Heinz Bauer

Aproximace a abstraktní hranice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 26 (1981), No. 6, 305--326

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138002

Aproximace a abstraktní hranice*)

Heinz Bauer, Erlangen - Norimberk

Úvod: Weierstrassova a Korovkinova věta o aproximaci

Weierstrassova věta o aproximaci polynomy bývá obvykle uváděna jako typický zástupce mnoha vět o aproximaci. Věta říká, že pro každou spojitou reálnou funkci f na kompaktním intervalu $[a, b]$ na reálné ose $\mathbf{R}$ existuje posloupnost (p_n) reálných polynomů (jedné proměnné), která konverguje k f stejnoměrně na $[a, b]$. Z mnoha důkazů této věty si vybereme takový, v němž je aproximující posloupnost (p_n) explicitně definována pomocí polynomů zavedených S. Bernštejnem.

Stačí uvažovat jednotkový interval $[0, 1] \subset \mathbf{R}$. Pro spojitou funkci f a $n = 1, 2, \ldots$ je n-tý Bernštejnův polynom definován předpisem

$$p_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k} . \tag{1}$$

Odchýlíme se od původního Bernštejnova důkazu [8] a ověříme tvrzení Weierstrassovy věty o aproximaci pro tři velmi jednoduché funkce: konstantní funkci 1, funkci $f(x) = x$, kterou budeme značit id (= identita) a pro její druhou mocninu id^2, tj. funkci $f(x) = x^2$. Pomocí binomické věty a jednoduchého výpočtu dostaneme pro každé $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{gathered} p_n^1 = 1 ; \\ p_n^{\mathrm{id}} = \mathrm{id} ; \\ p_n^{\mathrm{id}^2} = \frac{1}{n}\,\mathrm{id} + \frac{n-1}{n}\,\mathrm{id}^2 . \end{gathered} \tag{2}$$

Tyto rovnosti dokazují, že pro každou ze tří funkcí $f = 1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^2$ konverguje posloupnost (p_n^f) stejnoměrně k f na $[0, 1]$.

Podle jedné Korovkinovy věty (viz [15], [16]) – tzv. věty o třech funkcích – tímto jednoduchým testem je okamžitě dokončen důkaz stejnoměrné konvergence (p_n^f) k f pro každou spojitou reálnou funkci. Abychom to objasnili, musíme vhodně interpretovat posloupnost polynomů (p_n^f) v kontextu lineárního prostoru $\mathscr{C}([0, 1])$ všech spojitých reálných funkcí na $[0, 1]$. Pro každé přirozené číslo n přiřazujeme funkci f polynom p_n^f a tím dostáváme zobrazení

---

*) Heinz Bauer: *Approximation and abstract boundaries.* American Mathematical Monthly Vol. *85*, No. 8, October 1978, pp. 632—647. Přeložili Ivan Netuka a Jiří Veselý.

$$(3) \qquad B_n : \mathscr{C}([0, 1]) \to \mathscr{C}([0, 1])$$

prostoru $\mathscr{C}([0, 1])$ do $\mathscr{C}([0, 1])$. Tedy pro $f \in \mathscr{C}([0, 1])$ nabývá B_n hodnotu $B_n f = p_n^f$, tedy n-tý Bernštejnův polynom odvozený od funkce f. Z definice (1) je ihned vidět, že B_n je dokonce lineární, a je to tedy *lineární operátor* na $\mathscr{C}([0, 1])$, který je navíc také *nezáporný*. To znamená, že každá nezáporná funkce $f \in \mathscr{C}([0, 1])$ se zobrazuje na nezápornou funkci $B_n f$. Po této interpretaci naší původní situace lze aplikovat Korovkinovu větu o třech funkcích, aby se tak náš test stal důkazem Weierstrassovy věty o aproximaci. Máme na mysli větu, kterou zformulujeme přesněji:

První Korovkinova věta. *Nechť $[a, b]$ je kompaktní interval v $\mathbf{R}$ a nechť (L_n) je posloupnost nezáporných lineárních operátorů L_n na prostoru $\mathscr{C}([a, b])$. Předpokládejme, že posloupnost $(L_n f)$ konverguje k f stejnoměrně pro tři testovací funkce $f = 1$,* id, id^2. *Potom $(L_n f)$ konverguje k f stejnoměrně na $[a, b]$ pro všechny funkce $f \in \mathscr{C}([a, b])$.**)

Větu lze rychle dokázat pomocí triku. Každá funkce $f \in \mathscr{C}([a, b])$ je omezená; existuje tedy γ tak, že

$$|f(x)| \leqq \gamma \quad \text{pro všechna} \quad x \in [a, b].$$

Funkce f je dále stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in [a, b]$ platí

$$|x - y| \leqq \sqrt{\delta} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqq \varepsilon,$$

neboli

$$(x - y)^2 \leqq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqq \varepsilon.$$

Trik spočívá v tom, že píšeme $\sqrt{\delta}$ na místě, kde obvykle stojí δ. To vede pro každé dva body $x, y \in [a, b]$ k nerovnosti

$$|f(x) - f(y)| \leqq \varepsilon + \alpha(x - y)^2,$$

kde $\alpha = 2\gamma\delta^{-1}$, což se hned odvodí uvážením případů $(x - y)^2 \leqq \delta$ a $(x - y)^2 > \delta$. Máme tedy pro každé $y \in [a, b]$ tuto nerovnost:

$$|f - f(y)| \leqq \varepsilon + \alpha(\mathrm{id} - y)^2.$$

Protože operátor L_n je lineární a nezáporný**), vyplývá odtud

---

*) Obraz funkce f při zobrazení L_n značíme $L_n f$, zatímco $L_n f(x)$ znamená hodnotu funkce $L_n f$ v bodě x. Na druhé straně $L_n(f(x))$ je obraz konstantní funkce $f(x)$ při zobrazení L_n, tedy z linearity plyne $L_n(f(x)) = f(x)\, L_n 1$.

**) Každý nezáporný lineární operátor $L : \mathscr{C}([a, b]) \to \mathscr{C}([a, b])$ je *neklesající*, neboť pro $f, g \in$

$$|L_n f - f(y)\, L_n 1| \leqq \varepsilon L_n 1 + \alpha(L_n \mathrm{id}^2 - 2y L_n \mathrm{id} + y^2 L_n 1) \,.$$

Po dosazení $x = y$ dostáváme

$$|L_n f - f L_n 1| \leqq \varepsilon L_n 1 + \alpha(L_n \mathrm{id}^2 - 2\mathrm{id} L_n \mathrm{id} + \mathrm{id}^2 L_n 1) \,.$$

Z předpokladu o $(L_n f)$ pro tři funkce $f = 1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^2$ a z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že funkce $L_n f$ konvergují stejnoměrně k f. Dokonce dostáváme explicitně odhad pro supremovou normu

$$\|L_n f - f\| = \sup_{x \in [a,b]} |L_n f(x) - f(x)| \,,$$

pokud jsou známy odhady pro tři testovací funkce. Tak je tomu se zřetelem na (2) i v případě původní posloupnosti operátorů (B_n).

Je zcela přirozené, že Korovkinova věta vedla ke snaze o hlubší pochopení role, jakou hraje zmíněný test pomocí tří funkcí. Výše uvedený důkaz, založený na chytrém užití stejnoměrné spojitosti, nedává však například odpověď na řadu otázek. Lze nahradit tři funkce 1, id, id^2 jinými testovacími funkcemi? Vystačí se se dvěma testovacími funkcemi? Existuje podobná věta ve vyšších dimenzích?

Abychom takové otázky mohli přirozeným způsobem zodpovědět, odvodíme a podrobíme rozboru zobecněnou verzi první Korovkinovy věty.

1. Testovací prostor a odpovídající afinní funkce

Otázky, o nichž jsme se zmínili, budeme vyšetřovat v kontextu dostatečně širokém pro zajímavé aplikace. Kompaktní interval $[a, b]$ nahradíme libovolným *kompaktním metrickým prostorem* X.*)Množina $\{1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^2\}$ původních tří testovacích funkcí bude nahrazena libovolnou (konečnou nebo nekonečnou) podmnožinou $\mathscr{T}$ lineárního prostoru $\mathscr{C}(X)$ spojitých reálných funkcí na X. (Všechny funkce z $\mathscr{C}(X)$ jsou omezené, neboť X je kompaktní.) O množině $\mathscr{T}$ budeme pouze předpokládat, že obsahuje konstantní funkci:

(4) $$1 \in \mathscr{T} \,.^{**)}$$

$\in \mathscr{C}([a, b])$) nerovnost $f \leqq g$ implikuje $g - f \geqq 0$, tedy $Lg - Lf = L(g - f) \geqq 0$ neboli $Lf \leqq Lg$. Speciálně je nerovnost $|Lf| \leqq L|f|$ důsledkem nerovností $-|f| \leqq f \leqq |f|$, kde $|g|$ je funkce $x \mapsto |g(x)|$.

*) Nezkušený čtenář by si za X měl vybrat např. omezenou uzavřenou podmnožinu prostoru $\mathbf{R}^p$, $p = 1, 2, \ldots$. Většina následujících úvah platí dokonce pro libovolné kompaktní topologické prostory.

