binárního* rozvoje čísla π o cca 43 % rychleji než (10). Autor tyto vzorce odvozuje ze vzorců Machinova typu pomocí rozvojů v řadu. K 22. 9. 1997 pak zveřejnil rekord: 10^{12}-tá číslice *binárního* rozvoje π je '1'; viz [9]. Není již patrně těžké si představit, že lze takto získávat n-té číslice dvojkového, čtyřkového a šestnáctkového rozvoje π. Vzniká problém, zda lze analogicky získávat číslice dekadického rozvoje. Plouffe zveřejnil na síti k 30. 11. 1996 postup, kterým lze získat bez počítání předchozích číslic n-tou číslici *dekadického* rozvoje π. Východiskem je pro něj vzorec

$$\pi + 3 = \sum_{n=1}^{\infty} n2^n\binom{2n}{n}^{-1};$$

srv. [12], s. 385. Příslušný „extraktor" číslic umožňuje výpočet n-té číslice rozvoje při libovolné bázi (řešení není specifické pro dekadické vyjádření). Tento postup je však zajímavý spíše teoreticky než prakticky. Poznamenejme, že se nic netvrdí o neexistenci nebo existenci „lepšího" postupu. Vadou na kráse je totiž fakt, že zatímco BBP algoritmus je *časově* nenáročný, neboť na výpočet n-tého místa rozvoje potřebujeme $O(n\log n)$ času, Plouffeho algoritmus (po Bellardově zlepšení) potřebuje $O(n^2)$ času; viz [30]. Problém existence jednoduššího algoritmu je stále otevřen. Souvisí s možností vyjádření π ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty}\big(P(n)/Q(n)\big)10^{-n}$, kde P, Q jsou polynomy s koeficienty ze $\mathbb{Z}$.

Náročnost výpočtu. Panuje domněnka, že výpočet číslice na n-tém místě rozvoje π není ve skutečnosti snazší než výpočet všech prvních n číslic. Soudí se, že z hlediska výpočetní složitosti to je velmi pravděpodobné, i když to bude velmi obtížné dokázat; srovnej s úvodní částí [4]. Algoritmus BBP je tak srovnatelný s nejlepšími algoritmy pro výpočet π a jiných tzv. ***polylogaritmických konstant.*** Ty souvisejí s funkcí definovanou pro $|z| < 1$ vztahem

$$L_m(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^m}.$$

BBP algoritmus je typu „$O(n)$ v čase a $O(\log n)$ v požadavcích na paměť". Stačí tedy mít nepříliš výkonnou pracovní stanici a není třeba implementovat speciální aritmetiku (s libovolnou přesností); srv. [4].

Uveďme několik základních fakt, i když jen v informativní rovině. Použijeme toto označení: třída SC značí možnost výpočtu n-tého místa v $n^{O(1)}$ čase a při užití $\log^{O(1)}(n)$ „paměťového prostoru". Třída SC* je trochu odlišná: žádá se polynomiálně logaritmický prostor a skoro lineární čas ve smyslu $O\big(n \log^{O(1)}(n)\big)$. Není známo, zda dělení či změna báze je možná v SC a v SC* se to neví dokonce ani o násobení. Algoritmus a metoda BBP ukazují, že π *ve dvojkové bázi* leží v SC*, neboť celočíselné lineární kombinace prvků (v téže bázi g) z SC* leží v SC* a v SC* leží všechna $x \in \mathbb{R}$ vyjádřitelná ve tvaru

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n) g^{cn}},$$

kde P je polynom „v n" s koeficienty ze $\mathbb{Z}$ a $c \in \mathbb{Z}$. Kromě π leží ve třídě SC* (ve dvojkové soustavě) např. π^2, $\log^2(2)$ a $\log(k)$, a to pro $k \in \{1, 2, \ldots, 22\}$. Je zajímavé, že autoři v době vzniku [4] nevěděli dokonce ani to, zda log(23) leží alespoň v SC. V desítkové soustavě jsou zatím výsledky podstatně horší. Podle tabulky, kterou vystavuje na síti Plouffe na adrese [30], v *dvojkové* soustavě leží vzhledem k výpočtu n-tého místa v čase π, π^2 i $\log 2$ ve třídě $O(n \log n)$, ale analogický výsledek pro ***desítkovou*** soustavu zatím „umisťuje" π a π^2 do $O(n^2)$ a o $\log 2$ není v tomto směru dosud nic známo. Další otevřené problémy lze nalézt např. v [4] na konci článku.

