Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Karel Čulík

Modely skutečnosti a modely teorií

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 14 (1969), No. 6, 249--254

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139301`

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XIV — ČÍSLO 6

MODELY SKUTEČNOSTI A MODELY TEORIÍ

KAREL ČULÍK, Praha

Tento příspěvek je odpovědí na výzvu v [1], aby byla podána obecnější definice modelu, než je u A. TARSKÉHO, a současně je opravou nedopatření a nedorozumění, které se v [1] vyskytly.

Je smutným, nicméně však historickým faktem, že termínu model užívají nematematici ve zcela jiném významu než matematici či vlastně logici. Přitom místo „ve zcela jiném významu" by bylo lépe říci, že „v přesně opačném významu", neboť oba významy se skutečně mají k sobě tak jako dvoučlenné vztahy „býti otcem" a „býti synem" nebo vztahy „vlevo" a „vpravo" (tedy jde o konverzní binární relace).

„V mnoha oblastech lidského poznání (např. v ekonomii, lingvistice, biologii atd.) užíváme termínu model ve smyslu matematického (tj. symbolického) popisu zkoumané skutečnosti a nikoli ve smyslu záměrně sestrojeného zařízení, s jehož pomocí tuto skutečnost napodobujeme (např. modely přehrad, mostů, různých technických zařízení apod.). V obou případech však jde o *modely skutečnosti.* Naproti tomu již po celá desetiletí se termín model užívá v matematice a logice ve smyslu příkladu uvažované matematické disciplíny nebo uvažované axiomatické teorie (nějaký příklad svazu nebo grupy není nic jiného než *model teorie* svazů nebo grup atd.)". ([2], 1^{1-8}.)

V případě, že nám jde o jedinou konkrétní část skutečnosti, např. o pražskou dopravní síť, je jejím modelem např. její plán a ten pro potřeby zpracování na počítači lze nahradit množinovým modelem, tj. množinou symbolů, které odpovídají stanicím, množinou jiných symbolů, které odpovídají jednotlivým trasám mezi stanicemi, množinou dvojic (stanice, trasa), které zachycují, která trasa v které stanici končí, množinou dvojic (trasa, číslo), které udávají délky tras v nějakých jednotkách atd. Zkrátka jde o množinu nějakých prvků, nějaké její podmnožiny, binární relace, ternární relace apod., tedy to, co se u N. BOURBAKIHO nazývá matematickou strukturou nebo u A. GRZEGOREZYKA matematickým oborem nebo to, co se — patrně ve speciálnějším případě — nazývá systémem (a to je opět nový módní termín, v [1] objasněný zcela nedostatečně).

Matematická teorie je množinou jistých formulí, např. těch, které se dají podle předepsaných pravidel odvodit z několika předem daných a nazývaných axiómy. Více o matematické teorii a jejích modelech si lze přečíst v každé logice (ostatně stačí i to, co je ve [2] nebo [4]). Zde je pouze důležité to, že modely teorií jsou vždy právě a jenom (matematické) struktury.

Tedy struktury mohou být modelem skutečnosti i modelem teorie. „*V případě, že* máme matematickou strukturu, která je na jedné straně modelem skutečnosti a na druhé straně je současně modelem nějaké teorie, je ovšem takováto teorie se skutečností spojena velice těsně, a my víme zcela přesně jak, protože je zřejmě možné udat její skutečnou sémantiku či interpretaci, takže formální věty dokázané v této teorii budou samozřejmě platit ve skutečnosti. To je ostatně smysl a cíl každé teorie. Z tohoto hlediska bychom mohli také říci, že daná teorie je modelem skutečnosti (když modelem skutečnosti rozumíme její matematický popis), ovšem když bychom doplnili příslušnou sémantiku (či interpretaci), pokud se nepředpokládá jako dobře známá“. [2], 8_{23-14}). „Jako příklad uvedené situace může posloužit nejstarší matematická teorie, totiž euklidovská geometrie, jejíž axiómy zformuloval D. HILBERT. Jejím nejznámějším modelem je karteziánský model a ten je dobře známou matematickou strukturou pravoúhlé třírozměrné analytické geometrie. Skutečnost, že analytická geometrie je modelem reálného prostoru, v němž žijeme, je zkušeností rovněž dostatečně prokázána.“ ([2], 9^{3-8}.) „Příklad euklidovské geometrie vytvořené během 2500 let mnoha lidmi ukazuje dostatečně jasně, že šlo o to sestrojit teorii, která by úplně popsala prostor, v němž žijeme, tj. teorii, která by byla modelem (ve smyslu modelu skutečnosti) našeho prostoru.

