Vítěslav Jozífek

O neredukovatelnosti geometrie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 15 (1970), No. 1, 33--37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139167

O NEREDUKOVATELNOSTI GEOMETRIE

VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, Praha

Ve dnech 23. září až 2. října 1968 se konalo v Bukurešti mezinárodní kolokvium o aktuálních problémech vyučování matematice. Na něm přednesl prof. JEAN DE SIEBENTHAL z Lausanne zajímavý referát, v němž obhajoval závažnost geometrie pro vyučování a pro kulturu vůbec. Z této přednášky přinášíme některé zajímavé myšlenky.

Přednáška se dělí na pět částí. V první části se zabývá prof. Siebenthal dnešními pohledy na geometrii, zvláště na geometrii věnovanou zobrazování (deskriptivní geometrii). Její význam je dnes popírán a odsouván ve prospěch „živých" částí matematiky. Toto pohrdání by podle autora mohlo vést k vážným závěrům, že k odůvodňování v geometrii nemůžeme použít obrazů, ale že můžeme správně zdůvodňovat užitím nesprávných obrazů.

Jsou i snahy vyškrtávat tuto geometrii z předmětů vyučování. Mnozí vědci cítí takové nebezpečí. Je to např. GONSETH, který v jedné diskusi prohlásil: „Poněvadž mám oči, pracuji v geometrii". COXETER nazval své pojednání (v překladu J. H. BURKHARDTA) „*Unvergängliche Geometrie*". DIEUDONNÉ řekl kdysi „A bas Euklid", ale později v r. 1965 na rhodejském symposiu změnil svůj názor prohlášením „Je ne fais que la géometrie". Ostatně o závažnosti geometrie mluví také poznámka z knihy N. BOURBAKI: „*Eléments d'histoire des mathématiques*: „... ověřuje se velmi přesvědčivě, že je nutné zachovat terminologii, která pochází z klasické geometrie prostorů dvou- a třírozměrných a rozšířit ji na prostory n-rozměrné. Takto ji přeměníme na všeobecně užívaný jazyk současné matematiky, jazyk pružný a nesrovnatelně pohodlný" (vyd. 1960, str. 145).

Prof. Siebenthal se dále zamýšlí nad tím, zda má tato geometrie právo na určitou autonomii a jak ji upravit, aby se co nejlépe sjednotila s ostatní matematikou. Chce zjišťovat, proč právě ona je neredukovatelnou složkou nejen matematiky, ale i jiných oborů. Brání totiž dnešní matematice, aby se vzdálila životu a aby sklouzla do nesrozumitelnosti. O tom mluví v dalších částech své přednášky.

V druhé části se zabývá otázkou, co je vlastně geometrie? Geometrie elementární, nebo lépe geometrie v prvním stadiu, je studiem prostornosti (l'étendue) hmotných těles. Toto studium spočívá ve vidění, ve sledování poloh prvků prostoru, ve zkoumání konfigurací, ve vštípení současnosti do paměti. Podstatu tomuto stadiu dává již řecký původ slova geometrie, který určuje i její jazyk. Množstvím pokusů se utváří na této úrovni prostoru elementární geometrie, která užívá hmotných prostředků, náčiní. Ale monopol v geometrii nemají jen problémy jejího užití; jsou zde i problémy estetické. Vždyť architektura je vlastně geometrií toho, co CORBUSIER nazývá „l'éspace indicible" (nevýslovný prostor).

Představa prostoru se stává dále záležitostí logiky, prostorové nazírání je kontrolovatelné. Geometrie je dnes podrobena logickým úvahám. Hmotné těleso je uvažováno „rozumově", přičemž rozum tvoří logickou kostru, která je přístupná odůvodňování a není nikdy uzavřena dalšímu prohlubování. Přitom jde stále o hmotné těleso, o prostornost. Geometrie je potom složena z řady deduktivních soudů v oboru hmotného světa. Logické úvahy vytvářejí přesný pojem prostoru, jsou nástrojem nesrovnatelného dosahu, ale pouze nástrojem a pojmem. Představa, přímé vidění je stále prvotní. Toto pojetí není žádnou redukcí prostoru. Geometrie nechce být jen jakýmsi druhem kostry plastického, tvořivého jazyka. Přispívá k tomu, že tělesa jsou tvořena látkou nehmatatelnou, rozumovou, a tak se stává „výtvorem lidského ducha", „výtvorem rozumu" (être de raison).