Otevřený konec? Snažili jsme se ukázat, že experimentování není v matematice novou věcí, ačkoliv možnost užívat počítače tuto skutečnost dramaticky mění: matematika se stále více „experimentalizuje".

Popišme ještě jeden konkrétní „matematický experiment", který by byl bez počítačů prakticky neproveditelný: jeho smysl není v dokázání či vyvrácení domněnky, ale spíše v ukázání v jednom či druhém směru. Již jsme se zmínili o Champernowneově čísle (8); kromě něj není explicitní příklad v matematice se „přirozeně" vyskytujícího normálního čísla o jednom základu znám[9]).

[9]) J. G. Chaitin normální číslo konstruuje pomocí metod teorie pravděpodobnosti a ztotožnění celých čísel s binárními řetězci reprezentujícími Turingův stroj; viz [15].

Autoři [15] si položili tyto dvě otázky: (1) Jsou všechna algebraická iracionální čísla normální v dekadické soustavě? a (2) Musí mít všechna tato čísla stejnoměrně rozložené číslice? Prověřili dekadické rozvoje druhých a třetích odmocnin[10]) o délce 10 000 míst přirozených čísel od 1 až do 1000 a podrobili je statistickým testům. Výsledek byl trochu zarážející: asymptotická rovnoměrnost rozložení číslic v rozvoji byla lepší, než vyplývá z teoretických úvah. Proto provedli druhý pokus s délkou 20 000 míst a odchylka od teoretických úvah se zmenšila natolik, že přestala být zajímavou. Autoři podrobně popisují testy, které byly použity, např. i ke zjištění spolehlivosti implementovaných CAS, nenašli však žádný důkaz proti domněnce o normalitě čísel z uvažované třídy. A tak domněnka zůstala domněnkou, byť možná „pravděpodobnější".

Závěr? *Experimentální matematika je ta část matematiky, která se zabývá v rámci matematické komunity zpřístupňováním a popularizací chápání matematických idejí s využitím experimentálního zkoumání (...) domněnek, nedokázaných plauzibilních tvrzení a pečlivou analýzou nahromaděných dat* (definice z [15]). Experimentální matematika žije a je nutno s ní reálně počítat, neboť prokazuje nalézáním nových cenných výsledků svoji užitečnost. A pokud jde o číslo π, ukazuje se, jak ošidné by bylo předčasně uzavírat zdánlivě „mrtvou" problematiku. K zajímavým výsledkům lze dospět i v problematice staré několik tisíciletí.

Literatura

[1] ADAMCHIK, V., WAGON, S.: π*: A 2000-year-old search changes direction.* Mathematica in Education and Research *5* (1996), 11–19 (text článku lze nalézt v elektronické podobě na URL adrese `<http://www.wolfram.com/~victor/articles/pi/pi.html>`).

[2] ADAMCHIK, V., WAGON, S.: *A simple formula for* π. Amer. Math. Monthly *104* (1997), 852–855.

[3] BAILEY, D. H.: *A polynomial time, numerically stable integer relation algorithm.* NAS Technical Report Server (RNR-91-032, December 1991).

[4] BAILEY, D. H., BORWEIN, P. B., PLOUFFE, S.: *On the rapid computation of various polylogarithmic constants.* Math. Comp. *66* (1997), 903–913.

[5] BAILEY, D. H., FERGUSON, H. R. P.: *Numerical results on relations between fundamental constants using a new algorithm.* Math. Comp. *53* (1989), 649–656 (*).

[6] BAILEY, D. H., PLOUFFE, S.: *Recognizing numerical constants.* Organic mathematics (Burnaby, BC, 1995), CMS Conf. Proc. *20* (1977), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 73–88 (preprint z r. 1995).

[7] BAILEY, D. H., BORWEIN, J. M., BORWEIN, P. B., PLOUFFE, S.: *The quest for Pi.* Math. Intelligencer *19* (1997), no. 1, 50–57.

[8] BECKMANN, P.: *Historie čísla* π. Academia, Praha 1998 (překlad 5. vydání z r. 1982).

[9] BELLARD, F.: `<http://www-stud.enst.fr/~bellard/pi-challenge/index.html>` a dále `<http://www-stud.enst.fr/~bellard/pi-challenge/announce220997.html>`.

[10] BERGGREN, L., BORWEIN, J. M., BORWEIN, P. B.: π*: A source book.* Springer, New York 1997.