V Hilbertových axiómech geometrie není ani stopy po tom, že by měly odkazovat ke skutečnosti, a že tedy by bylo třeba axiómům a základním predikátům (býti bodem, přímkou a rovinou, incidence mezi body, přímkami a rovinami, shodnost úseček a úhlů) přiřadit jejich význam (či interpretaci) ve skutečnosti. Tuto potřebu však velice silně pociťoval EUKLEIDES ve svých Základech, když se pokoušel definovat bod, přímku, atd. Dnešní matematik má pro to jen shovívavý úsměv, ale experimentální fyzik nebo stavitel mostů a tunelů patrně nikoliv.“ ([2], 9^{13-24}.)

Uvedeným příkladem je dostatečně jasně prokázáno, že je nutno, a že to má hluboký smysl, rozlišovat oba významy termínu model. To je základní nedorozumění v [1]. K němu se však připojuje druhé, totiž neporozumění pojmu matematické teorie ve smyslu A. TARSKÉHO. O tom svědčí tato tvrzení: „Když se buduje určitá vědecká disciplína“,... „Primitivní pojmy... používáme, aniž vysvětlujeme jejich významy“... „Jejich význam se obvykle považuje za evidentní“ ([1], 127_{17-14}) a dále „Podobně... axiómy jsou taková tvrzení, která považujeme za platná, aniž je dokazujeme. Jejich platnost se nám obvykle jeví jako evidentní.“ ([1], 127_{14-12}.)

V matematické teorii ani individuové proměnné ani predikátové proměnné nemají žádný význam. Když jim autor nějaký význam připisuje, nemá na mysli samotnou teorii, ale již nějaký její model. Rovněž u axiómů se v matematické teorii žádná jejich platnost nepředpokládá, jsou prostě výchozími formulemi pro odvozování. Když autor hovoří o jejich platnosti, a to i dále, že „axiómy... zůstávají pravdivými výroky“ ([1], 127_{3-2}), pak to zase znamená, že má na mysli nějaký model a nikoli samotnou teorii.

Konečně třetí základní nedorozumění se týká termínu pojem a proměnná. Je třeba vskutku přiznat, že význam termínu proměnná není ani v samotné logice dosud dostatečně objasněn a že termín pojem ze současné logiky vůbec zmizel (a lze uvést i důvody, že neprávem). To však neospravedlňuje způsob, jak těchto termínů užívá autor v [1], když např. říká, že „proměnné pojmy... nemají významu" ([1], 127_{8-7}), že „reálné číslo" je proměnný pojem a že „$\sqrt{2}$" je neproměnný pojem ([1], 127_5) apod. Pojem je vždy jazykovým výrazem, který označuje — v nejjednodušším případě — množinu předmětů majících jistou vlastnost. Jiná věc je, že se často tímto jazykovým výrazem označuje jen jediný z uvedené množiny předmětů. Ale v žádném případě nelze hovořit o proměnných pojmech. A „$\sqrt{2}$" je vlastně term, ale jinak je to individuová konstanta.

Přitom je zcela nepřípustné a matoucí směšovat jazyk a jeho výrazy se skutečností a jejími předměty, o nichž jazykem hovoříme, např. „určité věci, tj. neproměnné pojmy" nebo že „primitivní pojmy nahradíme věcmi" ([1], 127_{4-1}), nebo se autor táže, zdali „by bylo možné připustit existenci hypotetické teorie, kterou bychom mohli v nějakém smyslu ztotožnit s materiálním světem" ([1], 129^{1-2}).