Zbývá učinit teprve rozhodný krok. Prostorová tělesa vedou k těmto rozumovým výtvorům: bod, přímka, rovina, kulová plocha atd. Geometrie v nejvyšším stupni záleží v logickém chápání výtvorů rozumu (être de raison) v prostoru, uskutečnitelných, popř. neuskutečnitelných v hmotě, v látce přesně definované.

V tomto pojetí nelze geometrii odstranit do muzea elementární matematiky; ona naopak zasahuje do většiny oborů matematiky a kultury.

O tom mluvil profesor SIEBENTHAL v třetí části své přednášky, kterou bychom mohli nazvat: Geometrie je základní, nezjednodušitelnou součástí kultury.

Geometrie vystižená v poslední definici naplňuje všechny obory. Je nerozlučitelnou složkou matematiky. Prof. SIEBENTHAL cituje opět GONSETHA (z knihy *Les fondements des mathématiques*) „Geometrie může být jen uměle odtržena od svých intuitivních základů". Axiomatika sama je metodou; aniž by se chtěla zneuznat její důležitost, musí se jí přisoudit jen úloha srovnatelná se zákonodárnou činností.

Geometrie má v matematice své omezení. Odvolávání se na představu, i přes její užitečnost a plodnost, může se stát neužitečné, až škodlivé.

Význam geometrie pro fyziku je vcelku znám. Fyzikové mívají o prostoru znepokojující, až pohrdavé mínění. Fyziku buď matematizují, nebo se zajímají o matematické metody teoretické fyziky, poněvadž užívají ve svých studiích vcelku běžných analytických, popř. algebraických metod. Že moderní fyzika prolíná z velké části geometrií, ukázal např. A. EINSTEIN, když užil při svých objevech geometrických vlastností prostoru. Běžné fyzikální jevy mají své místo v Eukleidovském trojrozměrném prostoru a jejich studium vyžaduje logické znalosti. I když se považuje hmota za jakoli nedůležitou, vrací se vždy a zapadne do některého rámce matematiky, poněvadž je zatížena geometrií. Autor měl na mysli problémy výstavby vesmíru, který je v podstatě prostorový, ve smyslu trojrozměrnému prostoru eukleidovské geometrie. Geometrie je také nepostradatelná pro techniku. Cílem technika je realizovat v prostoru konstrukce podrobené před tím výpočtům. Proto musí mít inženýr prostorovou představivost, schopnost představit si svůj projekt stále prohloubeněji. Život technika je v ovládání prostorových konfigurací. Architekti mají ještě větší potřebu geometrie. Konstrukce inženýrů i architektů jsou díla materiálu i formy. Forma je pro architekta hlavní, zvláště po stránce estetické. Člověk se nespokojuje jen s užitkovou funkcí díla, žádá také krásu. Nestačí ovšem jen krása materiálu, žádá se i krása formy. V každé krásné konstrukci je myšlenka, idea, a tato idea tvoří i formu a kompozici forem, které patří do domény geometrie.

Technologie dodává stavbám pozoruhodné materiály, geometrie opět pozoruhodné tvary. Architekt musí mít znalost klasických forem, duševní schopnost tvořit formy a také prostředky tyto formy početně vystihnout. Profesor SIEBENTHAL si stěžuje, že dnešní architektura zdaleka nedosahuje úrovně klasické architektury v bohatosti forem staveb. Architektura se podobá umění. Zde cituje VAN GOGHA, který říká: „My ostatní umělci jsme zamilovaní do pořádku a symetrie", i A. DUERERA, který se neobával růstu logické estetiky mnohem dál, než je všeobecně známo. Jeho pokus považuje profesor SIEBENTHAL za velmi instruktivní. Geometrie vnáší, i když omezeně, do matematiky také filosofii.

Ve čtvrté části své přednášky uvažuje autor o geometrii uvnitř matematiky. V minulosti, od starověku počínaje, se dělila matematika na aritmetiku a geometrii. Slova matematik a geometr byla synonyma. Dnes způsobil pokrok matematiky, že jsou algebraici, analytikové, topologové, logici atd. a jen málokdo se nazve geometrem.

Lidská přirozenost a pravdivost nás zavazují, podle názoru přednášejícího, vyhledat pro geometrii oprávněné místo ve smyslu moderní struktury. Podle něho není jedna matematika, ale mnoho matematik; jedna matematika je však v jednotě, v níž jednotlivé členy rozkvétají podle svého vlastního genia, podle obecných, velmi srozumitelných zákonů se společným jazykem.