**) Po formální stránce by bylo slabší předpokládat existenci kladné testovací funkce $t_0 \in \mathscr{T}$. Následující transformace převádí tento případ na situaci vyšetřovanou nahoře. Volme $\mathscr{T}^* = \{(t/t_0);\ t \in \mathscr{T}\}$ jako novou množinu testovacích funkcí a každý lineární operátor $L : \mathscr{C}(X) \to \mathscr{C}(X)$ nahraďme lineárním operátorem L^* definovaným rovností

$$L^* f = (1/t_0)\, L(t_0 f) \,.$$

Množinu $\mathscr{T}$ budeme nazývat množina *testovacích funkcí* nebo *testovací množina*.

Posloupnost $(L_n)_{n=1,2,\dots}$ nezáporných lineárních operátorů

$$L_n : \mathscr{C}(X) \to \mathscr{C}(X)$$

se nazývá *$\mathscr{T}$-přípustná*, jestliže posloupnost $(L_n t)$ konverguje k t stejnoměrně na X pro všechny testovací funkce $t \in \mathscr{T}$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n t - t\| = 0 \quad \text{pro všechna} \quad t \in \mathscr{T}\ ; \tag{5}$$

zde

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

je tzv. supremová norma omezené reálné funkce na X. Funkce $f \in \mathscr{C}(X)$ se nazývá *Korovkinova funkce* (vzhledem k $\mathscr{T}$), jestliže posloupnost $(L_n f)$ konverguje k f stejnoměrně na X pro všechny $\mathscr{T}$-přípustné posloupnosti (L_n) nezáporných lineárních operátorů na $\mathscr{C}(X)$.

Pomocí těchto definic lze hlavní problémy, které chceme v tomto článku vyšetřovat, formulovat takto:

Problém 1. *Které funkce $f \in \mathscr{C}(X)$ jsou Korovkinovy funkce vzhledem k dané testovací množině $\mathscr{T}$?*

Problém 2. *Za jakých podmínek kladených na $\mathscr{T}$ jsou všechny funkce $f \in \mathscr{C}(X)$ Korovkinovy funkce?*

Na základě linearity operátorů L_n si hned povšimneme, že každá lineární kombinace

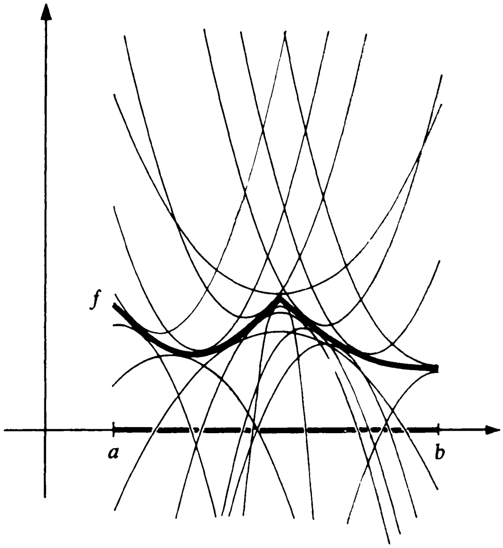
$$h = \lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_k t_k \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R})$$

testovacích funkcí $t_1, \dots, t_k \in \mathscr{T}$ je Korovkinova funkce pro $\mathscr{T}$. Trojúhelníková nerovnost totiž dává pro všechna n

$$\|L_n h - h\| \leqq |\lambda_1|\ \|L_n t_1 - t_1\| + \dots + |\lambda_k|\ \|L_n t_k - t_k\|\ . \tag{6}$$

Všechny funkce z lineárního obalu lin $\mathscr{T}$ množiny $\mathscr{T}$ jsou tedy Korovkinovy funkce. Poznamenejme ještě, že „Korovkinova funkce vzhledem k $\mathscr{T}$" a „Korovkinova funkce vzhledem k lin $\mathscr{T}$" znamená pro případ funkce z $\mathscr{C}(X)$ totéž. V dalším nazýváme lin $\mathscr{T}$ *testovací prostor* příslušný testovací množině $\mathscr{T}$.

Jako odpověď na problém 2 bychom očekávali, že $\mathscr{T}$ nebo lin $\mathscr{T}$ by měly být „dostatečně velké". Měli bychom se tedy snažit měřit „velikost" $\mathscr{T}$ nebo lin $\mathscr{T}$. V případě Korovkinovy věty se $\mathscr{T}$ rovná $\{1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^2\}$, tedy lin $\mathscr{T}$ je množina všech reálných polynomů $x \mapsto \alpha + \beta x + \gamma x^2$ stupně $\leqq 2$. Jako lineární prostor dimenze 3 je lin $\mathscr{T}$ malý podprostor prostoru $\mathscr{C}([a, b])$. Ale lin $\mathscr{T}$ je velký v tom smyslu, že libovolná funkce $f \in \mathscr{C}([a, b])$, je infimem všech funkcí $h \in$ lin $\mathscr{T}$, pro něž $h \geqq f$ a supremem všech funkcí z lin $\mathscr{T}$ ležících pod f. Z geometrického názoru je to přijatelné. Je třeba si povšimnout, že grafem polynomu $x \mapsto \alpha + \beta x + \gamma x^2$ stupně 2 (tj. $\gamma \neq 0$) je parabola s osou symetrie rovnoběžnou s y-ovou osou.



Obr. 1.

Jak dále uvidíme, právě toto chování zasahuje do samotné podstaty problému a vede k adekvátnímu pojmu dostatečné velikosti množiny $\mathscr{T}$. K vysvětlení tohoto konstatování budeme definovat pro každou funkci $f \in \mathscr{C}(X)$ dvě obecně nespojité funkce f^* a f_* na X tak, že položíme pro každé $x \in X$

$$f^*(x) = \inf \{h(x) \,;\; h \geqq f,\; h \in \operatorname{lin} \mathscr{T}\}\,, \tag{7}$$
$$f_*(x) = \sup \{h(x) \,;\; h \leqq f,\; h \in \operatorname{lin} \mathscr{T}\}\,.$$

Tato definice má smysl, neboť f je omezená na kompaktním metrickém prostoru X a v důsledku (4) jsou konstantní reálné funkce prvky lin $\mathscr{T}$. Platí

$$f_* \leqq f \leqq f^*\,. \tag{8}$$

Supremová norma $\|f^* - f_*\|$ nezáporné funkce $f^* - f_*$ v jistém smyslu měří, jak dobře či jak špatně se f přizpůsobuje „tvaru" funkcí z testovacího prostoru lin $\mathscr{T}$.

Příklad 1. Uvažujme situaci jako v Korovkinově větě: Buď $X = [a, b]$ kompaktní interval v $\mathbf{R}$ a $\mathscr{T} = \{1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^2\}$. Když přijmeme geometrické zdůvodnění uvedené před obr. 1, dostaneme $f_* = f = f^*$ pro všechna $f \in \mathscr{C}([a, b])$. (Přesný důkaz podáme později.)

Příklad 2. Nechť opět $X = [a, b]$, nyní však uvažujme $\mathscr{T} = \{1, \mathrm{id}\}$. Testovací prostor je tvořen všemi afinními fukcemi $x \mapsto \alpha + \beta x$. Pro všechny funkce $f \in \mathscr{C}([a, b])$ je f^* nejmenší konkávní (nutně spojitá) funkce $\geqq f$; podobně je f_* největší konvexní (nutně spojitá) funkce $\leqq f$ na $[a, b]$. Rovnosti $f_* = f = f^*$ tedy platí, právě když f je afinní a je tedy prvkem prostoru lin $\mathcal{T}$.

Inspirováni tímto příkladem zavedeme některé pojmy, opět v kontextu naší obecné situace. Funkce $f \in \mathscr{C}(X)$ se nazývá *$\mathcal{T}$-afinní*, jestliže platí $f_* = f^*(=f)$. Množinu všech $\mathcal{T}$-afinních funkcí budeme značit $\mathcal{T}^*$. Všechny funkce testovacího prostoru jsou zřejmě $\mathcal{T}$-afinní; platí proto

$$\mathcal{T} \subset \operatorname{lin} \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^* \subset \mathscr{C}(X) . \tag{9}$$

Snadno se ověří, že $\mathcal{T}^*$ je lineární podprostor $\mathscr{C}(X)$; je třeba si pouze povšimnout, že pro všechny funkce $f, g \in \mathscr{C}(X)$ a každé reálné číslo $\lambda \geqq 0$ je

$$(f + g)^* \leqq f^* + g^* , \quad (\lambda f)^* = \lambda f^* , \quad (-f)^* = -f_* . \tag{10}$$

Nyní musíme rozhodnout, zda nový pojem $\mathcal{T}$-afinní funkce má skutečně správný vztah k problému 1. Začněme s předběžnou úvahou. Nechť f je funkce z $\mathscr{C}(X)$ a (L_n) je $\mathcal{T}$-přípustná posloupnost nezáporných lineárních operátorů na $\mathscr{C}(X)$. Pro $g, h \in \operatorname{lin} \mathcal{T}$ splňující nerovnosti $g \leqq f \leqq h$ máme $L_n g \leqq L_n f \leqq L_n h$ pro všechna n. Uvážíme-li, že $(L_n g)$, resp. $(L_n h)$ konvergují stejnoměrně a tedy bodově ke g. resp. k h, dostaneme odtud

$$g(x) \leqq \liminf_{n \to \infty} L_n f(x) \leqq \limsup_{n \to \infty} L_n f(x) \leqq h(x) .$$

Protože to platí pro všechny takové funkce $g, h \in \operatorname{lin} \mathcal{T}$, odvodíme ze (7)

$$f_*(x) \leqq \liminf_{n \to \infty} L_n f(x) \leqq \limsup_{n \to \infty} L_n f(x) \leqq f^*(x) . \tag{11}$$

Jestliže pro dané x platí $f_*(x) = f^*(x)$, konverguje $L_n f(x)$ k $f(x)$. Zejména jsme dokázali, že pro $\mathcal{T}$-afinní funkci f konverguje posloupnost $(L_n f)$ k funkci f alespoň bodově.

