L. E. Dubins

# Hausdorffův-Banachův-Tarského paradox

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 26 (1981), No. 3, 151--155

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138865

[19] D. POKORNÝ, T. HAVRÁNEK: *On some procedures for identifying sources of dependence in contingency tables*. COMPSTAT 1978, L. C. A. CORSTEN, J. HERMANS (eds.) Physica-Verlag, Wien 1978, 221—227.

[20] P. PUDLÁK: *Polynomially complete problems in the logic of discovery*. MFCS '75, J. BEČVÁR (ed.), Lecture Notes in Computer Science *32*, Springer-Verlag, Heidelberg—Berlin—New York 1975, 358—361.

[21] P. PUDLÁK, F. N. SPRINGSTEEL: *Complexity in mechanized hypothesis formation*. Theoretical Computer Science ( v tisku).

[22] J. RAUCH: *Ein Beitrag zu der GUHA Methode in der dreiwertigen Logik*. Kybernetika *11* (1975), 101—113.

[23] Z. RENC: *Průzkum uchazečů o studium na matematicko-fyzikální fakultě UK*. Sociologický časopis *5* (1972), 527—540.

[24] Z. RENC: *On interpretation of GUHA results*. Int. J. Man-Machine Studies *10* (1978), 37—46.

[25] Z. RENC, K. KUBÁT, K. KOUŘIM: *An appliacation of the GUHA method in medicine*. Int. J. Man-Machine Studies *10* (1978), 29—36.

[26] D. S. SCOTT: *Measurement structures and linear inequalities*. J. Math. Psychology *1* (1964), 233—247.

# Hausdorffův-Banachův-Tarského paradox*)

*L. E. Dubins*

Jeho znění je (přesné definice budou podány později): „Jestliže $X$ a $Y$ jsou dvě ohraničené podmnožiny v $\mathbf{R}^3$ s neprázdnými vnitřky – např. jablko a Měsíc –, pak je možno rozdělit $X$ na konečný počet částí a přemístit je tak, že vytvoří $Y$".

Podstata paradoxu je obsažena v následujícím lemmatu, které tvoří jeho geometrickou část.

Lemma. *Nechť $S$ je jednotková sféra v $\mathbf{R}^3$ (o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Existují dvě rotace $a$, $b$ grupy $SO_3$ o úhly $180°$, resp. $120°$ a rozklad $(A,B,C,D)$ sféry $S$ s tou vlastností, že $D$ je spočetná množina a platí*

$$C = bB = b^2A, \quad A = a(B \cup C).$$

Jinak řečeno množina $A$ je současně třetinou i polovinou množiny $S - D$.

---

*) *Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski* (Fragment d'un cours de L. E. DUBINS rédigé par M. EMERY), Gazette des mathématiciens, N° 12 (Août 1979), 71—76. Přeložil IVAN KOLÁŘ.

Důkaz. Položme

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

a označme $G$ grupu jimi generovanou, která tedy sestává z identity $e$, rotace $a$ a rotací tvaru

(1) $$r = a^{\varepsilon_1} b^{n_1} a b^{n_2} a \ldots a b^{n_{k-1}} a b^{n_k} a^{\varepsilon_2} ,$$

kde $k \in \mathbf{N}^*$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ a $n_i \in \{1, 2\}$. Poznamenejme, že každý prvek množiny $G - \{e, a\}$ připouští jednoznačný zápis ve tvaru (1). (Zde je třeba ověřit, že součin $b^{n_1} a b^{n_2} a \ldots a b^{n_k} a$ není nikdy roven $a$ ani $e$, $k \in \mathbf{N}^*$, $n_i \in \{1, 2\}$, ale indukcí se snadno zjistí, že tento součin je tvaru

$$\frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \sqrt{3} \\ i_1 & p_4 & i_2 \sqrt{3} \\ i_3 \sqrt{3} & p_5 \sqrt{3} & i_4 \end{pmatrix}$$

kde $p_j$ jsou sudá celá čísla a $i_j$ jsou lichá celá čísla.) Grupa $G$ je tedy grupa redukovaných slov vytvořených z písmen $a$ a $b$, přičemž jediná redukční pravidla jsou $a^2 = b^3 = e$.

Nyní můžeme vytvořit rozklad $(G_1, G_2, G_3)$ grupy $G$ takto: do $G_1$ zařadíme slova $(b^2 a)^n$, do $G_2$ slova $a(b^2 a)^n$ a do $G_3$ slova $ba(b^2 a)^n$, $n \geqq 0$, ostatní slova zařadíme do $G_1$ (resp. $G_2$, resp. $G_3$), začínají-li (zleva) slovem $a$ (resp. $b^1$, resp. $b^2$). Snadno se zjistí, že platí $G_3 = bG_2 = b^2 G_1$, $G_1 = a(G_2 \cup G_3)$.