Vraťme se však zpět k pojmu modelu skutečnosti, který zřejmě autor obhajuje proti modelu teorie podle Tarského. Ale o tomto svém pojetí modelu by přece jen mohl říci více, než že „model je realita ve vztahu k nějaké jiné realitě" ([1], 126^{13-14}), neboť takto neodliší ani matematické modely od fyzikálních modelů skutečnosti.

„Studium reálných systémů (tj. reálných struktur) simulací záleží v nahrazení simulovaného systému jiným simulujím, který se (z jistého hlediska) podobá simulovanému a který je pro studium příhodnější. Jsou-li stupeň a typ podobnosti postačující, lze některé výsledky získané na simulujícím systému přenést na původní simulovaný systém. Jsme-li oprávněni přenášet výsledky ze simulujícího systému na simulovaný, nazývá se simulující systém modelem simulovaného.

Obecně je sotva možné stanovit, kdy je nějaký simulující systém modelem simulovaného, tj. jaký stupeň a jaký typ podobností zaručují oprávnění přenášet požadované výsledky.

Naproti tomu jsou dobré zkušenosti se simulací v mnoha jednotlivých případech. Otázka, zdali daný simulující systém je modelem simulovaného, musí být velice často zodpověděna empiricky a induktivním usuzováním. Avšak nakonec každé induktivní usuzování se vlastně opírá o obecnou metodologickou zásadu, která předpokládá, že „podobné systémy mají i podobné vlastnosti". Tedy pojmy podobnosti, simulace a modelu jsou skutečně fundamentální.

Existují důležité rozdíly mezi typy podobnosti požadované po simulujících systémech.

Na jedné straně se tato podobnost mezi simulovaným a simulujícím systémem týká skoro všech fyzikálních, chemických a dalších vlastností a současně i prostoročasových vztahů. Např. malé přehrady nebo mosty, které jsou modely skutečných velikých přehrad nebo mostů, patří do této skupiny.

Jediný rozdíl mezi vyšetřovaným systémem a jeho modelem je pouze v rozměrech a všechny jejich fyzikální vlastnosti nejen že jsou podobné, ale jsou přímo totožné. Proto také simulující systém musí být vyšetřován stejným způsobem jako systém skutečný, tj. empiricky měřením a zkouškami.

S tímto typem modelů těsně souvisí různé druhy analogových počítačů, protože zde se opět požaduje jistá podobnost (ale nikdy již totožnost, tj. stupeň podobnosti je nižší než v předešlém případě) fyzikálních vlastností a měření je rozhodujícím způsobem, jak vyšetřovat model". ([3], 234—235^{1-10}.)

„Na druhé straně se podobnost mezi simulovaným systémem a simulujícím nemusí týkat žádných fyzikálních ani chemických vlastností, ani prostorových vztahů, ale pouze rozlišitelnosti jednotlivých situací v simulovaném systému pomocí odpovídajících „situací" v simulujícím systému. Je-li čas důležitý, je požadována podobnost v časovém uspořádání také. Modely tohoto typu se často nazývají *abstraktní* nebo *symbolické*, popř. *matematické*, čímž se chce vyjádřit, že povaha modelu je zcela nepodstatná. Tyto *rozlišovací modely* vždy sestávají z jistých jazykových výrazů (odpovídající „situace" nejsou ničím jiným než jednotlivými výpověďmi o skutečných situacích), ačkoliv samozřejmě i každý výraz má svůj fyzikální základ" ([3], 23^{13-29}). „Čeho si na reálném systému, tj. na zkoumané části skutečnosti všímáme a čeho nikoli, je jednoznačně určeno odpovídajícím rozlišovacím modelem, který není ničím jiným než výčtem jmen všech uvažovaných předmětů (nazývaných individuové konstanty), výčet jmen všech uvažovaných vlastností a vztahů (nazývaných predikátové konstanty) a konečně výčet všech primitivních výroků, které vyjadřují nejjednodušší situace reálného systému takovým způsobem, že každé dvě různé reálné situace nebo dva předměty nebo vlastnosti či vztahy jsou jednoznačně navzájem rozlišitelné pomocí odpovídajících výrazů zvoleného jazyka." ([3], 238_{3-1}, 239^{1-7}.)