Odtud je již jen krůček k této částečné odpovědi na náš problém 1:

Tvrzení 1. *Každá $\mathcal{T}$-afinní funkce je Korovkinova funkce.*

Důkaz. Pokusíme se modifikovat důkaz provedený pro případ bodové konvergence. Nejprve poznamenejme, že pro $f \in \mathcal{T}^*$ a $\varepsilon > 0$ existuje konečně mnoho funkcí $h'_1, \ldots, \ldots, h'_k$ a $h''_1, \ldots, h''_k$ z lin $\mathcal{T}$ takových, že pro jejich odpovídající obálky

$$\underline{h} = \sup (h'_1, \ldots, h'_k) \quad \text{a} \quad \bar{h} = \inf (h''_1, \ldots, h''_k)$$

platí

$$\underline{h} \leqq f \leqq \bar{h} \quad \text{a} \quad \bar{h} - \underline{h} < \varepsilon .$$

Skutečně, z rovností $f_*(x) = f(x) = f^*(x)$ a ze (7) vyplývá, že pro každé $x \in X$ existují funkce h'_x a h''_x z lin $\mathcal{T}$ tak, že

$$h'_x \leqq f \leqq h''_x \quad \text{a} \quad h''_x(x) - h'_x(x) < \varepsilon .$$

Existuje tedy otevřené okolí U_x bodu x v X takové, že pro všechny body $y \in U_x$ platí

$$h''_x(y) - h'_x(y) < \varepsilon\,.$$

Zřejmě je $(U_x)_{x\in X}$ otevřené pokrytí prostoru X. Podle definice kompaktnosti konečně mnoho okolí U_x, řekněme $U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}$, stačí k pokrytí prostoru X. Potom funkce

$$h'_j = h'_{x_j} \quad \text{a} \quad h''_j = h''_{x_j} \quad (j = 1, \ldots, k)$$

mají všechny požadované vlastnosti.

Nechť nyní (L_n) je $\mathscr{T}$-přípustná posloupnost nezáporných lineárních operátorů na $\mathscr{C}(X)$. Je-li $\varepsilon > 0$, existuje přirozené číslo n_0 tak, že

$$\|L_n h'_j - h'_j\| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|L_n h''_j - h''_j\| < \varepsilon$$

pro všechna $n \geqq n_0$ a všechna $j = 1, \ldots, k$. Protože všechna zobrazení (L_n) jsou neklesající, platí pro všechna n a $j = 1, \ldots, k$

$$L_n h'_j \leqq L_n f \leqq L_n h''_j\,.$$

Máme pro všechna $n \geqq n_0$ tedy

$$h'_j - \varepsilon \leqq L_n f \leqq h''_j + \varepsilon \quad (j = 1, \ldots, k)\,,$$

a proto

$$\underline{h} - \varepsilon \leqq L_n f \leqq \bar{h} + \varepsilon\,.$$

Užijeme-li nerovnost $\underline{h} \leqq f \leqq \bar{h}$, dostaneme konečně

$$|L_n f - f| \leqq \bar{h} - \underline{h} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

pro všechna $n \geqq n_0$ a odtud stejnoměrnou konvergenci $(L_n f)$ k f. Každá $\mathscr{T}$-afinní funkce je tedy Korovkinova funkce.

Poznámka. Na rozdíl od důkazu první Korovkinovy věty, kde jsme podstatným způsobem využívali linearitu operátorů L_n, výše uvedený důkaz nevyužívá explicitně linearitu. Užívá se pouze toho, že operátory L_n jsou neklesající, což je důsledkem linearity a nezápornosti. Jestliže tedy $\mathscr{T}$ je lineární podprostor prostoru $\mathscr{C}(X)$, tj. $\mathscr{T} = \operatorname{lin} \mathscr{T}$, platí věta 1 obecněji pro posloupnosti (L_n) neklesajících (ne nutně lineárních) operátorů na $\mathscr{C}(X)$, přičemž konvergence je vyjádřena pomocí (5).

Můžeme shrnout, že ve větě 1 je obsažena první odpověď na problém 2. Jestliže totiž všechny funkce z $\mathscr{C}(X)$ jsou $\mathscr{T}$-afinní, pak každá funkce z $\mathscr{C}(X)$ je Korovkinova funkce. Podle příkladu 1 je toto případ první Korovkinovy věty.

Nyní lze formulovat nutnou podmínku, aby platila rovnost $\mathscr{T}^* = \mathscr{C}(X)$: *množina $\mathscr{T}$ musí oddělovat body*. To znamená, že pro libovolnou dvojici x_1, x_2 různých bodů z X

existuje testovací funkce $t \in \mathscr{T}$ splňující $t(x_1) \neq t(x_2)$. Jistě totiž existuje funkce $f \in \mathscr{C}(X)$, pro kterou $f(x_1) \neq f(x_2)$, např. $x \mapsto d(x, x_2)$, kde d je metrika na X. V důsledku rovnosti $\mathscr{T}^* = \mathscr{C}(X)$ a vztahů (7) potom také existuje funkce $h \in \operatorname{lin} \mathscr{T}$ taková, že $h(x_1) \neq h(x_2)$. Tím je důkaz dokončen, neboť h je lineární kombinace testovacích funkcí. Podmínka oddělování bodů ovšem nepostačuje pro platnost rovnosti $\mathscr{T}^* = \mathscr{C}(X)$, jak je vidět z příkladu 2.

2. Testovací množina a Choquetova hranice

Zdali je výše uvedená první odpověď na problém 2 prakticky použitelná, závisí hodně na obtížnosti důkazu rovnosti $\mathscr{T}^* = \mathscr{C}(X)$ v daném konkrétním případě. Popíšeme nyní metodu vhodnou ke zdolání tohoto problému. Tato metoda je založena na poznatku, že podle (10) v daném bodě $x \in X$ platí

$$\lim L_n f(x) = f(x)$$

pro všechna $f \in \mathscr{C}(X)$ a všechny $\mathscr{T}$- přípustné posloupnosti (L_n), pokud

$$f_*(x) = f^*(x) \quad \text{pro všechna} \quad f \in \mathscr{C}(X)\,.$$

To je motivací k hlubšímu zkoumání množiny

$$\partial_{\mathscr{T}} X = \{x \in X\,;\ f_*(x) = f^*(x) \quad \text{pro} \quad \text{všechna} \quad f \in \mathscr{C}(X)\}\,. \tag{12}$$

V příkladu 1 se tato množina rovná $[a, b]$; v příkladu 2 obsahuje pouze krajní body a, b. Abychom si to uvědomili, všimněme si, že pro konkávní spojitou funkci

$$f(x) = \begin{cases} x - a\,, & a \leqq x \leqq \dfrac{a+b}{2} \\[2ex] b - x\,, & \dfrac{a+b}{2} \leqq x \leqq b \end{cases}$$

platí $f^* = f$ a $f_* = 0$. Tedy $f^*(x) = f_*(x)$ nastává pouze pro $x = a$ a $x = b$.

V těchto dvou případech je zřejmé, že každá funkce z testovacího prostoru $\operatorname{lin} \mathscr{T}$ nabývá svého globálního maxima a minima na X v některém bodě z $\partial_{\mathscr{T}} X$. Poznamenáváme bez důkazu, že to platí obecně. (Důkaz viz [2], str. 96.) Vzhledem k formální analogii s hraničním principem maxima z teorie funkcí komplexní proměnné a teorie potenciálu se $\partial_{\mathscr{T}} X$ nazývá *abstraktní hranice*, přesněji *Choquetova hranice* množiny X vzhledem k $\mathscr{T}$.

Ze samotné definice této hranice vyplývá, že rovnost $\mathscr{T}^* = \mathscr{C}(X)$ platí, právě když se Choquetova hranice $\partial_{\mathscr{T}} X$ rovná X. Budeme-li schopni určit jiným způsobem Choquetovu hranici, poskytne tato tautologie kritérium pro platnost rovnosti $\mathscr{T}^* = \mathscr{C}(X)$. Toho lze dosáhnout pomocí pojmu míry a v mnoha důležitých speciálních případech pomocí chování nulových bodů funkcí z testovacího prostoru.

