Jozef Moravčík

Medzinárodná matematická olympiáda 1971

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 16 (1971), No. 6, 319--331

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137645`

MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 1971

V ZNAMENÍ TRINÁSTKY

(Reportáž o XIII. medzinárodnej matematickej olympiáde)

JOZEF MORAVČÍK, Žilina

Každé rozprávanie o tohtoročnej MMO, ktoré si chce robiť aspoň aké — také nároky na presnosť, musí začať jarou 1969, keď sa v predsedníctve ÚVMO z iniciatívy jeho predsedu doc. VYŠÍNA zrodil nápad usporiadať r. 1971 pravidelné stretnutie mladých matematických nádejí honosiace sa názvom „medzinárodná matematická olympiáda" v ČSSR. Podnetom k tomuto nápadu bolo nielen to, že v poradí usporiadateľov prichádzala naša krajina znovu na rad (v Československu sa uskutočnila IV. MMO r. 1962), ale hlavne skutočnosť, že na jar 1971 sa mal zavŕšiť jubilejný XX. ročník našej domácej matematickej olympiády. Od myšlienky k jej realizácii býva veľmi často cesta neľahká a inak tomu nebolo ani tentoraz. Nasledovala korešpondencia s MŠ ČSR i MŠ SSR, predbežný súhlas predovšetkým toho druhého a kuloárne zoznámenie účastníkov XI. MMO v Bukurešti s týmto úmyslom vedením našej delegácie. Keďže táto neoficiálna informácia sa u vedúcich zahraničných delegácií stretla so sympatiami, bolo na mieste podniknúť ďalšie kroky.

Na návrh ÚVMO menovalo MŠ SSR (po dohode s MŠ ČSR) prípravný výbor XIII. MMO, ktorý pod vedením akad. ŠTEFANA SCHWARZA zahájil svoju činnosť v júni 1970. Na jeho práci sa podieľali predovšetkým RNDr. LADISLAV BERGER, odb. asistent katedry matematiky a deskript. geometrie fakulty SET VŠD v Žiline ako tajomník, a s. ústr. škol. inšpektor MICHAL ZÖLDY ako zástupca MŠ SSR, ktoré prijalo náročnú úlohu usporiadateľa súťaže, pretože IV. MMO sa konala celá na území dnešnej ČSR (Juhočeský kraj a Praha). Ďalej v ňom pracovali akad. JOSEF NOVÁK (podpredseda), ústr. škol. inšpektor JAROSLAV LÁNIK (MŠ ČSR), VALÉRIA BARAČKOVÁ (ÚV SZM), prof. dr. MIROSLAV FIEDLER, DrSc. (MÚ ČSAV v Prahe), dr. JÁN GATIAL, CSc. (EF SVŠT v Bratislave), prof. dr. MICHAL GREGUŠ, DrSc. nám. min. školstva SSR, doc. dr. MILAN HEJNÝ, CSc. (PFUK v Bratislave), prof. dr. MILAN KOLIBIAR, DrSc. (PFUK v Bratislave), dr. JOZEF MORAVČÍK, CSc. (F-SET VŠD v Žiline), doc. JAN VYŠÍN, CSc. (F. mat.-fyz. KU v Prahe) a dr. FRANTIŠEK ZÍTEK, CSc. (MÚ ČSAV v Prahe). Až prvé úspešné kroky účinkovania tohto orgánu, medzi ktorými nechýbalo, samozrejme, zostavenie predbežného návrhu programu i rozpočtu celého podujatia, umožnili, aby na XII. MMO v Maďarsku odznelo z úst vedúceho čsl. delegácie doc. Vyšína oficiálne pozvanie pre všetky prítomné delegácie. Tým však pre prípravný výbor a jeho spolupracovníkov ešte len začali tie hlavné starosti (zostaviť štatút XIII. MMO, rozoslať pozvánky, zabezpečiť ubytovanie, atď., atď.), ktoré vyvrcholili začiatkom júla 1971, kedy sa však už z neho stal z jedného dňa na druhý výbor organizačný.

Vedúci delegácií 15 štátov (včítane ČSSR), ktoré prijali pozvanie, sa schádzali do slovenskej metropoly rôznymi dopravnými prostriedkami (od lietadla cez rýchlik až po osobný automobil) v stredu 7. 7. Niektorým to trvalo o poznanie dlhšie, pretože na zahajovacej večeri, ktorú poriadal minister školstva SSR s. prof. Ing. ŠTEFAN CHOCHOL, CSc., chýbali ešte zástupcovia štyroch krajín, z ktorých síce vedúci delegácií Bulharska, NDR a Rumunska prišli už na nasledujúci deň, ale vedúci francúzskej delegácie prof. WARUSFEL sa stretol so svojimi kolegami z medzinárodnej jury až 11. 7. večer v Žiline. Prišiel tak o cestu autokarom z Bratislavy na Tále za horúceho popoludnia 8. 7. i trojdňový pobyt v hoteli Partizán, ktorý sa stal domovom jury počas prvej časti spoločnej práce. Zastávku v Banskej Bystrici využili účastníci presunu na prehliadku expozícií pamätníka SNP a ešte vo štvrtok večer sa zišli na prvom zo série zasadnutí, kde im členovia komisie pre úlohy (M. Fiedler, M. Hejný, J. Vyšín, F. Zítek) rozdali pripravené materiály. Komisii prišlo celkom 55 úloh z 11 krajín (úlohy neposlalo Mongolsko a Francúzsko, rumunský delegát ich priniesol až na zasadnutie jury a ako je to na MMO tradičné, nenavrhla úlohy ani ČSSR ako usporiadateľ). Z tematicky pestrej palety problémov — od elementárnej číselnej teórie cez dôkazy nerovností, sústavy rovníc, rôznorodé partie geometrie až po číselné tabuľky ponášajúce sa na matice — vybrala a starostlivo spracovala 17, ktoré členovia jury dostali s presnými a pomerne elegantnými riešeniami. Ako sa neskôr ukázalo, táto skutočnosť značne ovplyvnila celú prácu jury v nádhernom prírodnom prostredí, v ktorom nechýba ani umelé jazierko lákavé hlavne v prekrásnom počasí, aké panovalo po celý čas tamojšieho pobytu, a vtisla vlastne svoju pečať celej olympiáde. Členov jury totiž výber komisie a najmä elegancia ňou upravených autorských riešení značne ovplyvnili a tak z ich zdĺhavého rokovania, v ktorom značnú časť zabrala formulácia vybraných úloh v rokovacích jazykoch, vzišiel napokon tento seriál orieškov, na ktorých si malo lámať zuby 115 riešiteľov z 15 zemí (v zátvorke je uvedená krajina, z ktorej úloha pochádza a počet bodov, ktorý za jej úplné riešenie jury prisúdila):