Právě popsané požadavky rozlišitelnosti jsou zřejmě těsně spjaty s požadavkem izomorfismu mezi reálným systémem a rozlišovacím modelem. A samozřejmě, že o izomorfismu se vždy hovoří mezi dvěma (matematickými) strukturami. Není však jasné, co se vlastně míní, když se říká, že „Zakladatel teorie systémů, von Bertalanffy, vyšel ze strukturální analogie (izomorfismu) mezi zákony různých vědních disciplín. Teorie systému studuje abstraktní modely, abstraktní systémy, v nichž by měla být obsažena struktura problémů různých vědních oborů". ([1], 130_{19-16}.)

Na objasnění autor popisuje jisté matematické řešení jisté úlohy, která vede na známý exponenciální zákon, ale o uváděných analogiích neříká nic, ačkoliv právě ty by měly být objasňovány. Přitom se zdá být přirozené popsat i tyto případy pomocí Tarského pojetí, když zavedeme tzv. kvantitativní predikáty, což jsou predikáty spolu s kvantitativním údajem (takže sem se zahrnou všechny výsledky měření). Významem kvantitativního predikátu může být jistý měřicí postup uvažované veličiny. Základními pojmy uvažované teorie jsou tedy dva takovéto kvantitativní predikáty: v modelech této teorie vždy jeden z nich považujeme za čas (měřený nějak a v nějakých jednotkách) a druhý má v různých případech různý význam, např. to může být počet jedinců vymírající populace nebo váha hladovějícího zvířete atd. (rozumí se vždy, že je dán empirický postup a jsou zvoleny jednotky měření). Kromě toho jsou kvantitativní údaje t a p_t obou predikátů vázány exponenciálním zákonem $p_t = \exp(-\lambda t)$, kde λ je nějaká konstanta. Nejde tedy o nic jiného než o známou věc, že touž rovnicí lze popsat průběhy nejrozmanitějších dějů. Jinými slovy, oba predikáty mohou mít různé interpretace či různé významy. Ovšem takovéto modely Tarski neuvažoval, neboť připouštěl jen *modely extenzionální*, tj. vlastnosti byly interpretovány jako podmnožiny předmětů, dvoučlenné vztahy jako množiny uspořádaných dvojic předmětů atd., zatímco v předchozím případě se uvažují *modely intenzionální*, kdy se jako významy vlastnostem a vztahům přiřazují rozhodovací či poznávací postupy. Teprve intenzionálními významy jsou (v předepsané oblasti) určeny i významy extenzionální, neboť pomocí příslušných rozhodovacích postupů se dá o každém předmětu rozhodnout, zdali rozhodovacímu postupu vyhovuje, či nikoliv (čili zdali nějakou vlastnost má nebo nemá).

Rozhodující zde je, že v posledním případě naznačené teorie exponenciálního zákona je možno uvést řadu různých modelů, a to různých intenzionálně (protože se týkají různých částí a stránek skutečnosti), ačkoliv ve všech těchto případech platí matematicky týž exponenciální zákon, a tedy popřípadě všechny tyto modely jsou extenzionálně izomorfní.

Jinými slovy, bylo by průzračnější neuvádět jen ryze matematické znění exponenciálního zákona, když obě proměnné t a p_t jsou prostě jen reálné proměnné, ale uvádět výslovně různá fyzikální znění tohoto zákona, když doplníme u obou proměnných příslušný fyzikální rozměr nebo výše uvedenou interpretaci, co která proměnná znamená. „Vlastní empirické poznávání záleží v aplikaci jednotlivých rozhodovacích a měřicích postupů (odpovídajících vlastnostem a vztahům) na zvolené předměty a v zjišťování situací. Výsledkem tohoto poznání je zjištění, zda postup vedl k očekávanému (obecně řekněme pozitivnímu) výsledku nebo nikoli (tedy vedl k negativnímu výsledku).