Jak je obvyklé, bude podle definice nezáporná Radonova míra μ na X znamenat nezáporný lineární funkcionál na $\mathscr{C}(X)$, tj. nezáporné lineární zobrazení μ: $\mathscr{C}(X) \to \mathbf{R}$. (Podle Rieszovy věty o reprezentaci lze na μ pohlížet jako na regulární borelovskou míru $\mu_0 \geqq 0$ na X. Ve skutečnosti existuje právě jedna míra μ_0 taková, že $\mu(f) = \int f \, d\mu_0$ pro všechny funkce $f \in \mathscr{C}(X)$.) Pro každý bod x je $f \mapsto f(x)$ Radonova míra; budeme ji značit ε_x a nazývat *jednotková míra* (nebo *Diracova míra*) v bodě x. V dalším budou mít zvláštní důležitost ty míry, které na testovací množinu působí stejně jako Diracova míra. Nezáporná Radonova míra μ na X se nazývá *testovací míra* vzhledem k $\mathscr{T}$ (nebo *$\mathscr{T}$-reprezentující míra*) pro bod $x \in X$, když

$$\mu(t) = t(x) \quad \text{pro všechna} \quad t \in \mathscr{T} . \tag{13}$$

Takovou mírou je zřejmě vždy ε_x. Obecně však pro daný bod x existuje mnoho testovacích měr. V příkladě 2, kde $X = [0, 1]$, je pro $x = \frac{1}{2}$ příkladem testovací míry různé od ε_x Lebesgueova míra, která je definována jako lineární funkcionál

$$\lambda(f) = \int_0^1 f(\xi) \, d\xi \quad (f \in \mathscr{C}(X))$$

a také míry $\frac{1}{2}\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_{1-\alpha}$, $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$. Brzy však ukážeme, že Choquetova hranice $\partial_{\mathscr{T}}X$ je přesně množina těch bodů $x \in X$, pro něž je ε_x jediná testovací míra. Důvodem k tomu je následující úzká souvislost obálek definovaných v (7) a testovacích měr.

L e m m a. *Pro každý bod $x \in X$ a každou funkci $f \in \mathscr{C}(X)$ platí rovnost*

$$[f_*(x), f^*(x)] = \{\mu(f) \; ; \; \mu \textit{ je testovací míra pro } x\} . \tag{14}$$

D ů k a z. Nechť μ je testovací míra pro x. Potom $\mu(f)$ padne do intervalu $[f_*(x), f^*(x)]$. Abychom se o tom přesvědčili, uvažujme funkce $g, h \in \operatorname{lin} \mathscr{T}$ vyhovující nerovnostem $g \leqq f \leqq h$. Pak podle (13) platí

$$g(x) = \mu(g) \leqq \mu(f) \leqq \mu(h) = h(x) ,$$

neboť g a h jsou lineární kombinace testovacích funkcí. Podle (7) dostáváme

$$f_*(x) \leqq \mu(f) \leqq f^*(x) .$$

Obráceně nechť α je reálné číslo z intervalu $[f_*(x), f^*(x)]$. Na lineárním podprostoru $\{\lambda f; \lambda \in \mathbf{R}\}$ prostoru $\mathscr{C}(X)$ generovaném funkcí f definuje zobrazení

$$\lambda f \mapsto \lambda\alpha$$

lineární funkcionál μ_0, který je majorizován funkcí $p(g) = g^*(x)$ definovanou na $\mathscr{C}(X)$.

Pro $\lambda \geqq 0$ totiž máme

$$\mu_0(\lambda f) = \lambda\alpha \leqq \lambda f^*(x) = (\lambda f)^*(x) = p(\lambda f)$$

a pro $\lambda < 0$

$$\mu_0(\lambda f) = \lambda\alpha \leqq \lambda f_*(x) = -\lambda(-f)^*(x) = (\lambda f)^*(x) = p(\lambda f)\,.$$

Podle (10) je p sublineární funkcionál na $\mathscr{C}(X)$, tj. $p(g_1 + g_2) \leqq p(g_1) + p(g_2)$ a $p(\lambda g) = \lambda p(g)$ pro libovolné funkce $g_1, g_2, g \in \mathscr{C}(X)$ a libovolná čísla $\lambda \geqq 0$. Hahnova-Banachova věta ([13], str. 212) říká, že μ_0 lze rozšířit na lineární funkcionál μ definovaný na $\mathscr{C}(X)$ a majorizovaný všude funkcí p. Funkcionál μ je nezáporný, neboť z předpokladu $f \in \mathscr{C}(X)$, $f \leqq 0$, plyne

$$\mu(f) \leqq p(f) = f^*(x) \leqq 0\,.$$

(Povšimněme si, že konstantní funkce 0 patří do lin $\mathscr{T}$ a majorizuje f.) Tedy μ je nezáporná Radonova míra na X. Je-li $h \in \operatorname{lin} \mathscr{T}$, platí $h_* = h = h^*$, takže $\mu(h) \leqq h^*(x) = h(x)$ a také $-\mu(h) = \mu(-h) \leqq (-h)^*(x) = -h_*(x) = -h(x)$. Našli jsme tedy testovací míru μ pro bod x; z její konstrukce vyplývá, že $\mu(f) = \mu_0(f) = \alpha$. Tím je důkaz dokončen.

Jak jsme již naznačili, dospíváme nyní k tomuto zásadnímu poznatku:

Tvrzení 2. *Bod $x \in X$ leží v Choquetově hranici, právě když ε_x je jediná testovací míra pro x.*

Důkaz. Podle definice (12) je $x \in \partial_{\mathscr{T}} X$, právě když pro všechna $f \in \mathscr{C}(X)$ platí $f_*(x) = f^*(x)$. Podle předcházejícího lemmatu to znamená, že libovolná testovací míra μ pro x splňuje rovnosti $\mu(f) = f_*(x) = f^*(x) = f(x)$ pro všechna $f \in \mathscr{C}(X)$. S tím je ekvivalentní podmínka, že ε_x je jediná testovací míra pro x.

Právě tato ekvivalence převádí tautologii

$$\mathscr{T}^* = \mathscr{C}(X) \Leftrightarrow \partial_{\mathscr{T}} X = X$$

v následující netriviální tvrzení.

Korolár. *Každá funkce z $\mathscr{C}(X)$ je $\mathscr{T}$-afinní, právě když pro každý bod $x \in X$ je ε_x jediná testovací míra.*

Konečně se dostáváme k rozhodující odpovědi na naše problémy 1 a 2.

Věta 1. *Je-li $\mathscr{T} \subset \mathscr{C}(X)$ testovací množina, pak systém $\mathscr{T}$-afinních funkcí splývá se systémem Korovkinových funkcí.*

Věta 2. *Nechť $\mathscr{T} \subset \mathscr{C}(X)$ je testovací množina. Potom všechny funkce z $\mathscr{C}(X)$ jsou Korovkinovy funkce, právě když pro každý bod $x \in X$ je ε_x jediná testovací míra.*

Se zřetelem na předcházející korolár je druhá věta bezprostředním důsledkem první věty. Máme tedy dokázat pouze větu 1.

Důkaz. Vzhledem k tvrzení 1 je třeba pouze dokázat, že libovolná Korovkinova funkce $f \in \mathscr{C}(X)$ je nutně $\mathscr{T}$-afinní. Podle našeho lemmatu je toto ekvivalentní s výrokem, že platí $\mu(f) = f(x_0)$ pro všechny body $x_0 \in X$ a všechny testovací míry μ pro bod x_0.

Nechť tedy $x_0 \in X$ a nechť μ je testovací míra pro x_0. Označme d metriku na prostoru X. Pro každé přirozené číslo n uvažujme uzavřenou množinu A_n všech bodů $x \in X$ majících od bodu x_0 vzdálenost $d(x, x_0) \geqq 1/n$. Je známo, že pro neprázdnou A_n je funkce $x \mapsto d(x, A_n)$ (která měří vzdálenost mezi x a A_n) spojitá a $\alpha_n = d(x_0, A_n) > 0$. Položíme-li

$$q_n(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{pro} \quad A_n = \emptyset\,, \\ \min\left((1/\alpha_n)\, d(x, A_n), 1\right) \quad \text{pro} \quad A_n \neq \emptyset\,, \end{cases}$$

dostáváme posloupnost (q_n) spojitých reálných funkcí na X s těmito vlastnostmi:

(15) $$0 \leqq q_n \leqq 1\,, \quad q_n(x_0) = 1\,, \quad q_n(x) = 0 \quad \text{na} \quad A_n$$

pro všechna n. Pro $g \in \mathscr{C}(X)$ je rovnostmi

$$L_n g = \mu(g)\, q_n + (1 - q_n)\, g$$

definována posloupnost (L_n) nezáporných lineárních operátorů na $\mathscr{C}(X)$. Tato posloupnost je $\mathscr{T}$-přípustná, neboť pro $t \in \mathscr{T}$ a $x \in X$ platí

$$|L_n t(x) - t(x)| = |t(x_0) - t(x)|\, q_n(x)\,,$$

a proto podle (15)

$$\|L_n t - t\| \leqq \sup\left\{|t(x_0) - t(x)|\,;\ x \in X \setminus A_n\right\}.$$

Pravá strana je však libovolně malá pro dostatečně velká n, neboť t je spojitá funkce a $X \setminus A_n$ je otevřená koule o středu x_0 a poloměru $1/n$. Pro Korovkinovu funkci f konverguje posloupnost $(L_n f)$ stejnoměrně k f, speciálně

$$\lim L_n f(x_0) = f(x_0)\,.$$

Podle naší konstrukce je však $L_n f(x_0) = \mu(f)$, a tedy $\mu(f) = f(x_0)$. Tím je dokázáno, že funkce f je $\mathscr{T}$-afinní.

O tom, zda bod x patří do Choquetovy hranice $\partial_{\mathscr{T}} X$, lze v mnoha příkladech rozhodnout na základě důkazu existence funkce $h \geqq 0$ z testovacího prostoru lin $\mathscr{T}$, pro niž je x *jediným nulovým bodem*, tj. $0 = h(x) < h(x')$ pro všechna $x' \in X$, $x' \neq x$.