ÚLOHY PRE PRVÝ DEŇ SÚŤAŽE

1. Dokážte, že tvrdenie:

„Pre ľubovoľné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je splnená nerovnosť

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n) + \ldots +$$
$$+ (a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}) \geqq 0\text{“}$$

je pravdivé pre $n = 3$ a $n = 5$ a nie je pravdivé pre žiadne iné prirodzené $n > 2$. (Maďarsko, 5 bodov).

2. Nech je daný konvexný mnohosten P_1, ktorý má práve deväť vrcholov: $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Označme P_i, $i = 2, 3, \ldots, 9$ mnohosten, ktorý sa dostane z P_1 rovnobežným posunutím, pri ktorom sa bod A_1 premiestni do bodu A_i, $i = 2, 3, \ldots, 9$.

Dokážte, že aspoň dva z mnohostenov $P_1, P_2, \ldots, P_9$ majú aspoň jeden spoločný vnútorný bod. (ZSSR, 7 bodov.)

3. Dokážte, že postupnosť $\{2^n - 3\}$ ($n = 2, 3, 4, \ldots$) obsahuje nekonečne mnoho čísel, z ktorých každé dve sú nesúdeliteľné. (Poľsko, 9 bodov.)

ÚLOHY PRE DRUHÝ DEŇ SÚŤAŽE

4. Všetky steny štvorstena $ABCD$ sú ostrouhlé trojuholníky. Uvažujme o všetkých uzavretých lomených čiarach $XYZTX$, ktoré sú definované nasledujúcim spôsobom:

X je bod hrany AB rôzny od A aj od B. Analogicky Y, Z, T sú vnútorné body hrán BC, CD, DA v uvedenom poradí.

Dokážte, že

a) ak $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CDA \neq 0$, potom medzi týmito lomenými čiarami nejestvuje najkratšia;

b) ak $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CDA = 0$, potom existuje nekonečne mnoho lomených čiar minimálnej dĺžky a táto dĺžka je rovná $2 . AC . \sin \alpha/2$, kde $\alpha = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB$. (Holandsko, 6 bodov.)

5. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m existuje neprázdna konečná množina S bodov v rovine s tou vlastnosťou, že ku každému bodu $A \in S$ existuje v S práve m bodov, ktorých vzdialenosť od A sa rovná jednej. (Bulharsko, 7 bodov.)

6. Uvažujme o štvorcovej tabuľke

$$\begin{array}{l} a_{11}a_{12} \;\cdots\; a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \;\cdots\; a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2} \;\cdots\; a_{nn}\,, \end{array}$$

ktorá je zostavená z nezáporných celých čísel a vyhovuje nasledujúcej podmienke: ak $a_{ij} = 0$, potom platí nerovnosť

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} \geqq n\,.$$

Dokážte, že pre súčet s všetkých čísel tabuľky platí: $s \geqq \frac{1}{2}n^2$. (Švédsko, 8 bodov.)

Na riešenie každej trojice úloh mali súťažiaci štyri hodiny čistého času. Pre väčšinu z nich sa pripravené oriešky ukázali viac než tvrdé a ako súbor nevhodné pre takúto súťaž. Špeciálne to možno povedať o úlohách 3 a 6, ktorých riešenie sa ponáša na otváranie trezoru — vnikne do neho len ten, kto príde na heslo. Svedčí o tom napokon aj fakt, že hoci prvú z nich s plným bodovým ziskom vyriešilo 17 a druhú 12 riešiteľov, všetci riešitelia spolu získali za 3. úlohu len 194 bodov z 1035 možných, t. j. cca 19%, a za 6. úlohu dokonca len 157 z 920 možných bodov čiže necelých 18%. Pre porovnanie uveďme, že 1. úlohu riešilo úplne 18 riešiteľov a celkový zisk bol

49% bodov (284 z 575), 2. úlohu riešili s plným ziskom 14 a všetci získali 222 z 805 (28%) možných bodov. Najmenej kompletných riešení zaznamenala 4. úloha — len 9, pretože väčšina riešiteľov zabúdala na využitie konvexnosti plášťa a dôkaz existencie minimálnej lomenej čiary, ale celkový bodový zisk bol 39% (269 zo 690), zatiaľ čo 5. úloha skončila síce tiež len s bodovým ziskom 28% (225 z 805), ale kompletných riešení bolo pri nej najviac — 25.