Nechme operovat grupu $G$ na sféře $S$. Množina

$$D = \{x \in S : \exists r \in G - \{e\} \quad rx = x\}$$

je tvořena průniky os rotací prvků $r \in G - \{e\}$ se sférou $S$. Je to spočetná množina, která je stabilní vzhledem ke grupě $G$. Orbita prvku $x \in S - D$ je v bijekci s grupou $G$ při přiřazení $r \leftrightarrow rx$. Vybereme jednoho reprezentanta z každé orbity obsažené v $S - D$; díky axiómu výběru obdržíme takto jistou množinu $E$. Pak klademe $A = G_1 E$, $B = G_2 E$, $C = G_3 E$; pomocí vlastností rozkladu $(G_1, G_2, G_3)$ snadno ověříme, orbitu po orbitě, že $A$, $B$, $C$ tvoří rozklad množiny $S - D$ a splňují

$$C = bB = b^2 A, \quad A = a(B \cup C),$$

QED.

Zbytek důkazu paradoxu spočívá v jistých operacích s množinami.

Nechť $X \equiv Y$ značí, že $X \subset \mathbf{R}^3$ lze přemístit v $Y \subset \mathbf{R}^3$ pomocí euklidovského pohybu. Řekneme, že dvě podmnožiny $X$, $Y \subset \mathbf{R}^3$ jsou *ekvivalentní vzhledem ke konečnému rozkladu* (a budeme psát $X \underset{f}{\equiv} Y$), jestliže pro jistý rozklad $(X_1, \ldots, X_n)$ množiny $X$ a jistý rozklad $(Y_1, \ldots, Y_n)$ množiny $Y$ platí $X_1 \equiv Y_1, X_2 \equiv Y_2, \ldots, X_n \equiv Y_n$. V tomto případě existuje bijekce $f : X \to Y$, jejíž zúžení ke každému $X_i$ je euklidovský pohyb $f_i$; o této bijekci budeme říkat, že je přiřazena k uvažované ekvivalenci.

Přesné znění paradoxu je: *dvě ohraničené podmnožiny v* $\mathbf{R}^3$ *s neprázdnými vnitřky jsou vždy ekvivalentní vzhledem ke konečnému rozkladu.*

V dalším budeme potřebovat následující vlastnosti ekvivalence vzhledem ke konečnému rozkladu

a) vlastnost disjunktního sjednocení: jestliže sjednocení $X \cup X'$ a $Y \cup Y'$ jsou disjunktní a platí $X \underset{f}{\equiv} Y$ a $X' \underset{f}{\equiv} Y'$, pak $X \cup X' \underset{f}{\equiv} Y \cup Y'$;

b) tranzitivnost, takže zde vzniká relace ekvivalence: jestliže $X \underset{f}{\equiv} Y$ a $Y \underset{f}{\equiv} Z$, pak existují konečné rozklady $P_X$ a $P_Z$ množiny $Y$, které odpovídají rozkladům množin $X$ a $Z$; je-li tedy $P$ konečný rozklad množiny $Y$ jemnější než $P_X$ a $P_Z$, lze jeho jednotlivé části vhodně přemístit tak, že vytvoří jak množinu $X$, tak i $Z$, což dává $X \underset{f}{\equiv} Z$; a nakonec

c) vlastnost analogická Cantorově-Bernsteinově větě: jestliže pro $X' \subset X$ a $Y' \subset Y$ platí $X \underset{f}{\equiv} Y'$ a $X' \underset{f}{\equiv} Y$, pak $X \underset{f}{\equiv} Y$. Opravdu, nechť $f : X \to Y'$ je bijekce přiřazená k ekvivalenci mezi $X$ a $Y'$ a $g : X' \to Y$ je bijekce přiřazená k ekvivalenci mezi $X'$ a $Y$. Z klasického důkazu Cantorovy-Bernsteinovy věty vyplývá existence podmnožiny $X'' \subset X'$ takové, že

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ pro } x \in X - X'' \\ g(x) \text{ pro } x \in X'' \end{cases}$$

je bijekce $X$ na $Y$ (například $X'' = X - \bigcup_{n \geqq 0} (g^{-1} \circ f)^n (X - X')$). Zúžení zobrazení $f$ ke každé podmnožině jistého konečného rozkladu $P$ množiny $X$ je euklidovským pohybem a totéž platí pro $g$ a jistý konečný rozklad $Q$ množiny $X'$. Rozklady $P$ a $Q$ indukují na $X - X''$ a $X''$ rozklady $P'$ a $Q'$. Sjednocení $P' \cup Q'$ je konečný rozklad množiny $X$ takový, že zúžení zobrazení $h$ ke každé jeho podmnožině je euklidovským pohybem, což dokazuje ekvivalentnost $X$ a $Y$.