Tvrzení 3. *Nechť funkce $h \geqq 0$ z lin $\mathscr{T}$ má jediný nulový bod $x \in X$. Potom je ε_x jediná reprezentující míra pro x, tj. x je bodem Choquetovy hranice $\partial_{\mathscr{T}} X$.*

Důkaz. Užijeme-li něco málo z teorie míry, je důkaz skoro triviální. Pro každou testovací míru μ pro bod x z rovnosti $\mu(h) = h(x) = 0$ odvodíme, že množina všech $x' \in X$ splňujících $h(x') > 0$, tj. komplement $\{x\}$, má míru 0. Potom však $\mu = \varepsilon_x$, neboť konstatní funkce 1 je testovací funkce.

Přímý důkaz lze provést takto: Uvažujme funkci $f \in \mathscr{C}(X)$ takovou, že $f(x) = 0$.

Funkce f je omezená, tedy pro jisté reálné číslo $\gamma > 0$ je $f \leqq \gamma$. Funkce f je spojitá v bodě x, proto k danému $\varepsilon > 0$ existuje otevřené okolí V bodu x tak, že $f(y) \leqq \varepsilon$ pro všechna $y \in V$. Na uzavřené a tedy kompaktní množině $X \setminus V$ je funkce h kladná, takže je odhadnuta zdola jistým číslem $\eta > 0$. Proto

$$f \leqq \varepsilon + \frac{\gamma}{\eta} h,$$

a tedy

$$\mu(f) \leqq \varepsilon\mu(1) + \frac{\gamma}{\eta}\mu(h) = \varepsilon$$

pro libovolnou testovací míru μ pro bod x. K tomu je třeba pouze si povšimnout, že 1 a h jsou funkce z testovacího prostoru a platí $\mu(1) = 1$ a $\mu(h) = h(x) = 0$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně, dostáváme $\mu(f) \leqq 0$ pro všechna $f \in \mathscr{C}(X)$ vyhovující podmínce $f(x) = 0$, a tedy vlastně $\mu(f) = 0$, neboť takové funkce tvoří podprostor. Pro libovolnou funkci $f \in \mathscr{C}(X)$ je funkce $f - f(x)$ výše uvedeného typu. Tedy máme

$$0 = \mu(f - f(x)) = \mu(f) - f(x) . \mu(1),$$

neboli $\mu(f) = f(x)$. Tím je dokázáno, že $\mu = \varepsilon_x$.

3. Aplikace

Nyní ukážeme užitečnost našich vět a tvrzení 3. Nejprve se vrátíme k prvnímu příkladu.

Příklad 1. Až do tohoto místa jsme záměrně vynechali přesný důkaz intuitivního poznatku, že všechny funkce z $\mathscr{C}([a, b])$ jsou $\mathscr{T}$-afinní. Teď to lze snadno ukázat. Stačí, abychom si uvědomili, že pro každý bod $x_0 \in [a, b]$ je funkce

$$x \mapsto (x - x_0)^2$$

z testovacího prostoru lin $\mathscr{T}$. Tato funkce je nezáporná a má v x_0 jediný nulový bod.

Věta 2 spolu s tvrzením 3 vede tedy k novému důkazu první Korovkinovy věty, který je zcela odlišný od důkazu uvedeného v úvodu. V této souvislosti odkazujeme čtenáře na poznámku v části 1.

Příklad 3. Nechť X je nyní kružnice

$$\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$$

v komplexní rovině $\mathbf{C}$. Pomocí zobrazení $x \to e^{ix}$ lze topologicky ztotožnit $\mathbf{T}$ s intervalem $[0,2\pi]$, když se provede identifikace koncových bodů 0 a 2π. Za testovací množinu zvolíme

$$\mathscr{T} = \{1, \mathrm{Re}, \mathrm{Im}\},$$

kde Re (resp. Im) znamená reálnou (resp. imaginární) část identického zobrazení, tj. $z \mapsto \operatorname{Re} z$ (resp. $z \mapsto \operatorname{Im} z$). Po výše zmíněné identifikaci to znamená za testovací množinu uvažovat $\{1, \cos, \sin\}$.

Testovací prostor lin $\mathscr{T}$ se pak skládá z funkcí

$$x \mapsto \alpha + \beta \sin (x + \gamma)$$

s reálnými koeficienty α, β, γ. Pro $x_0 \in \mathbf{T}$ je

$$h(x) = 1 + \sin \left(x + \frac{3}{2} \pi - x_0\right)$$

nezáporná funkce z lin $\mathscr{T}$, která má v x_0 jediný nulový bod na $\mathbf{T}$. Jako důsledek věty 2 tak dostáváme jiný Korovkinův klasický výsledek.

Druhá Korovkinova věta. *Pro kružnici* $\mathbf{T}$ *a testovací množinu* $\mathscr{T} = \{1, \operatorname{Re}, \operatorname{Im}\}$ *je každá funkce z* $\mathscr{C}(\mathbf{T})$ *Korovkinova funkce.*

Věta má tuto pěknou aplikaci. Přiřaďme každé funkci $f \in \mathscr{C}(\mathbf{T}, \mathbf{C})$, tj. komplexní spojité funkci na $\mathbf{T}$, její formální Fourierovu řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{inx}$$

s koeficienty

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t \quad (n = 0, \pm 1, \ldots) .$$

Pro každé přirozené n definujme operátor $L_n : \mathscr{C}(\mathbf{T}, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}(\mathbf{T}, \mathbf{C})$ takto:

$$L_n f = \frac{s_0 + \ldots + s_{n-1}}{n} \qquad (f \in \mathscr{C}(\mathbf{T}, \mathbf{C})) ,$$

kde s_n je n-tý částečný součet

$$s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \, \mathrm{e}^{i\nu x} \qquad (x \in [0, 2\pi])$$

Fourierovy řady. Zřejmě je L_n lineární operátor. Podle klasického Fejérova vyjádření (srv. [13], str. 292) je pro $x \in [0, 2\pi]$ a $f \in \mathscr{C}(\mathbf{T}, \mathbf{C})$

$$L_n f(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} f(x + t) \left[\frac{\sin (n/2) t}{\sin (t/2)}\right]^2 \mathrm{d}t .$$

Nezáporné funkce se tedy zobrazují na nezáporné funkce, takže L_n je nezáporný operátor. Restrikcí L_n na $\mathscr{C}(\mathbf{T})$ dostáváme posloupnost nezáporných operátorů na $\mathscr{C}(\mathbf{T})$.

Pro funkci $f_0 = 1$ jsou všechny Fourierovy koeficienty rovny nule až na $c_0 = 1$. Pro $f_1(x) = e^{ix}$ je jediný nenulový koeficient $c_1 = 1$. Dostáváme tak

$$L_n f_0 = f_0 \,,$$

$$L_n f_1 = \frac{n-1}{n} f_1 \,,$$

a tedy po rozepsání e^{ix} na reálnou a imaginární část platí pro všechna n

$$L_n \cos = \frac{n-1}{n} \cos \,, \quad L_n \sin = \frac{n-1}{n} \sin \,.$$

Posloupnost (L_n) je tedy $\mathscr{T}$-přípustná a druhá Korovkinova věta dává stejnoměrnou konvergenci $(L_n f)$ k f na $\mathbf{T}$ pro všechny funkce $f \in \mathscr{C}(\mathbf{T})$, a proto dokonce pro všechna $f \in \mathscr{C}(\mathbf{T}, \mathbf{C})$.

To je klasická věta o stejnoměrné cesàrovské sčítatelnosti Fourierových řad spojitých funkcí. Odtud lze dále pokračovat snadno k Fejérově větě o L^1 - cesàrovské sčítatelnosti Fourierových řad L^1-funkcí.

Příklad 4. Nechť nyní X je kompaktní podmnožina $\mathbf{R}^k$. Předpokládejme, že pro každý bod $x \in X$ existuje alespoň jedna opěrná nadrovina protínající X právě v x, tj. existuje alespoň jedna lineární forma l na $\mathbf{R}^k$, pro kterou

$$l(x) < l(x') \quad \text{pro všechna} \quad x' \in X,\, x' \neq x \,. \tag{16}$$

Za testovací množinu zvolíme

$$\mathscr{T} = \{1, p_1, \ldots, p_k\} \,,$$

kde $p_j : X \to \mathbf{R}$ je j-tá souřadnicová funkce (restringovaná na X), která každému $x \in X$ přiřazuje jeho j-tou souřadnici x_j $(j = 1, \ldots, k)$.

Každá lineární forma na $\mathbf{R}^k$ je lineární kombinace funkcí $p_1, \ldots, p_k$. Tudíž podmínka (16) vyjadřuje, že každý bod $x \in X$ je jediným nulovým bodem jisté nezáporné funkce z testovacího prostoru. Podle tvrzení 3 můžeme znovu aplikovat větu 2 a dostáváme: *Všechny funkce z $\mathscr{C}(X)$ jsou Korovkinovy funkce.*

Tento výsledek zahrnuje druhou Korovkinovu větu, neboť každým bodem kružnice $\mathbf{T}$ v $\mathbf{C}(=\mathbf{R}^2)$ prochází právě jedna opěrná přímka, kterou je tečna.