Takéto výsledky, aké nezaznamenala žiadna z predchádzajúcich olympiád, by len poverčivý mohol vysvetľovať poradovým číslom a tým, že slávnostné zahájenie, na ktorom okrem predsedu jury akad. Schwarza prehovoril tiež nám. min. školstva SSR prof. Greguš, a prvý súťažný deň pripadli na 13. 7.

Vráťme sa však k súťažným „orieškom" a pre čitateľa, ktorý je príliš pohodlný sám skúšať ich tvrdosť alebo si chce skonfrontovať výsledky svojho snaženia, uveďme ich (niekde mierne upravené) autorské riešenia:

RIEŠENIE 1. ÚLOHY

Pre $n = 3$ má ľavá strana danej nerovnosti tvar

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2),$$

z ktorého po vynásobení a jednoduchej úprave dostaneme pre každú trojicu a_1, a_2, a_3 reálnych čísel:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3 = \tfrac{1}{2}[(a_1 - a_2)^2 + \\ + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2],$$

čo je zrejme číslo nezáporné.

Pre $n = 5$ dostávame na ľavej strane uvažovanej nerovnosti výraz

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) + \\ + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) + (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + \\ + (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4),$$

ktorý je zrejme symetrický vzhľadom na čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, t. j. nezmení sa, ak v ňom ľubovoľné dve z nich navzájom zameníme. Môžeme preto predpokladať, že platí napr.:

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq a_4 \geqq a_5.$$

V tomto prípade však je

$$a_1 - a_2 = -(a_2 - a_1) \geqq 0, \quad a_1 - a_3 \geqq a_2 - a_3 \geqq 0, \quad a_1 - a_4 \geqq a_2 - a_4 \geqq 0, \\ a_1 - a_5 \geqq a_2 - a_5 \geqq 0,$$

takže platí

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + \\ + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) \geqq 0.$$

Analogickým spôsobom dostaneme, že tiež

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) +$$
$$+ (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4) \geqq 0 \, .$$

Pretože súčin

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)$$

je súčinom dvoch nekladných a dvoch nezáporných činiteľov, je tiež nezáporný, z čoho už vyplýva správnosť dokazovaného tvrdenia aj v tomto prípade.

K tomu, aby sme ukázali nesprávnosť daného tvrdenia pre všetky ostatné prirodzené $n > 2$, stačí nájsť n-ticu reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tak, že uvažovaná nerovnosť nebude pre ne splnená.

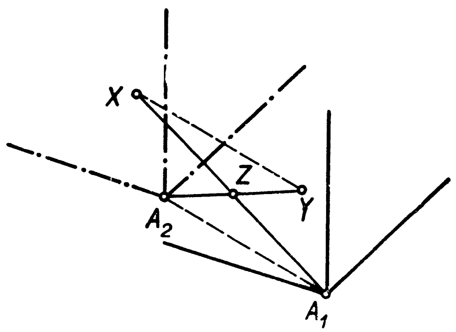
Pre $n = 4$ má túto vlastnosť každá štvorica čísel, pre ktorú platí: $a_1 = a_2 = a_3 > a_4$, pretože pre ňu má ľavá strana nerovnosti hodnotu $(a_4 - a_1)^3$, čo je zrejme číslo záporné.

Pre $n \geqq 6$ stačí zvoliť napr. $a_1 = a_2 = a_3 > a_4 > a_5 = \ldots = a_n$ v prípade párneho n a $a_1 = a_2 = a_3 < a_4 < a_5 = \ldots = a_n$ v prípade nepárneho n, pretože vtedy má ľavá strana nerovnosti hodnotu $(a_4 - a_1)^3 (a_4 - a_5)^{n-4}$, čo je zrejme v oboch prípadoch záporné číslo.

RIEŠENIE 2. ÚLOHY

Označme P' mnohosten, ktorý dostaneme z mnohostenu P_1 pri rovnoľahlosti H so stredom A_1 a s koeficientom 2. Dokážeme, že pre každé P_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$ platí $P_i \subset P'$.

Pre $i = 1$ je toto tvrdenie zrejmé. Ak je X ľubovoľný bod mnohostena P_i, $i = 2, 3, \ldots, 9$, zvoľme $Y \in P_1$ tak, že X je obrazom Y pri rovnobežnom posunutí, pri ktorom sa bod A_1 premiestni do bodu A_i. Potom však úsečky A_1X, A_iY majú zrejme spoločný stred Z (pozri obr. 1).



Obr. 1.

Z konvexnosti mnohostena P_1 však vyplýva, že úsečka A_iY leží celá v P_1, teda $Z \in P_1$, a preto $X \in P'$ ako obraz bodu Z pri rovnoľahlosti H.

Označme $V(P)$ obsah mnohostena P. Zrejme platí $V(P_1) = V(P_2) = \ldots = V(P_9)$, $V(P') = 2^3 V(P_1) = 8V(P_1)$. Ak by žiadne dva z mnohostenov P_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$ nemali spoločný vnútorný bod, muselo by na základe vyššie dokázaného platiť

$$9V(P_1) = V(P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_9) \leqq V(P') = 8V(P_1) \, ,$$

čo je spor.