Geometrie v nejběžnějším slova smyslu je geometrie jedno- a dvourozměrná; na ni navazují Mongeova projekce a perspektiva. Jde o zobrazování průmětu rovin, ploch kuželových a válcových, rotačních a šroubových v rovnoběžné projekci Mongeově nebo v axonometrii, o projektivní geometrii. Geometrii nelze redukovat jen na rozsah nejběžnější geometrie. Takovouto matematiku by bylo možno považovat za fosilní, i když problémy, které se vztahují k euklidovskému prostoru, nejsou zcela vyčerpány. Omezováním geometrie na euklidovský prostor dáváme argument těm, kteří mají potíže s prostorovým viděním. Ti redukují geometrii na axiómy lineární algebry a na neomezené rozvíjení algoritmů, které mají v ní původ, bez jakéhokoli úsilí o přesné zobrazení, bez vztahu k realitě. Takový postoj není přijatelný. Z druhé strany vede algoritmizování k formalizování, které je bez východiska.

Geometrie ve smyslu definice z druhé části referátu existuje. K ověření stačí pohled na literaturu. Známe geometrii analytickou, algebraickou, topologickou, diferenciální. Geometrie se opírá o všecky prostředky početního kalkulu. Bylo by nemožné izolovat geometrii od jiných oborů. Nejbezprostřednější pokračování nebo prohloubení elementární geometrie je geometrie ve smyslu Kleinově. Prof. SIEBENTHAL se zabýval potom podrobněji pracemi ELIENA CARTANA, který dal matematickému světu nejkrásnější obrazy. Jde o práce o Lieových grupách a o symetrických prostorech, které přednášející považuje za klasické a nutné k výchově matematiků. Přednášející ukázal dále rozsah dnešní n-rozměrné geometrie v moderním pojetí podle níže připojeného přehledu literatury. Přitom nezapomínal na aplikace v dnešních vědeckých nebo i uměleckých oborech. Podrobněji se zabýval topologií.

Poslední část přednášky věnoval prof. SIEBENTHAL vyučování geometrii. Rozlišuje vyučování na střední škole (II. cyklu), dále kurs propedeutický v prvních dvou letech university a na něj navazující kurs pro pokročilé. Cílem vyučování matematiky na střední škole je zajistit přesnou představu umístění geometrie ve všeobecném vzdělání. Žák se má cvičit v logickém odůvodňování a seznamovat se s axiomatikou motivovanou fyzikálně. Kritika různých soustav byla několikrát provedena A. DELESSERTEM (viz článek FR. HRADECKÉHO v prvním čísle Pokroků r. 1969).

Profesor SIEBENTHAL mluvil o soustavě axiómů, o pojetí a o postupu vyučování geometrii na universitě podle své učebnice určené pro vysokou školu technickou v Lausanne. Žák druhého cyklu vyzkouší své schopnosti na základních prostorových útvarech, na konstrukcích jejich obrazů v rovnoběžných projekcích. Předmětem největší péče je logické vnímání prostoru. K tomu se použije modelů, stereoskopických obrazů, filmu atd.

Propedeutický kurs na universitě je určen nejen matematikům, ale i fyzikům, chemikům atd. Společný duch přednášek má být nanejvýš žádoucí. V koncepci vysloveně axiomatické je totiž jediná matematika a odtud jediný kurs, jediné vyučování. Pro výchovu matematiků-vědců i vychovatelů není pouze toto řešení vhodné. Pro obory negeometrické, které se však bez geometrie neobejdou, se nabízí redukovat geometrii na jakési technické kreslení. Ovšem rýsování v geometrii a v technickém kreslení je rozdílné v cílech i v postupu a liší se i od kreslení uměleckého. Rýsování v geometrii je náročné na logiku, kterou postrádá kreslení technické i umělecké. Vyučování geometrii by mělo být na křižovatce vyučování matematice, fyzice, technickým oborům i filosofii.

Minimum rozsahu tohoto vyučování je nezbytné a mělo by obsahovat: 1. Kurs, kde početní kalkul je rozhodující, aniž bychom opomenuli odkazy k prostoru; šlo by o obvyklý počet diferenciální a integrální. 2. Kurs, kde je rozhodující prostor opřený o kalkul, ale neredukovaný na jednoduchý kurs analytické geometrie a lineární algebry. V něm by byly uznávány jisté autonomie geometrie a bylo by v něm užito výpočtu pro lepší jejich spojení. Asi něco, co nazývá prof. SIEBENTHAL kursem plastické matematiky; naznačil jeho podrobnější rozvržení. Podobný kurs pro pokročilejší posluchače obsahuje diferenciální geometrii a teorii křivek a ploch. Podrobnosti jsou uvedeny v autorově učebnici.