Příklad 5. Nechť X je libovolný kompaktní metrický prostor a $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(X)$ je množina spojitých reálných funkcí, která odděluje body (srv. s koncem části 1). Vezmeme-li za testovací množinu

$$\mathscr{T} = \{1\} \cup \mathscr{F} \cup \{f^2; f \in \mathscr{F}\} \,,$$

tedy množinu mocnin f^j, $j = 0, 1, 2$, funkcí z $\mathscr{F}$, pak *všechny funkce z $\mathscr{C}(X)$ jsou Korovkinovy funkce.*

Abychom se o tom přesvědčili, uvažujme libovolnou testovací míru μ pro $x \in X$. Funkce $(f - f(x))^2$ je pro každé $f \in \mathscr{F}$ z testovacího prostoru; dále

$$\mu((f - f(x))^2) = 0\,.$$

Užitím známé úvahy z teorie míry (srv. [6], str. 225 a věta 2.5.2) dostáváme pro nosič S_μ míry μ inkluzi

$$S_\mu \subset \bigcap_{f \in \mathscr{F}} \{x' \in X\,;\ f(x') = f(x)\}\,.$$

Oddělování bodů pak dává

$$S_\mu \subset \{x\}$$

a konečně $\mu = \varepsilon_x$, neboť $\mu(1) = 1$. (Přímý, ale delší důkaz lze provést elementárně na základě myšlenek užitých v důkazu tvrzení 3.)

Je-li speciálně X kompaktní podmnožina $\mathbf{R}^k$, $k = 1, 2, \ldots$, můžeme za $\mathscr{F}$ volit množinu $\{p_1, \ldots, p_k\}$, kde $p_1, \ldots, p_k$ opět znamenají souřadnicové funkce. Tedy $\mathscr{T}$ je pak množina

$$\{1, p_1, \ldots, p_k, p_1^2, \ldots, p_k^2\}\,.$$

Dokonce lze redukovat počet testovacích funkcí a uvažovat testovací množinu

$$\mathscr{T} = \{1, p_1, \ldots, p_k, p_1^2 + \ldots + p_k^2\}\,.$$

V obou případech stačí aplikovat tvrzení 3:

$$h = \sum_{j=1}^{k} (p_j - p_j(x))^2$$

je nezáporná funkce z lin $\mathscr{T}$, která má v x jediný nulový bod.

První Korovkinova věta je speciální případ tohoto výsledku. Pro $X = [a, b] \subset \mathbf{R}$ je $p_1 = \mathrm{id}$ a tak se tedy dostáváme k testovací množině $\{1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^2\}$.

4. Geometrická interpretace

Budeme se nyní zabývat nejdůležitějším příkladem Choquetovy hranice a jeho vztahu ke studované problematice.

Uvažujme *kompaktní konvexní* množinu C v $\mathbf{R}^k$. Pak C obsahuje s každými dvěma body úsečku, která je spojuje. Jako v příkladu 4 uvažujme testovací množinu

$$\mathscr{T}_C = \{1, p_1, \ldots, p_k\}\,.$$

Potom testovací prostor lin $\mathcal{T}_C$ je prostor $\mathrm{A}(C)$ restrikcí na C *afinních* funkcí na $\mathbf{R}^k$, tedy všech funkcí tvaru

$$x = (x_1, \ldots, x_k) \mapsto \alpha_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j$$

s reálnými koeficienty.

Nechť a, b jsou body množiny C a nechť x je bod úsečky spojující body a, b. Potom x lze psát ve tvaru

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)\, b\,,$$

kde λ je reálné číslo z jednotkového intervalu. Tedy

$$\mu = \lambda \varepsilon_a + (1 - \lambda)\, \varepsilon_b$$

je nezáporná Radonova míra na C splňující $\mu(t) = t(x)$ pro všechny testovací funkce $t \in \mathcal{T}_C$, takže μ je testovací míra pro x. Je rovna ε_x, právě když $x = a$ nebo $x = b$. Bod x není proto bodem Choquetovy hranice $\partial_{\mathcal{T}_C} C$, pokud $a \neq b$ a $0 < \lambda < 1$. To nastává, když x je bodem úsečky v C, ne však jejím krajním bodem. Body z C, které mohou být jenom koncovými body úseček v C, se nazývají *extremální body* množiny C. Jsou to právě ty body $x \in C$, pro něž je množina $C \setminus \{x\}$ konvexní. Označíme-li ex C množinu všech extremálních bodů množiny C, dokázali jsme právě, že $\partial_{\mathcal{T}_C} C$ je podmnožina ex C. Dokonce však platí rovnost:

Tvrzení 4. *Pro každou kompaktní konvexní množinu $C \subset \mathbf{R}^k$ a testovací množinu* $\mathcal{T}_C = \{1, p_1, \ldots, p_k\}$ platí

$$\partial_{\mathcal{T}_C} C = \operatorname{ex} C\,. \tag{17}$$

Tento výsledek zde nebudeme dokazovat, čtenáře však odkazujeme na Choqueta [9], § 29 či Phelpse [19], § 6, kde je tvrzení 4 uvedeno ve větší obecnosti. Elementární úvod do studia ex C lze nalézt v Jacobsovi [14].

Vraťme se nyní k obecné situaci kompaktního metrického prostoru X a testovací množiny $\mathcal{T} \subset \mathscr{C}(X)$. Kromě podmínky (4), že konstantní funkce 1 patří do $\mathcal{T}$, budeme nyní požadovat, aby $\mathcal{T}$ byla konečná množina oddělující body:

$$\mathcal{T} = \{1, t_1, \ldots, t_k\}\,. \tag{18}$$

(Případ $\mathcal{T} = \{1\}$ je nezajímavý, neboť rovnost $\partial_{\mathcal{T}} X = X$ může nastat pouze v případě, když $\mathcal{T}$ odděluje body, tedy X obsahuje jediný bod.) Testovací prostor má pak konečnou dimenzi. Konečnost $\mathcal{T}$ umožňuje definovat spojité zobrazení $\Phi : X \to \mathbf{R}^k$ vztahem

$$\Phi(x) = (t_1(x), \ldots, t_k(x))\,. \tag{19}$$

Jako spojitý obraz X je $\Phi(X)$ kompaktní množina. Navíc Φ je prosté zobrazení, neboť $\mathcal{T}$

odděluje body množiny X. Podle známé věty je tedy Φ homeomorfní zobrazení X na $\Phi(X)$. Vnořili jsme tak X homeomorfně do k-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{R}^k$.

Vztah mezi naší novou situací a případem uvažovaným v tvrzení 4 se ozřejmí, budeme-li uvažovat konvexní obal C kompaktní množiny $\Phi(X)$ v $\mathbf{R}^k$. Tento konvexní obal je také kompaktní (srv. [24], věta 3.10, str. 40), takže dostáváme kompaktní konvexní množinu v $\mathbf{R}^k$, která je $(X, \mathcal{T})$ přiřazena velmi přirozeným způsobem. Pomocí této množiny C můžeme dát novou a snadněji pochopitelnou interpretaci Choquetovy hranice $\partial_{\mathcal{T}}X$.

Tvrzení 5. *Pro každou testovací množinu $\mathcal{T} = \{1, t_1, \ldots, t_k\}$ oddělující body množiny X platí*

$$\Phi(\partial_{\mathcal{T}}X) = \operatorname{ex} C\,, \tag{20}$$

kde $\Phi : X \to \mathbf{R}^k$ je zobrazení (19) a C je konvexní obal množiny $\Phi(X)$.

Jinak řečeno: Bod $x \in X$ patří do Choquetovy hranice $\partial_{\mathcal{T}}X$, právě když je $\Phi(x)$ extremální bod množiny C.

Omezíme se na náznak důkazu. Pomocí Φ můžeme převést testovací funkce $t_0 = 1$, $t_1, \ldots, t_k$ na $\Phi(X)$: funkce $u_j = t_j \circ \Phi^{-1}$ na $\Phi(X)$ odpovídá funkci t_j. Pak je u_0 konstatní funkce 1 a u_j je j-tá souřadnicová funkce na $\Phi(X)$, $j = 1, \ldots, k$, neboť pro každý bod $y \in \Phi(X)$ a jeho vzor $x = \Phi^{-1}(y)$ platí podle (19)

$$u_j(y) = t_j(x) = p_j(\Phi(x))\,.$$

Testovací množina $\mathcal{T}$ se tedy převádí na restrikci na $\Phi(X)$ testovací množiny $\mathcal{T}_C$ z tvrzení 4. Homeomorfismus $\Phi : X \to \Phi(X)$ také převádí přirozeným způsobem každou testovací míru pro x (vzhledem k $\mathcal{T}$) na testovací míru pro $\Phi(x)$ (vzhledem k $\mathcal{T}_C$), která však je nesena množinou $\Phi(X)$. Dále lze tvrzení 4 zesílit tak, že ex C je množina všech bodů $y \in C$, pro něž je ε_y jediná testovací míra pro y (vzhledem k $\mathcal{T}_C$), která je nesena množinou $\Phi(X)$. Odtud plyne tvrzení 5. Podrobnosti je možno nalézt v [2] a [9].

Užitečnost tvrzení 5 pro naše problémy spočívá v tomto důsledku:

Korolár. *Za situace z tvrzení 5 jsou všechny funkce z $\mathscr{C}(X)$ Korovkinovy funkce vzhledem k $\mathcal{T}$, právě když*

$$\Phi(X) = \operatorname{ex} C\,. \tag{21}$$

Stačí si povšimnout, že $\partial_{\mathcal{T}}X = X$ je ekvivalentní s $\Phi(\partial_{\mathcal{T}}X) = \Phi(X)$, a tedy podle (20) s rovností $\Phi(X) = \operatorname{ex} C$. Výsledek pak vyplývá z věty 2.