RIEŠENIE 3. ÚLOHY

Tvŕdenie dokážeme zostrojením vybranej postupnosti s uvedenou vlastnosťou použitím matematickej indukcie. Predpokladajme, že každé dve z prirodzených čísel

(1) $$a_1 = 2^{n_1} - 3, a_2 = 2^{n_2} - 3, \ldots, a_k = 2^{n_k} - 3,$$

kde $2 = n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ sú nesúdeliteľné a zostrojme číslo $a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$ nesúdeliteľné s každým z čísel (1) nasledujúcim spôsobom:

Označme $s = a_1 a_2 \ldots a_k$. Spomedzi $s + 1$ čísel $2^0, 2^1, \ldots, 2^s$ možno vždy vybrať aspoň dve také, ktoré pri delení číslom s majú rovnaký zvyšok. Nech sú to 2^α, 2^β ($\alpha > \beta$). Potom však platí

(2) $$2^\alpha - 2^\beta = p \,.\, s \quad (p \text{ — prir. číslo}).$$

Z (2) dostaneme $(2^{\alpha-\beta} - 1)\, 2^\beta = p \,.\, s$, z čoho, vzhľadom na to, že s je číslo nepárne, vyplýva, že $2^{\alpha-\beta} - 1$ je ním deliteľné čiže

(3) $$2^{\alpha-\beta} - 1 = q \,.\, s \quad (q \text{ — prir. číslo}).$$

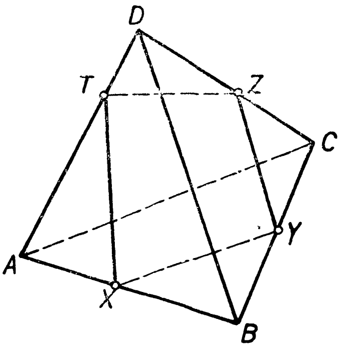
Na základe (3) dostaneme

$$2^{\alpha-\beta+2} - 3 = 4 \,.\, 2^{\alpha-\beta} - 3 = 4(qs + 1) - 3 = 4qs + 1 \,.$$

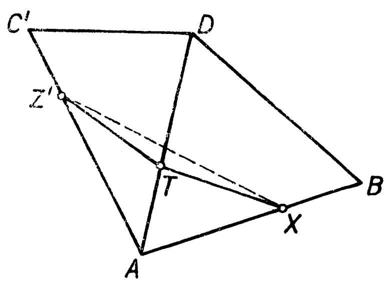
Stačí teda vziať $n_{k+1} = \alpha - \beta + 2$, $a_{k+1} = 4qs + 1$. Keďže zrejme platí $a_{k+1} > a_k$, je tiež $n_{k+1} > n_k$ a celú konštrukciu môžeme neohraničene opakovať.

RIEŠENIE 4. ÚLOHY

a) Predpokladajme, že napr. body X, Y, Z sú pevne zvolené na úsečkách AB, BC, CD (pozri obr. 2). Ak trojúholník ACD sklopíme do roviny ABD (obr. 3), hneď vidíme, že súčet dĺžok $ZT + TX$ možno zmenšiť zmenou polohy bodu T, ak platí $\sphericalangle ATX \neq \sphericalangle ZTD$.



Obr. 2.



Obr. 3.

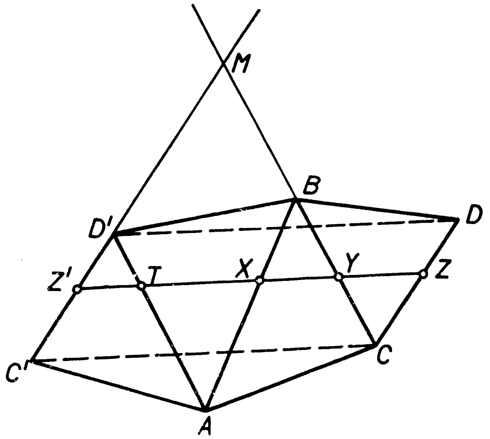
Z tejto úvahy vyplýva, že ak existuje lomená čiara minimálnej dĺžky, potom musia byť splnené nasledujúce nutné podmienky:

$$\sphericalangle DAB = \pi - \sphericalangle ATX - \sphericalangle AXT,$$
$$\sphericalangle ABC = \pi - \sphericalangle BXY - \sphericalangle BYX = \pi - \sphericalangle AXT - \sphericalangle CYZ,$$
$$\sphericalangle BCD = \pi - \sphericalangle CYZ - \sphericalangle CZY,$$
$$\sphericalangle CDA = \pi - \sphericalangle DTZ - \sphericalangle DZT = \pi - \sphericalangle ATX - \sphericalangle CZY,$$

z čoho hneď dostaneme

(1) $$\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CDA = 0\,.$$

b) Nech teraz platí (1). Rozrežme povrch štvorstena $ABCD$ pozdĺž hrán AC, CD a DB a rozviňme ho do roviny. Dostaneme rovinný útvar $\mathscr{P} = AC'D'BDC$ zložený z trojuholníkov $AC'D'$, ABD', ABC, BCD, ktoré sú všetky podľa predpokladu ostrouhlé. Z toho vyplýva, že $\mathscr{P}$ je konvexným šesťuholníkom a ďalej, že priamky CB, $C'D'$ sú rôznobežné a pretínajú sa v nejakom bode M (obr. 4). Zo štvoruholníka $ABMD'$ však vzhľadom na (1) dostaneme hneď, že $\sphericalangle BMD' = \sphericalangle BCD$, čo znamená, že úsečky CD a $C'D'$ sú rovnobežné a súhlasne orientované. Rovnobežník $CDD'C'$ leží zrejme celý vo vnútri šesťuholníka $\mathscr{P}$.