Pokud se týče metodiky a prostředků vyučování, žádají se modely, zařízení podobné promítacím plátnům velkých rozměrů spolu s retroprojektory, klišé pečlivě připravené, kolekce klasických rysů a konstrukcí rozdělených na listy. Doporučuje se dát posluchačům do rukou tištěné přednášky, které by je osvobodily od psaní a dovolily by jim sledovat přednášku profesora, a dobře pochopit vyložené pojmy, nezbytné k dalšímu studiu. Profesor přednáší potom jen nejzávažnější pasáže a předkládá posluchačům celkový obraz disciplíny s určitými doplňky.

Autor se přimlouvá za modely konstruované studenty a za projekci některých dynamických pochodů, jako je otáčení, šroubování apod. Doporučuje samozřejmě i anaglyfy a ukázky příbuzností fyziky a geometrie. Významná jsou ovšem promyšlená cvičení jak počtem, tak výběrem. Ve svém referátě se autor také zmínil (bez hodnocení) i o programovaném studiu a o potřebě institutu, který by měl na starosti prostudování a realizaci zmíněných prostředků.

Problém vyučování je problémem získání znalostí spojených s asimilací kultury. Zkouška se nemá zúžit na povrchní inventování znalostí, faktů, ale má zjistit v jakém stadiu jsou schopnosti studenta samostatně řešit daný problém, i zjistit, co bylo získáno studiem posluchače, co je dáno všeobecným jeho vzděláním, osobností posluchače.

Proto by se mělo ve vyučování (pravděpodobně na universitě) přejít k individualizování studia tak, že se dá posluchači námět, látka, která by mu dovolila vzestupné sjednocování a scelení znalostí. Žák dostane svůj úkol, podklad pojmů, na které zachytí během školního roku fakta a jevy vyložené v přednáškách. Tento úkol, který je stále prohlubován a vyžaduje v geometrii řadu nákresů, popř. i model, řadu menších studií logických i analytických, je zkoumán podle přesných směrnic, ale s velkou dávkou volnosti. V přednášce předvedl profesor SIEBENTHAL ukázku na šroubové ploše. Problém řešil v axonometrii, analyticky i užitím diferenciální geometrie. Studoval obrys plochy, rovinné řezy na ploše, tečné roviny, délku křivek na ploše definovaných různými podmínkami, a to i v zobrazení (pokud je to vhodné) a výpočtem.

V závěru shrnul podstatné a zvláště podtrhl obory, které se bez geometrie neobejdou. Uvedl, že uchvacující je historie vztahů mezi geometrií jako oborem vědním a mezi možnostmi aplikací geometrie ve všech oborech lidské práce a kultury. Domnívá se, že tím prokázal opodstatněnost tvrzení, že geometrie má plné právo na svou neredukovatelnost, na svou autonomii ve službě matematiky a kultury.

Na konec bych rád připojil několik svých poznámek. Referát ukazuje na zaníceného ctitele geometrie, který svým teoretickým studiem oboru, jak ukazuje v podrobnostech i v nárysu práce, dospěl k přesvědčení o pravdivosti všech svých tvrzení. Pozoruhodné je, že podtrhuje harmonii geometrie a schopnost i důležitost aplikací ve všech oborech kultury. Podtržení aplikovatelnosti a jejího významu je novým pohledem, který se liší od předchozích názorů mnohých vědců. To bylo přijato na bukurešťském semináři jako závažné novum.

Literatura, na kterou bylo v článku upozorněno:

BOURBAKI: *Elements d'histoire des mathématiques* — Hermann, Paris 1960.

CARTAN E.: *Géometrie des groupes simples* — Annali di Math. 1927.

CARTAN E.: *La géometrie des groupes de transform.* Journal Mathém. pures et apliqués, *6* (1927).

DELESSERT A.: *Seminaire de la CIEM Echternach 1965.*

GONSETH: *Les fondements des mathématiques* Planchard, Paris 1926.

DE SIEBENTHAL J.: *Cours de la géometrie* (École polytechnique de l'Université Lausanne, 1968).