Rovnost (21) nám v konkrétních případech umožňuje rozhodnout na základě geometrických úvah, zda pro danou testovací množinu jsou všechny spojité funkce Korovkinovy funkce.

Příklad 6. Nechť X je kompaktní interval $[a, b]$ v $\mathbf{R}$ a $\mathcal{T} = \{1, t\}$ je testovací množina o dvou prvcích. Když každá funkce v $\mathscr{C}([a, b])$ je Korovkinova funkce vzhledem k $\mathcal{T}$, funkce t musí oddělovat body. Odpovídající zobrazení $\Phi : X \to \mathbf{R}$ se rovná t. Jako spojitý obraz kompaktního intervalu je také $\Phi(X) = t(X)$ jistý kompaktní interval

$[c, d]$ v $\mathbf{R}$; je to tedy konvexní množina rovná svému konvexnímu obalu C. Extremální body intervalu $[c, d]$ jsou koncové body c, d. Tedy $\Phi(X) = \operatorname{ex} C$ platí, právě když $\Phi(X)$ a tím X obsahuje právě jeden bod.

Právě jsme dokázali, že na kompaktním intervalu $[a, b]$, který se neredukuje na jediný bod, neexistuje žádná testovací množina $\mathscr{T} = \{1, t\}$ sestávající z právě dvou prvků tak, že všechny funkce z $\mathscr{C}(X)$ jsou Korovkinovy funkce. To ukazuje, že počet tří testovacích funkcí v první Korovkinově větě je minimální. Tento výsledek se označuje jako třetí Korovkinova věta.

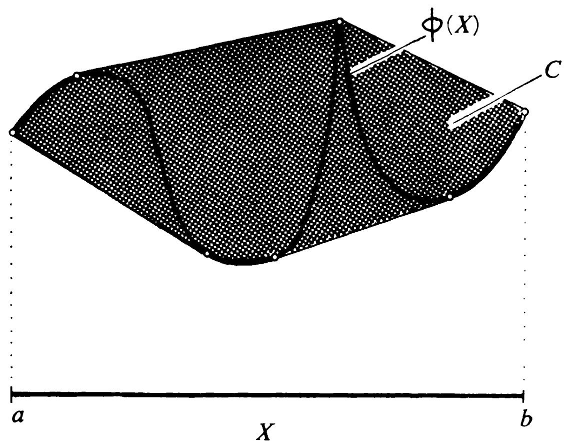
Příklad 7. Nechť X je kompaktní interval $[a, b]$ v $\mathbf{R}$ takový, že $a < b$. Uvažujme testovací množinu

$$\mathscr{T} = \{1, \mathrm{id}, u\},$$

která vznikne z testovací množiny v první Korovkinově větě záměnou funkce id^2 za zatím libovolnou funkci $u \in \mathscr{C}([a, b])$. Množina $\mathscr{T}$ odděluje body, protože již podmnožina $\{\mathrm{id}\}$ odděluje body, takže můžeme užít zobrazení Φ z (19). Dostaneme

$$\Phi(X) = \{(x, u(x))\,;\ x \in [a, b]\},$$

což je graf funkce u. Přejdeme-li od množiny $\Phi(X)$ k jejímu konvexnímu obalu, dostáváme situaci znázorněnou na obr. 2.



Obr. 2.

Pouze tučně vyznačené části grafu jsou tvořeny extremálními body množiny C.

Nyní je intuitivně jasné, kdy graf $\Phi(X)$ funkce u splývá s množinou $\operatorname{ex} C$ všech extremálních bodů množiny C. To nastává, právě když je u buď ryze konvexní, nebo ryze konkávní. Jako obvykle, $u \in \mathscr{C}([a, b])$ se nazývá *ryze konkávní*, jestliže nerovnost

$$\lambda u(x) + (1 - \lambda)\, u(y) < u(\lambda x + (1 - \lambda)\, y)$$

platí pro všechny body x, y splňující podmínku $a \leqq x < y \leqq b$ a všechna λ, pro něž

$0 < \lambda < 1$. Funkci u nazýváme *ryze konvexní*, když $-u$ je ryze konkávní. Dostáváme se tak k tomuto tvrzení:

Tvrzení 6. *Nechť u je spojitá reálná funkce na kompaktním nedegenerovaném intervalu $[a, b]$ v $\mathbf{R}$. Všechny funkce z $\mathscr{C}([a, b])$ jsou Korovkinovy funkce vzhledem k množině $\mathscr{T} = \{1, \mathrm{id}, u\}$, právě když je u ryze konkávní nebo ryze konvexní.*

Důkaz (ne příliš obtížný) přenecháváme čtenáři a spokojíme se s geometrickým názorem.

Výsledek objasňuje roli funkce id^2 v první Korovkinově větě. Tato funkce je ryze konvexní. Podle tvrzení 6 by mohla být zaměněna jakoukoli jinou ryze konvexní funkcí, např. exponenciální funkcí $x \to e^x$. Důkaz první Korovkinovy věty předložený v úvodu samozřejmě po této záměně selže.

Příklad 8. Uvažujme kompaktní konvexní množinu C_0 v $\mathbf{R}^k$ mající uzavřenou (tj. kompaktní) množinu extremálních bodů $X_0 = \mathrm{ex}\, C_0$. Podle (19) je $\Phi : X_0 \to \mathbf{R}^k$ identické zobrazení, pokud volíme za testovací množinu

$$\mathscr{T} = \{1, p_1, \ldots, p_k\}\,.$$

Zde p_j je opět restrikce j-té souřadnicové funkce na X_0. Konvexní obal množiny $X_0 = \Phi(X_0)$ (dříve označovaný C) splývá s C_0. To plyne z klasické Minkowského věty nebo z Krejnovy-Milmanovy věty (srv. [9], [13], [19], [24]), podle níž je C_0 konvexním obalem množiny svých extremálních bodů. Platí tedy $\Phi(X_0) = X_0 = \mathrm{ex}\, C_0$. Korolár za tvrzením 4 pak dává: *Všechny funkce z $\mathscr{C}(X_0)$ jsou Korovkinovy funkce.*

Tento případ zahrnuje příklad 4 jako speciální případ. Jestliže bodem $x \in X$ prochází opěrná nadrovina, tj. existuje lineární forma l na $\mathbf{R}^k$ tak, že

$$l(x) \leqq l(x') \quad \text{pro všechna} \quad x' \in X\,,$$

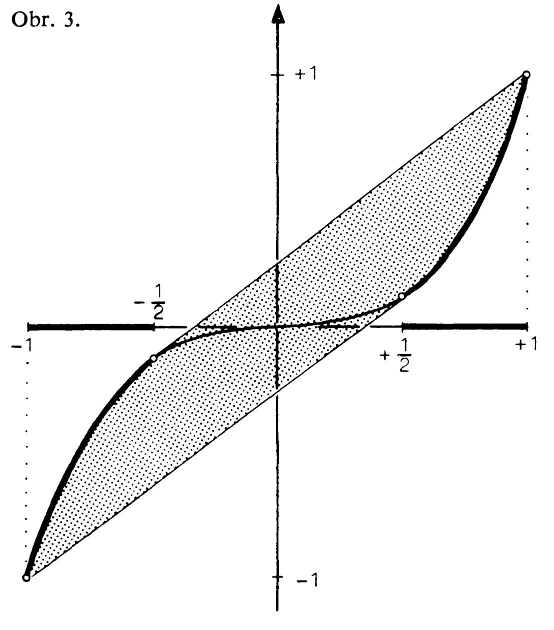
potom X, a tedy také konvexní obal C množiny X jsou obsaženy v konvexním poloprostoru tvořeném všemi $x' \in X$ splňujícími $l(x') \geqq \alpha$, kde $\alpha = l(x)$. Nadrovina

$$H = \{x' \in \mathbf{R}^k\,;\; l(x') = \alpha\}\,,$$

je tedy opěrná nadrovina množiny C. Taková nadrovina vždy obsahuje alespoň jeden extremální bod, neboť — jak jsme se zmínili v části 2 v souvislosti se zavedením Choquetovy hranice — l nabývá svého minima α na C v některém bodě z $\partial_{\mathscr{T}_C} C = \mathrm{ex}\, C$. Avšak v příkladu 4 nadrovina H protne X pouze v jediném bodě; totéž je pravda, když X nahradíme množinou C. Proto x musí být extremálním bodem množiny C a platí $X \subset \mathrm{ex}\, C$. Dokonce platí rovnost, neboť každý bod $c \in C$ lze psát jako $c = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j x_j$ pro různé body $x_1, \ldots, x_r \in X$ a koeficienty $\lambda_1 \geqq 0, \ldots, \lambda_r \geqq 0$ splňující $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1$. Jednoduchý výpočet ukazuje, že c může být extremálním bodem množiny C, právě když $\lambda_j = 0$ pro všechny indexy $j \in \{1, \ldots, r\}$ s výjimkou jednoho.