Obr. 4.

Každej úsečke ZZ' rovnobežnej s CC' (a teda aj s DD') odpovedá lomená čiara $XYZTX$ minimálnej dĺžky. Z rovnoramenného trojuholníka ACC' vyplýva, že jej dĺžka je $2 \,.\, AC \,.\, \sin \alpha/2$.

RIEŠENIE 5. ÚLOHY

Pre $m = 1$ je takou množinou S dvojbodová množina s bodmi, ktorých vzdialenosť je 1. Nech $m \geqq 2$ je dané prirodzené číslo. Matematickou indukciou podľa m sa ľahko ukáže, že v rovine existuje systém $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vektorov týchto vlastností ($|\mathbf{v}|$ znamená dĺžku vektora $\mathbf{v}$):

(1) $$|\mathbf{v}_i| = \tfrac{1}{2}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,;$$

(2) $$0 \neq |c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m| \neq \tfrac{1}{2}$$

pre ľubovoľné čísla $c_1, c_2, \ldots, c_m$, ktoré nadobúdajú len niektorú z hodnôt $-1, 0, 1$, ale aspoň dve z nich sú rôzne od nuly.

Ukážeme, že požadované vlastnosti má množina S pozostávajúca z 2^m bodov, ktorú možno popísať takto:

Ak B_0 je ľubovoľný bod danej roviny, potom do množiny S patria všetky body B určené predpisom

$$B = B_0 + \varepsilon_1\mathbf{v}_1 + \varepsilon_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \varepsilon_m\mathbf{v}_m\,,$$

kde $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Z (1) a (2) vyplýva, že ak nejaký bod $A \in S$ (prislúcha mu určitá kombinácia znamienok $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \ldots, \tilde{\varepsilon}_m$), potom v S existuje práve m bodov, ktorých vzdialenosť od A sa rovná jednej. Sú to práve tie body, pre ktoré príslušná kombinácia znamienok sa líši od $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \ldots, \tilde{\varepsilon}_m$ práve na jednom mieste.

RIEŠENIE 6. ÚLOHY

Utvorme súčty všetkých čísel v jednotlivých riadkoch a v jednotlivých stĺpcoch a označme p najmenší z týchto súčtov. Ak $p \geqq n/2$, potom pre súčet s všetkých čísel tabuľky zrejme platí

$$s \geqq np \geqq \tfrac{1}{2}n^2$$

a tvrdenie je pravdivé.

Nech teraz $p < n/2$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že práve prvý riadok má súčet p a práve čísla na prvých q miestach v ňom sú rôzne od nuly. Potom však súčet čísel v posledných $n - q$ stĺpcoch sa rovná aspoň $(n - p)(n - q)$, zatiaľ čo súčet všetkých čísel v prvých q stĺpcoch bude najmenej pq. Platí teda

$$s \geqq (n - p)(n - q) + pq = n^2 - n(p + q) + 2pq =$$
$$= \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}(n - 2p)(n - 2q) > \tfrac{1}{2}n^2 ,$$

pretože $n > 2p \geqq 2q$.

K vlastnej súťaži zostáva dodať, že prebiehala v dňoch 13. a 14. 7. v modernej a účelne zariadenej budove Strednej priemyselnej školy stavebnej v Žiline, ktorá bola od 12. do 17. 7. aj sídlom jury. Vo vestibule školy bola inštalovaná vkusná, i keď rozsahom neveľká, výstavka „20 rokov matematickej olympiády v ČSSR".

Členovia jury sa pri svojej práci stretávali so všestrannou pozornosťou riaditeľstva školy i technického štábu olympiády, ktorý pod vedením dr. Bergera pozostával prevažne z pracovníkov Katedry matematiky a deskriptívnej geometrie fakulty SET VŠD v Žiline. Po opravách žiackych riešení, ktoré bolo tentoraz pre väčšinu vedúcich delegácií a ich zástupcov nie veľmi radostným „rozptýlením", nasledovala nezbytná koordinácia hodnotení. Tou bol poverený kolektív matematikov z našich vysokých škôl a vedeckých ústavov pod vedením F. Zítka.

(Jednotlivé úlohy koordinovali: 1. — J. Jarník a A. Kuffner, 2. — L. Bukovský a J. Rohn, 3. — A. Vrba a F. Zítek, 4. — J. Černý a M. Hejný, 5. — M. Franek a B. Riečan, 6. — J. Gruska, a P. Liebl.) Až na menšie nedorozumenia s vedením rumunskej delegácie, ktorých riešenie pripravilo jury o tri hodiny času na poslednom zasadnutí, sa koordinátori zhostili svojej úlohy s úspechom a k všeobecnej spokojnosti. Hodnotenia riešení československých žiakov koordinovali — ako to v prípade usporiadajúcej krajiny býva zvykom — vedúci delegácií, ktoré navrhli jednotlivé úlohy.