Vraťme se nyní k důkazu paradoxu tam, kde jsme jej opustili, tj. k jednotkové sféře $S$ rozdělené na čtyři části $A$, $B$, $C$, $D$ takové, že $D$ je spočetná množina a platí $A \equiv B \equiv C$ a $A \equiv B \cup C$. Uvažujeme další dvě sféry $S'$ a $S''$ o poloměru jedna, jež jsou disjunktní. Translace, která převádí $S$ v $S'$ (resp. $S''$), převádí množiny $A$, $B$, $C$, $D$ v $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ (resp. $A''$, $B''$, $C''$, $D''$). Každé dvě z devíti množin $A$, $A'$, $A''$, $B$, $B'$, $B''$, $C$, $C'$ a $C''$ jsou shodné a ze vztahu $A \equiv B \cup C$ lze odvodit $A \underset{f}{\equiv} A' \cup A''$, $B \underset{f}{\equiv} B' \cup B''$, $C \underset{f}{\equiv} C' \cup C''$, a pomocí disjunktního sjednocení dostáváme

$$(S - D) \underset{f}{\equiv} (S' - D') \cup (S'' - D'') .$$

Tím získáváme Hausdorffův výsledek: s výjimkou spočetné množiny je sféra $S$ ekvivalentní vzhledem ke konečnému rozkladu s disjunktním sjednocením $S' \cup S''$. Následující úvaha patří Banachovi a Tarskému: vyloučení spočetné množiny a potom zobecnění na libovolné podmnožiny.

Abychom eliminovali množinu $D$, zvolme $z$ takové, že $z$ a $-z$ patří do $S - D$. Ty rotace kolem osy $Oz$, pro něž platí

$$\forall n \in N \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D \quad r^n x \neq y$$

tvoří neprázdnou množinu, neboť její doplněk je spočetný. Uvažujeme tedy takové $r$, že množiny $D, rD, \ldots, r^n D, \ldots$ jsou po dvou disjunktní. Označíme-li $U$ jejich sjednocení, platí $rU = U - D$, takže $U \equiv U - D$. Odtud plyne $U \cup (S - U) \underset{f}{\equiv} (U - D) \cup \cup (S - U)$, tj. $S \underset{f}{\equiv} (S - D)$. Stejně tak se dokáže $S' \underset{f}{\equiv} (S' - D')$ a $S'' \underset{f}{\equiv} (S'' - D'')$, což dovoluje upravit Hausdorffův výsledek na $S \underset{f}{\equiv} S' \cup S''$.

Existují tedy rozklady $(S_1, \ldots, S_{m+n})$, $(S'_1, \ldots, S'_m)$ a $(S''_1, \ldots, S''_n)$ sfér $S$, $S'$ a $S''$ takové, že $S_1 = S'_1, \ldots, S_m = S'_m$, $S_{m+1} = S''_1, \ldots, S_{m+n} = S''_n$. Jestliže nahradíme $S_i$ množinou $\bigcup_{0 < t \leqq 1} tS_i$ a $S'_i$ a $S''_i$ analogickými množinami, dostáváme

$$T - \{O\} \underset{f}{\equiv} (T' - \{O'\}) \cup (T'' - \{O''\}),$$

kde $T$, $T'$ a $T''$ jsou uzavřené koule s hranicí $S$, $S'$ a $S''$ a $O$, $O'$ a $O''$ jsou jejich středy.

Odtud se snadno odvodí $T \underset{f}{\equiv} T' \cup T''$. K tomu stačí ověřit, že platí $T - \{O\} \underset{f}{\equiv} T$ nebo, protože očividně $T - \{O\} \underset{f}{\equiv} T - \{x\}$ pro každé $x \in S$, že platí $T - \{x\} \underset{f}{\equiv} T$ pro nějaké $x \in S$. Ale to plyne z ekvivalence $S - \{x\} \underset{f}{\equiv} S$ (viz výše – množina $\{x\}$ je je spočetná), k níž pak stačí připojit množinu $T - S$.