[11] BORWEIN, J. M., BORWEIN, P. B.: *The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions.* SIAM Rev. *26* (1984), 351–366 (*).

---

[10]) S vyloučením čtverců, resp. třetích mocnin.

[12] Borwein, J. M., Borwein, P. B.: *Pi and the AGM: A study in analytic number theory and computational complexity.* John Wiley & Sons, New York 1987.

[13] Borwein, J. M., Borwein, P. B.: *Ramanujan and Pi.* Science and applications; Supercomputing *88,* Vol. II (1988), 112–117 (*).

[14] Borwein, J. M., Borwein, P. B., Dilcher, K.: π, *Euler numbers and asymptotic expansion.* Amer. Math. Monthly *96* (1989), 681–687 (*).

[15] Borwein, J. M., Borwein, P. B., Girgensohn, R., Parnes, S.: *Making sense of experimental mathematics.* Math. Intelligencer *18* (1996), no. 4, 12–18 (preprint s názvem „Experimental mathematics: a discussion“ z r. 1995 je k dispozici na serveru CECM, viz [23]).

[16] Borwein, J. M., Borwein, P. B., Bailey, D. H.: *Ramanujan, modular equations, and approximations to Pi or How to compute one bilion digits of Pi.* Amer. Math. Monthly *96* (1989), 201–219 (*).

[17] Brent, R. P.: *Fast multiple-precision evaluation of elementary functions.* J. Assoc. Comput. Mach. *23* (1976), 242–251 (*).

[18] Castellanos, D.: *The ubiquitous* π. Math. Magazin *61* (1988), 67–98 a 149–163.

[19] Goldstine, H. H.: *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century.* Springer, New York 1977.

[20] Hančl, J.: *Two proofs of transcendency of* π *and* e. Czech. Math. Journal *35* (1985), 543–549.

[21] Iwamoto, Y.: *A proof that* π^2 *is irrational.* J. Osaka Inst. Sci. Tech. *1* (1949), 147–148.

[22] Jarník, V.: *Diferenciální počet I.* Academia, Praha 1984 (6. vydání).

[23] Kanada, Y.: `<ftp://www.cc.u-tokyo.ac.jp/readme.our_latest_record>` (lze také nalézt na adrese `<http://cecm.sfu.ca/personal/jborwein/Kanada_50b.html>`).

[24] Kořínek, V.: *Základy algebry.* NČSAV, Praha 1953.

[25] Knopp, K.: *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen.* Springer, Berlin 1924.

[26] Niven, I.: *A simple proof that* π *is irrational.* Bull. Amer. Math. Soc. *53* (1947), 509 (*).

[27] Novák, B.: *O sedmém Hilbertově problému.* Pokroky MFA *17* (1972), 245–256.

[28] Novák, B.: *A remark to a paper of J. F. Koksma.* Nieuw Arch. voor Wiskunde *23* (1975), 195–197.

[29] Novák, B.: *Vybrané kapitoly z teorie čísel.* SPN, Praha 1972.

[30] Plouffe, S.: `<http://www.lacim.uqam.ca/ploufe/Simon/results.html>`.

[31] Rabinowitz, S. D., Wagon, S.: *A spigot algorithm for the digits of* π. Amer. Math. Monthly *103* (1995), 195–203.

[32] Ramanujan, S.: *Modular equations and approximations to* π. Quart. J. Math. *45* (1914), 350–372.

[33] Salamin, E.: *Computation of* π *using arithmetic-geometric mean.* Math. Comp. *30* (1976), 565–570 (*).

[34] Taylor, S. J.: *Pravidelnost náhodnosti.* Pokroky MFA *25* (1980), 28–34 (překlad).

[35] Veselý, J.: π *aneb 3,14159...* Učitel matematiky *3* (15), *4* (16) (1995), 1–10 a 1–13.

[36] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele.* Matfyzpress, vydavatelství MFF UK, Praha 1997.

[37] Wagon, S.: *Is Pi normal?* Math. Inteligencer *7* (1985), no. 3, 65–67 (*).

[38] Williams, R.: `<http://www.ccsf.caltech.edu/~roy/pi.formulas.html>`.

[39] Borwein, J. M.: *Brouwer-Heyting sequence converge.* Math. Intelligencer *20* (1998), no. 1, 14–15.

Články označené v seznamu literatury hvězdičkou (*) jsou přetištěny v [10].