Posledné zasadnutie jury v piatok 16. 7. popoludní malo prológ v už spomenutom riešení sporu s vedúcim rumunskej delegácie. Zdĺhavosť rokovania, ktoré si vyžiadalo dokonca vytvorenie subkomisie, ovplyvnila už tradične neľahké rozhodovanie o stanovení hraníc bodov pre I., II. a III. cenu. Len únavou členov jury sa dá totiž vysvetliť to, že sa po siahodlhých diskusiách, zamietnutı návrhov na udelenie IV. ceny, resp. pochvalného uznania väčšina z nich pred pol treťou ráno 17. 7. priklonila pri hlasovaní k návrhu, aby III. cena bola už od 11 bodov (v minulosti bola vždy dolná hranica pre udelenie cien stanovená v blízkom okolí polovice dosažiteľného počtu bodov). Potom sa už veľmi rýchle dohodli pre dolnú hranicu I., resp. II. ceny čísla 35, resp. 23, čo znamenalo, že jury udelila 7 prvých, 12 druhých a 29 tretích cien. Tak aj napriek nezvyčajne nízkej dolnej hranici pre udelenie cien len 48 zo 115 účastníkov bolo odmenených, čo je zrejme najlepším svedectvom o tom, aké úskalia pripravila jury za svojho pobytu na Táloch nič netušiacim olympionikom. Veľa času tentoraz nezabralo ani schválenie návrhov na udelenie zvláštnych cien za eleganciu riešení, resp. zovšeobecnenie úloh. Boli udelené za 2. úlohu tri a za 3.a 4. úlohu po jednej zvláštnej cene. Z toho dve (za 2. a 3. úlohu) dostal nesporne najlepší účastník XIII. MMO — maďarský žiak RUZSA IMRE, ktorý jediný získal maximálny možný počet — 42 bodov. Za 1., 5. a 6. úlohu nebola zvláštna cena udelená.

Skôr, než necháme prehovoriť čísla a tabuľky, žiada sa povedať ešte aspoň niekoľko slov o spoločenskej stránke olympiády. Okrem miest už spomenutých mohli sa vedúci delegácií počas presunu do Žiliny 11. 7. pokochať krásou Nízkych Tatier pri prechode sedačkovým výťahom z Tálov do Jasnej a obdivovať kvapľovú výzdobu Demänovskej jaskyne slobody. V pondelok 12. 7. popoludní sa zoznámili s nefalšovanou krásou Vrátnej doliny a pri vrcholovej stanici výťahu na Chleb spomenuli pamiatku RUDOLFA ZELINKU, dlhoročného obetavého tajomníka ÚVMO a účastníka niekoľkých MMO, ktorý v máji 1965 v týchto miestach nečakane podľahol následkom angíny pectoris. V utorok 13. 7. zbierali sily na opravu a koordináciu v Bojniciach a po vykonaní zodpovednej práce a namáhavom zasadnutí jury sa v sobotu 17. 7. zotavovali výletom do Vysokých Tatier, ktorých panorámou sa nadchýňali pohľadom z Lomnického štítu a na spiatočnej ceste do Žiliny si mali možnosť prezrieť i legendárny Areál snov na Štrbskom Plese.

Žiaci, ktorí sa pod vedením zástupcov vedúcich delegácií poschádzali do Bratislavy v priebehu soboty 10. 7. (i tu však dve delegácie prišli skôr a práve toľko sa ich oneskorilo), sa počas nedeľného (11. 7.) autokarového presunu do Žiliny zastavili na prehliadku Piešťan a Trenčína. Na súťaž sa aklimatizovali výletom do Bojníc (12. 7.) a čerstvé dojmy neúspechu (aspoň u väčšiny z nich) im pomáhali vo štvrtok 15. 7. zahnať patronátne závody zo žilinského, považskobystrického a martinského okresu vzornou celodennou starostlivosťou i venovaním suvenírov.*) Tradičný výlet olympionikov trval tentoraz dva dni (16. a 17. 7.) a žiaci počas neho navštívili Strečno, Martin, Dolný Kubín, Oravský zámok, Ružomberok, Lipt. Mikuláš, Demänovskú jaskyňu slobody, Svit, Poprad (nocľah), Tatranskú Lomnicu, Starý Smokovec s výstupom na Hrebienok a k vodopádom, Štrbské Pleso s prehliadkou Areálu snov a Podbanské.

Značnú pozornosť venovali olympiáde štátne a politické orgány mesta a okresu Žilina i Stredoslovenského kraja. Na Táloch usporiadal 9. 7. večeru pre členov jury Stredoslovenský KNV reprezentovaný svojím podpredsedom ing. BALÁŽOM, 14. 7.

*) Forma patronátov sa objavila na MMO po prvý raz vďaka iniciatíve a obetavosti dr. Bergera a chvályhodnému porozumeniu podnikov a vedúci zahraničných delegácií ju nezabudli veľmi kladne oceniť vo svojich vystúpeniach.

večer zasa OVSZM v Žiline zorganizoval v menze VŠD stretnutie olympionikov so žilinskou mládežou a večer 15. 7. prijali vedúcich delegácií a ich zástupcov predstavitelia okresu a mesta Žilina na čele s predsedom ONV s. ing. PERKOVIČOM, rektorom VŠD s. prof. ing. PONCOM a predsedom MsNV s. dr. KOVÁČIKOM.