Víme tedy, že jednotková koule je ekvivalentní dvěma jednotkovým koulím. Indukcí se snadno dokáže, že *sjednocení $n$ disjunktních koulí je ekvivalentní vzhledem ke konečnému rozkladu s jednou jednotkovou koulí pro každé $n \geqq 1$.*

Až dosud jsme nepoužili Cantorovy-Bernsteinovy vlastnosti. Ta nyní poslouží k přechodu od koulí k libovolným množinám.

Nechť $X \subset \mathbf{R}^3$ je ohraničená podmnožina, která obsahuje uzavřenou kouli $X'$ o poloměru $r > 0$. Množinu $X$ je možno rozložit na konečný počet částí, řekněme $n$, z nichž každá je obsažena v nějaké kouli o poloměru $r$. Označme $Z$ sjednocení $n$ disjunktních uzavřených koulí o poloměru $r$. Podle definice čísla $n$, $X$ je ekvivalentní vzhledem ke konečnému rozkladu jisté části $Z' \subset Z$. Na druhé straně, předchozí výsledek o jednotkových koulích se pomocí homotetie zobecní na koule o poloměru $r$, odkud plyne $X' \underset{f}{\equiv} Z$. Díky Cantorově-Bernsteinově vlastnosti dostáváme $X \underset{f}{\equiv} Z$, a tedy $X \underset{f}{\equiv} X'$.

Jestliže nyní $X$ a $Y$ jsou dvě ohraničené podmnožiny v $\mathbf{R}^3$ s neprázdnými vnitřky, pak obsahují koule $X'$ a $Y'$ téhož poloměru $r > 0$ a z $X \underset{f}{\equiv} X'$ a $Y \underset{f}{\equiv} Y'$ plyne $X \underset{f}{\equiv} Y$. Tím je paradox odvozen v celé jeho obecnosti.

## Poznámky

Týž paradox neplatí v $\mathbf{R}^n$ pro $n = 1$ nebo 2. Banach totiž dokázal, že existuje jednoduše aditivní míra, která je definována na všech podmnožinách v $\mathbf{R}^2$, je invariantní vzhledem k euklidovským pohybům a na borelovských množinách splývá s Lebesguovou mírou (tato konstrukce využívá komutativnosti grupy $SO_2$, což neplatí při $n \geqq 3$). K paradoxu tedy nedochází v $\mathbf{R}^2$. Jestliže však v definici $X \equiv Y$ nahradíme euklidovské pohyby přímými afinními transformacemi, které zachovávají Lebesguovu míru, pak paradox nastává i v dvourozměrném případě.

Nehledali jsme zde konstrukci, která by byla co nejvíce ekonomická. Raphael Robinson ukázal $S \underset{f}{\equiv} S' \cup S''$ s tím, že každá sféra $S'$, $S''$ je rozdělena na tři části.

V jednorozměrném případě řekneme, že $A \geqq B$, jestliže existuje 1-lipschitzovská bijekce $A$ na $B$, a $A \underset{f}{\geqq} B$ znamená, že existují rozklady $(A_1, \ldots, A_n)$ a $(B_1, \ldots, B_n)$ množin $A$ a $B$ takové, že $A_i \geqq B_i$ pro všechna $i$. Zde neplatí $[0,1] \underset{f}{\equiv} [0,10]$, ale platí $[0,1] \underset{f}{\geqq} [0,10]$.

Literatura


F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig (1914).

S. Banach, A. Tarski: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.* Fund. Math. *6* (1924) 244—277.

S. Banach: *Sur le probléme de mesure.* Fund. Math. *4* (1923) 7—33.

J. von Neumann: *Zur allgemeinen Theorie des Masses.* Fund. Math. *13* (1929) 143—173.


# Neutrina, Slunce a vesmír


*A. D. Černin. Leningrad*


Fyzika elementárních částic a astrofyzika — dvě vědecké oblasti, které se zabývají přírodními jevy nejmenších a největších prostorových měřítek — odhalují stále více jevů svědčících o hlubokých vzájemných vnitřních vazbách. Je neustále zjevnější, že vlastnosti elementárních částic do značné míry určují stavbu a vývoj hvězd, galaxií a celého vesmíru. Na druhé straně zastoupení jednotlivých elementárních částic a dokonce i jejich původ jsou určeny bouřlivými procesy během krátkého okamžiku po počáteční singularitě.

Nejnovější objevy, mezi nimi především určení klidové hmoty neutrina, které bylo americkými a sovětskými vědci oznámeno na jaře 1980, nás přiblížily k porozumění nejhlubších zákonitostí vesmíru. Ukazuje se, že odpověď na otázku, zda vesmír je