To je v případě rozhodovacích postupů, tj. u kvalitativního poznání, zatímco u měřicích postupů, tj. u kvantitativního poznání, je výsledkem číslo". ([4], 539_{17-11}.) Zdá se tedy, že toto rozlišení extenzionálních a intenzionálních modelů dovoluje zcela uspokojivě objasnit otázku fyzikálních analogií, aniž se co měnilo na Tarského pojetí.

Nakonec je třeba ještě připomenout jednu důležitou okolnost, která snad byla příčinou nedorozumění: totiž matematická teorie se nazývá kategorická, když všechny její modely jsou izomorfní. Např. ani teorie grup ani teorie cyklických grup nejsou kategorické, protože existují neizomorfní cyklické grupy, ale naproti tomu Hilbertova teorie eukleidovské geometrie kategorická je. A právě v případech kategorických teorií se stává, že se samotná teorie zaměňuje s nějakým svým význačným modelem.

Literatura

[1] VAJDA J.: *Modelování ve vědě a technice*, Pokroky MFA *14* (1969) 123—131.

[2] ČULÍK K.: *On Mathematical Models and the Role of the Mathematics in Knowledge of Reality*, Kybernetika *2* (1966), 1—13.

[3] ČULÍK K.: *On Simulation Methods and on some Characteristics of Simulation Languages*, Proceedings of the IFIP Working Conference on Simulation Programming Languages in Oslo 1967, North-Holland, Amsterdam, 1968, 234—247.

[4] ČULÍK K.: *Jazyky pro empirii a teorii*, Kybernetika *4* (1968), 538—547.

FAKTOROVÉ PROSTORY

STANISLAV TRÁVNÍČEK, Olomouc

Tento článek se zabývá přenesením základních pojmů teorie faktorových grup (viz [1]) do teorie lineárních prostorů (viz např. [5]) a studiem některých vlastností faktorových prostorů. První část článku je rázu teoretického, ve druhé části je uvedeno praktické použití pojmu faktorový prostor v některých matematických disciplínách.

FAKTOROVÉ PROSTORY

Uvažujme lineární prostor $\mathfrak{L}$ nad číselným tělesem T koeficientů a zvolme libovolný jeho podprostor $\mathfrak{A}$. Na $\mathfrak{L}$ nyní definujeme relaci R.

Definice 1. Dva prvky $x, y \in \mathfrak{L}$ jsou v relaci R, jestliže $(x - y) \in \mathfrak{A}$, tj. $xRy \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - y) \in \mathfrak{A}$.

Lemma 1. Relace R je ekvivalencí, tj. je reflexívní, symetrická a tranzitivní.

Důkaz: (R): $(x - x) = 0$ (nulový prvek prostoru $\mathfrak{L}) \in \mathfrak{A} \Rightarrow xRx$ pro každé x;
(S): je-li xRy, pak $(x - y) \in \mathfrak{A}$, ale poněvadž $\mathfrak{A}$ je lineární prostor, je rovněž $(y - x) \in \mathfrak{A}$, tj. yRx;
(T): je-li xRy, yRz, pak $(x - y) \in \mathfrak{A}$, $(y - z) \in \mathfrak{A}$, tedy $(x - z) = [(x - - y) + (y - z)] \in \mathfrak{A}$, takže xRz.

Definice 2. Dva prvky $x, y \in \mathfrak{L}$, které jsou v relaci R podle definice 1, nazýváme *ekvivalentní vzhledem k podprostoru* $\mathfrak{A}$.

Lemma 2. Ekvivalence prvků vzhledem k podprostoru $\mathfrak{A}$ definuje rozklad prostoru $\mathfrak{L}$ na třídy vzájemně ekvivalentních prvků.

Důkaz: Množinu všech těch prvků $z \in \mathfrak{L}$, pro něž zRx, nazveme třídou prvku