V nedeľu 18. 7. popoludní sa všetci účastníci XIII. MMO so Žilinou definitívne rozlúčili a rýchlikom odcestovali do hlavného mesta Slovenska, kde sa už pripravovalo slávnostné zakončenie. Pred záverečnou slávnosťou však ešte prijal vedúcich delegácií a ich zástupcov prof. Greguš i rektor Univerzity Komenského prof. HURAJ, a žiaci si pod patronátom SÚVSZM prehliadli pamätihodnosti Bratislavy. Všetci sa potom o 14,00 hod. za prítomnosti oficiálnych hostí, zástupcov tlače i širokej verejnosti zišli v aule UK, aby dali slávnostnú bodku za týmto — nazdávam sa, že i pri skromnosti to možno povedať — vydareným podujatím. Po zahájení slávnosti akad. Schwarzom odovzdal podpredseda jury s. akad. Novák diplomy odmeneným žiakom, ktorých zároveň obdarovali hodnotnými vecnými cenami väčšinou venovanými podnikmi zo žilinskej oblasti. V krátkom oficiálnom prejave vyzdvihol prof. Greguš význam matematiky a MMO a poďakoval všetkým, ktorí prispeli ku zdaru XIII. MMO. Za zúčastnených žiakov sa s dejiskom olympiády rozlúčil Ruzsa Imre, ktorého bez preháňania možno nazvať jej absolútnym víťazom, ako to urobila denná tlač, inak ovšem prinášajúca o XIII. MMO nie celkom presné informácie. V mene zahraničných hostí sa organizátorom poďakoval v peknej slovenčine vedúci poľskej delegácie doc. MĄKOWSKI, ktorý to najdôležitejšie zo svojho prejavu — pozvanie všetkých delegácií na XIV. MMO r. 1972 do Poľska — zopakoval ešte i po rusky a po anglicky. Účastníci slávnosti sa rozchádzali za zvukov priliehavého Gaudeamus igitur, aby sa posledný raz stretli večer pri tabuli so slávnostnou večerou poriadanou ÚV SZM zhodou okolností pod tou istou strechou, kde sa presne pred 12 dňami uskutočnilo prvé stretnutie vedúcich delegácií.

Ešte by sa dalo toho povedať veľa o matematickej i spoločenskej stránke našej olympiády, ako sme ju iste nie neprávom nazývali, ale čitatelia sú už iste zvedaví na neoficiálne poradie jednotlivých družstiev, počty získaných cien, číselné výsledky nášho družstva a hádam i zloženie jury, preto dajme aspoň na chvíľu slovo štatistike.

Najskôr teda poradie štátov s dosiahnutými počtami bodov, ktoré je však skreslené tým, že švédske družstvo bolo tentoraz len sedemčlenné a družstvo Kuby, ktorá sa na MMO zúčastnila po prvý raz, dokonca len štvorčlenné*):

1.	Maďarsko (H)	255	9.	ČSSR (CS)	55
2.	ZSSR (SU)	205	10.	Holandsko (NL)	48
3.	NDR (D)	142	11.	Švédsko (S)	43
4.	Poľsko (PL)	118	12.	Bulharsko (BG)	39
5.	Veľká Británia (GB)	110	13.	Francúzsko (F)	38
6.	Rumunsko (R)	110	14.	Mongolsko (M)	26
7.	Rakúsko (A)	82	15.	Kuba (C)	9
8.	Juhoslávia (YU)	71			

*) Kompletné družstvo na MMO pozostáva z 8 žiakov.

A teraz dve tabuľky, ku ktorým si komentár urobí iste každý sám:

Tabuľka 1.

Cena \ Štát	A	BG	C	CS	D	F	GB	H	M	NL	PL	R	S	SU	YU
I.	—	—	—	—	1	—	—	4	—	—	1	—	—	1	—
II.	—	—	—	—	1	—	1	4	—	—	—	1	—	5	—
III.	4	—	—	1	4	—	4	—	—	2	4	4	2	2	2

Tabuľka 2.

Číslo	Žiak čsl. družstva	Trieda, škola Miesto	Počet bodov dosiahnutých za riešenia úloh						Súčet počtu bodov	Cena
			1	2	3	4	5	6		
1	Jan Brychta	3. gymn. Praha	4	3	0	3	0	1	11	III.
2	Anton Černý	3. SVŠ Bratislava	3	0	0	4	1	0	8	—
3	Ján Francŭ	3. SVŠ Bratislava	3	1	0	5	0	0	9	—
4	Karel Horák	2. gymn. Strakonice	4	0	0	2	0	0	6	—
5	Helena Husová	3. SVVŠ Praha	2	1	0	0	1	0	4	—
6	Miroslav Kmošek	2. gymn. Brno	2	0	0	5	0	0	7	—
7	Štefan Sakáloš	3. SVŠ Prievidza	2	0	0	6	0	0	8	—
8	Imrich Vrťo	2. gymn. Rim. Sobota	1	0	0	0	1	0	2	—
Súčet počtu bodov	—	—	21	5	0	25	3	1	55	

Z druhej tabuľky vidno, že naši žiaci sa ako-tak vyporiadali len s 1. a 4.úlohou. Faktom je, že družstvo bolo oslabené o 3 z úspešných riešiteľov III. kola MO, ktorí dali prednosť atraktívnejšej ceste do Sofie na V. medzinárodnú fyzikálnu olympiádu, ale po pravde treba priznať, že asi ani tí by neboli pomohli k úspešnejšiemu využitiu domáceho prostredia. Príčina neúspechov nášho družstva je hlbšia a budú sa ňou musieť zaoberať predovšetkým školské orgány. Veľmi užitočné rozhovory s vedúcimi zahraničných delegácií ukázali, že prakticky vo všetkých štátoch, ktoré skončili v neoficiálnom poradí pred nami (až snáď na Rakúsko a Veľkú Britániu), majú dobre fungujúce matematické skoly s rozšírenou (niekde až dvojnásobnou) výmerou hodín matematiky, na ktorých učia najlepší stredoškolskí i vysokoškolskí učitelia matematiky. Práve z týchto škôl sa grupovala väčšina členov vybraných družstiev, ktoré naviac absolvovali pred cestou do ČSSR minimálne 14-denné sústredenie. Naše 3 školy so špeciálnymi triedami a 6-denné sústredenie družstva v Brandýse n. L. koncom júna s tým možno zrejme ťažko porovnávať.