Příklad 9. Posledním příkladem chceme ukázat, že tvrzení 5 vede za složitějších situací k jednoduchému určení Choquetovy hranice. Uvažujme $X = [-1, 1]$ v $\mathbf{R}$ a $\mathscr{T} = \{1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^3\}$ jako testovací množinu. Příklad 7 ukazuje, že $\Phi(X)$ je grafem funkce $x \mapsto x^3$, dobře známé kubické paraboly. V tomto případě je třeba obr. 2 nahradit obr. 3. Extremální body $C = \operatorname{conv} \Phi(X)$ jsou všechny body $(x, x^3) \in \mathbf{R}^2$, kde $x \in [-1, -\frac{1}{2}] \cup \cup [\frac{1}{2}, 1]$. Podle tvrzení 5 je pak $[-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ Choquetova hranice množiny $[-1, 1]$ vzhledem k $\mathscr{T}$.Čistě analytický důkaz založený na tvrzení 2 nebo dokonce na vztahu (12) je mnohem složitější.

Obr. 3.



5. Bibliografické poznámky

Proslavené tři Korovkinovy věty se poprvé objevily v [15] a poněkud později v knize [16]. Aparát užívaný v tomto článku – zejména zavedení prostoru $\mathscr{T}^*$ všech $\mathscr{T}$-afinních funkcí (původně byly nazvány $\mathscr{T}$-harmonické funkce) a rovněž vlastnosti Choquetovy hranice včetně geometrické interpretace – pochází z autorova článku [2], kde byl zaveden v souvislosti s problémy teorie potenciálu. Uvádí se tam již příklad 1, ale bez vztahu k teorii aproximace. Šaškin [20] jako první zkoumal pro případ konečné množiny testovacích funkcí na kompaktním metrickém prostoru X podmínky zaručující, že všechny funkce z $\mathscr{C}(X)$ jsou Korovkinovy funkce. Tam se implicitně objevuje souvislost s Choquetovou hranicí. Explicitně se tato souvislost vyskytuje ve Wulbertově článku [27], kde se podobně jako u Šaškina [21] uvažují posloupnosti (L_n) (ne nutně nezáporných) kontrahujících operátorů $L_n : \mathscr{C}(X) \to \mathscr{C}(X)$. Význam prostoru $\mathscr{T}^*$ všech $\mathscr{T}$-afinních funkcí rozpoznali Šaškin [22] a Baskakov [1], i když jen pro obdobný případ bodové konvergence. Metody tohoto článku byly rozvinuty v autorově článku [3] a nezávisle v prakticky stejné době Berensem a Lorentzem [7]. Tam zejména lze nalézt větu 1. Jiný její důkaz pochází od Šaškina [23]. Většina příkladů v tomto článku představuje část folklóru okolo Korovkinových vět.

Další zkoumání této problematiky lze nalézt v [3], [4], [7] a rovněž v těchto pracích: Donner [10], [11], Grossman [12], Kutateladze [17], Leha [18] a Wolff [25], [26].

Literatura

[1] V. A. Baskakov: *O někotorych uslovijach schodimosti linějnych položitělnych operatorov.* Uspěchi Mat. Nauk *16* (1961), 131—135.

[2] H. Bauer: *Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem.* Ann. Inst. Fourier *11* (1961), 89—136.

[3] H. Bauer: *Theorems of Korovkin type for adapted spaces.* Ann. Inst. Fourier *23*, 4 (1973), 245—260.

[4] H. Bauer: *Convergence of monotone operators.* Math. Z. *136* (1974), 315—330.

[5] H. Bauer: *Approximationssätze und abstrakte Ränder.* Math.-Phys. Semesterber. *23* (1976), 141—173.

[6] H. Bauer: *Probability Theory and Elements of Measure Theory.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1972.

[7] H. Berens and G. G. Lorentz: *Theorems of Korovkin type for positive linear operators on Banach lattices.* Approximation Theory (Ed. G. G.Lorentz), Academic Press, New York, 1973.

[8] S. Bernstein: *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.* Comm. Soc. Math. Kharkow (2) *13* (1912), 1—2.

[9] G. Choquet: *Lectures on Analysis. Vol. II, Representation Theory.* Benjamin, New York, 1969.

[10] K. Donner: *Korovkin Theorems for positive linear operators.* J. Approximation Theory *13* (1975), 443—450.

[11] K. Donner: *Korovkin Theorems and P-essential sets.* J. Approximation Theory, v tisku.

[12] M. W. Grossman: *Korovkin theorems for adapted spaces with respect to a positive operator.* Math. Ann. *220* (1976), 253—262.

[13] E. Hewitt and K. Stromberg: *Real and Abstract Analysis.* Springer-Verlag, New York, 1965.

[14] K. Jacobs: *Extremalpunkte konvexer Mengen.* Selecta Mathematica *III*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[15] P. P. Korovkin: *O schodimosti linějnych položitělnych operatorov v prostranstvach něpreryvnych funkcij.* Dokl. Akad. Nauk SSSR *90* (1953), 961—964.

[16] P. P. Korovkin: *Linějnyje operatory i těorija približenija.* Fizmatgiz, Moskva, 1959.

[17] S. S. Kutateladze: *Granicy Šoke v K-prostranstvach.* Uspěchi Mat. Nauk *30* (1975), 107—146.

[18] G. Leha: *Relative Korovkin-Sätze und Ränder.* Math. Ann. *229* (1977), 87—95 and *233* (1978), 273—274; viz [30].

[19] R. R. Phelps: *Lectures on Choquet's Theorem.* Van Nostrand Math. Studies, *7*, 1966. (Existuje ruský překlad.)

[20] Ju. A. Šaškin: *Sistěmy Korovkina v prostranstvach něpreryvnych funkcij.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. *26* (1962), 495—512.

[21] Ju. A. Šaškin: *O schodimosti něrastjagivajuščich operatorov.* Mathematica (Cluj) *11* (34) (1969), 335—360.

[22] Ju. A. Šaškin: *O schodimosti linějnych operatorov.* Trudy měždunarodnoj konferencii po konstruktivnoj těoriji funkcij, Varna 1970 (1972), 119—125.

[23] Ju. A. Šaškin: *Ob abstraktnych garmoničeskich funkcijach i zadače schodimosti operatorov.* Mathematica (Cluj) *15* (38) (1973), 143—148.

[24] F. A. Valentine: *Convex Sets.* McGraw-Hill, New York, 1964.

[25] M. Wolff: *Über die Korovkinhülle von Teilmengen in lokalkonvexen Vektorverbänden.* Math. Ann. *213* (1975), 97—108.

[26] M. WOLFF: *On Korovkin Type Theorems in special function lattices.* J. Approximation Theory, v tisku.
[27] D. E. WULBERT: *Convergence of operators and Korovkin's theorem.* J. Approximation Theory *1* (1968), 381—390.
[28] H. BAUER and K. DONNER: *Korovkin Approximation in $C_0(X)$.* Math. Ann. *236* (1978), 225—237.
[29] H. BAUER, G. LEHA and S. PAPADOPOULOU: *Determination of Korovkin closures.* Math. Zeitschrift *168* (1979), 263—274.
[30] G. LEHA and S. PAPADOPOULOU: *Nachtrag zu G. Leha: Relative Korovkin-Sätze.* Math. Ann. *233* (1978), 273.

Poznámka překladatelů

Na začátku loňského roku udělila Americká matematická společnost H. Bauerovi za tento článek Chauvenetovu cenu za období tří let (1976—1978). Je to cena za nejlepší anglicky psaný matematický článek přehledného charakteru — vloni byla udělena již po osmadvacáté od r. 1925. Jejím hlavním cílem je stimulovat tvorbu prvotřídních, hezky a srozumitelně napsaných článků toho typu, který si s chutí přečtou všichni matematici. Mezi nositeli Chauvenetovy ceny je řada známých odborníků, např. P. R. HALMOS, M. KAC, F. TRÈVES, P. D. LAX a další. Oceněný článek je v podstatě překladem [5] a byl otištěn v The American Mathematical Monthly *85* (1978), 632—647. Články oceněné dříve Chauvenetovou cenou byly vydány v r. 1978 ve dvojdílném sborníku „The Chauvenet Papers".

Profesor H. Bauer se narodil r. 1928 v Norimberku. Studoval v Erlangenu a v Nancy a po získání doktorátu v r. 1953 působil nejprve v Erlangenu jako asistent a později v Hamburku jako docent a profesor. Od r. 1965 je profesorem na univerzitě v Erlangenu-Norimberku.

H. Bauer působil na řadě zahraničních univerzit a je členem mnoha vědeckých institucí. V minulém roce byl na krátké návštěvě na MFF UK v Praze.

Vědecká aktivita prof. Bauera je velmi rozsáhlá. Je autorem více než 50 prací, jejichž spektrum se pohybuje od teorie integrálu přes funkcionální analýzu (konvexita, teorie aproximace) k teorii potenciálu a markovských procesů. Napsal učebnice z pravděpodobnosti a teorie míry, z teorie integrálu a o abstraktní teorii potenciálu.

J. C. Maxwell a dovŕšenie klasickej elektrodynamiky

Rudolf Zajac

Pred 150 rokmi, 13. júna 1831, sa narodil v rodine Johna Clerka Maxwella v škótskom Edinburgu jeden z velikánov fyziky James Clerk Maxwell. Pokroky matematiky, fyziky a astronómie uverejnili pred dvomi rokmi článok o živote a diele J. C. Maxwella pri príležitosti 100. výročia jeho smrti [6]. (J.C. Maxwell zomrel na rakovinu žalúdka 8. no-