V zložení jury nedošlo v porovnaní s minulým rokom k prevratným zmenám, ako ukazuje nasledujúci prehľad:

1. Akademik Štefan Schwarz, predseda
2. Akademik Josef Novák, podpredseda

   Vedúci delegácií zúčastnených štátov:
3. Thomas Mühlgassner, prof. reál. gymnázia, Eisenstadt, A.
4. Kiril Dočev, docent Mat. fakulty univerzity v Sofii, BG.
5. Luis Davidson, inšpektor Ministerstva školstva v Havane, C.
6. Dr. Jozef Moravčík, CSc, Vysoká škola dopravná v Žiline, CS.
7. Dr. hab. Helmut Bausch, prof. vysokej školy v Berlíne, D.
8. Andre Warusfel, profesor lycea Louis le Grand, Paríž, F.
9. Frank Budden, profesor Royal Grammar School, Newcastle, BG.
10. Endre Hódi, techn. poradca Maď. opt. závodov v Budapešti, H.
11. Uržincerendijn Sanžimjatov, Mongolská štátna univerzita Ulanbátor, M.
12. Ary van Tooren, inšpektor str. skôl, Haag, NL.
13. Andrzej Mąkowski, docent matematického ústavu univerzity vo Varšave, PL.
14. Nicolae Mihaileanu, mat. ústav univerzity v Bukurešti, R.
15. Kjell-Ove Widman, matematický ústav univerzity v Uppsale, S.
16. Valentin Anatoljevič Skvorcov, docent MGU v Moskve, SU.
17. Vladimír Mićić, matematický ústav univerzity v Belehrade, YU.

Rozprávanie o „našej“ olympiáde by som nemohol považovať za úplné, ak by som nepoznamenal, že v čase, keď väčšina delegácií bola už na ceste domov (20. 7. predpoludním), sa zišiel na svojom poslednom sedení organizačný výbor, aby si spytoval svedomie a zvážil klady i zápory svojej činnosti. Nazdávam sa (i keď ako jednému zo zainteresovaných by mi bolo možné upierať nestrannosť), že i napriek drobným zaškrípaniam, ktorým sa sotva dá vyhnúť pri organizovaní podujatia takého rozsahu, mohol byť spokojný a právom vysloviť poďakovanie neúnavnému dr. Bergerovi, ktorého vynaliezavosť a organizačné schopnosti, veľmi dobre známe mnohým členom JČSMF, sa opäť výrazne potvrdili, i desiatkam ďalších nadšencov, ktorí neľutovali námahu a čas na to, aby zahraniční hostia olympiády odchádzali spokojní a s nezmazateľnými spomienkami na našu vlasť.

Dobrá vec sa podarila, i keď radosť kazí neveľmi chýrne účinkovanie nášho družstva. Zostáva však nádej, že po serióznom rozbore príčin a zlepšení podmienok prípravy sa i naše výpravy budú vracať z MMO obťažkané cenami. Kiež by tomu mohlo tak byť už pri návrate z tej poľskej!

A. D. ALEXANDROV:

Ostrost dřívějších sporů mezi různými směry v matematice se jeví přehnanou, podíváme-li se na ně ze širšího hlediska. Existují různé úrovně abstrakce, různé úrovně přesnosti a dokonce rozličné logické systémy; je zde přesnost na úrovni inženýra, fyzika, obyčejného či vytříbeného matematika a nakonec specialisty v matematické logice. Avšak ani tato nejvyšší úroveň není nic absolutního. Při obvyklém výkladu základů geometrie na universitách je Eukleidova axiomatika líčena jako nedostačující a Hilbertova axiomatika jako ideální. To však není oprávněné, protože u Hilberta se vychází z intuitivního množinověteoretického hlediska, které se samo stalo předmětem kritiky a jehož základy musely být teprve objasňovány. Stejnou naivitou se vyznačuje rozšířený zvyk hovořit o dokonalé přesnosti universitního kursu analýzy a vyjadřovat se pohrdavě o kursu analýzy pro inženýry nebo o analýze epochy Eulera. Ovšemže přesnost na úrovni Weierstrasse-Cantora, obvyklá v nynějších kurzech analýzy, je vyšší než přesnost Eulerova; že je větší u Hilberta než u Eukleida. Všechno jsou to ale pouhé stupně v rozvoji přesnosti matematiky.

O VYUČOVÁNÍ VOLITELNÉ MATEMATICE V SSSR

JIŘÍ VÁŇA, Ostrava

Ve školním roce 1970/1971 bylo v SSSR zahájeno vyučování matematice ve 4. ročníku střední všeobecně vzdělávací školy (děti ve věku 10 let) podle nových osnov. Bylo pro to vynaloženo velké úsilí. Ještě během let 1967—1970, kdy již byla schválena předběžná verze osnov, probíhaly práce na učebnicích. Byly ověřovány v pokusném vyučování v různých oblastech SSSR. Definitivní osnova je vždy schvalována současně s příslušnou učebnicí.

V nových osnovách se i nadále požaduje vytváření pevných, v mnoha případech automatizovaných početních návyků. Současně s tím se však zvyšují nároky na obecnost výkladu učiva, zdůrazňují se obecné principy, na jejichž základě je předmět