

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Julius H. Hlavatý

„Nová moderní matematika“ ve Spojených státech

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 18 (1973), No. 6, 330--335

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139543>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1973

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

vyučování

„Nová moderní matematika“ ve Spojených státech

*Julius H. Hlavatý, New Rochelle, USA**

Rád bych se dotkl tří věcí: nejprve matematiky tradiční, pak matematiky, které vyučujeme dnes (nazýváme ji „moderní“ matematikou), a nakonec matematiky, které budeme vyučovat zítra (označme ji „novou moderní“ matematikou).

Kritizovat starou školskou matematiku jste slyšeli dosti často. Je pravda, že tato kritika, k níž jsem sám při různých příležitostech přispěl, se někdy přeháněla. Jakkoliv slabé bylo dřívější vyučování včetně osnov a učebnic, přece jen vyuchovalo dost matematiků, fyziků i jiných vědeckých pracovníků. Dnes je jich ovšem zapotřebí vychovat mnohem víc.

Jak vypadalo tradiční vyučování matematice?

Zpravidla to bylo mechanické počítání. Žáci posunovali desetinnou čárku, převraceli zlomky, vypůjčovali si bez vrácení atd., aniž by si často uvědomovali, proč

*) Zkrácený překlad projevu, jež profesor Hlavatý přednesl na výročním kongresu Sdružení učitelů v Albertě (Alberta Teacher's Association) v roce 1969. Projev byl otištěn anglicky v kanadském časopise The Mathematics Council Newsletter a pak francouzsky v časopise Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques (Zprávy sdružení profesorů matematiky, roč. 1971, str. 761), vydávaném v Paříži.

tak činí. V algebře se pozornost soustřeďovala na bezduché měnění znamének. Řešily se tak zvané „praktické“ úlohy, jednou o naplňování a vyprazdňování nádrží, podruhé o stavění zdí, potřetí o míchání kapalin, naštěstí bez povinnosti napít se vzniklé bryndy.

A v geometrii? Nejdříve jsme žáky desátého ročníku**) přesvědčovali, že dosud nedovedou myslet, a pak jsme je učili myslet dokazováním nezáživného repertoáru pouček jasných každému, kdo se umí jen trochu dívat. Nakreslili jsme třeba trojúhelník se dvěma shodnými stranami a položili otázku „Co dovedete říci o úhlech přilehlých ke třetí straně?“ Ačkoliv byli žáci skálopevně přesvědčeni, že i tyto úhly jsou shodné, bylo o tom nutno podat důkaz. Lepší to nebylo ani v trigonometrii, kde se po měsíce řešily obecné trojúhelníky s obdivuhodnou, ale zbytečnou i falešnou přesností.

Jaké byly důsledky takového vyučování pro žáky? Úplně se utlumil jejich zájem a umrtvil tvůrčí přístup k matematické skutečnosti. Vyučování „přežili“ jen „vzporní“ jedinci, kteří nám nepřestávali klást nepřijemné otázky. Ještě zhoubnější následky jsme nesli podle mého mínění my učitelé. Po několika letech takového vyučování jsme začali ztrácet pocit opo-

**) Školská soustava v USA není jednotná. Dosud bylo nejběžnější členění na 6 + 6, to jest na šestiletou školu základní (elementary school) a na šestiletou školu střední (high school). V posledních letech se začíná prosazovat členění na 8 + 4 (osmiletá základní a čtyřletá střední škola). V obou případech se ročníky číslují od 1 do 12. V každém ročníku se dříve zpravidla vyučovalo jen jednomu oddílu matematiky, např. v devátém jen algebře, v desátém jen planimetrii, v jedenáctém pokračování algebry a ve dvanáctém jeden semestr trigonometrii a jeden semestr stereometrii. (Pozn. překl.)

jení, které matematika může a má vzbuzovat. Naše matematické myšlení se zplošťovalo a pojmy zjalovělé ustavičným omíláním se nám staly tak všedními, že jsme nemohli pochopit, proč nejsou žákům jasné hned od prvního okamžiku, kdy je s nimi seznamujeme.

Jakého pokroku jsme dosáhli?

Domnívám se, že se nám podařilo vyjasnit pojem čísla i aritmetické operace, která je funkcí zobrazující množinu dvojic čísel na množinu čísel. Vysvětlení tohoto pojmu není snadné, ale začínáme s ním už v nejnižších ročnících. Vedeme také žáky k tomu, aby odůvodňovali, proč postupují tím či oním způsobem, mají-li určit součet nebo součin. Naši žáci se dopracovávají k jasnějšímu pohledu na svět pravidel i zavedených úmluv. Při dobrém vedení chápou, že číselné množiny vytváří sám člověk k tomu, aby mu pomáhaly při řešení stále obtížnějších úkolů. Přirozená čísla odpovídají jen na otázky „Kolik? Jaký počet?“ Avšak k měření už potřebujeme zlomky i čísla desetinná a pro zvládnutí situací, v nichž záleží též na směru, vytváříme čísla opatřená znaménkem. Věřím, že dnes děti chápou, že tento vývoj není náhodný a že odpovídá našim rostoucím potřebám. Uvědomit si tuto skutečnost je asi důležitější než učení některým algoritmům, jimž jsme v minulosti věnovali tolik času a námahy. Zavedli jsme pojem proměnné a používáme pojmu množiny, neboť víme, že dovoluje sjednotit různá odvětví matematiky.

S algebrou začínáme už v elementární škole, brzy zavádíme pojem výrokového vzorce a řešíme nejen rovnice, ale i nerovnice. Mnozí z vás si vzpomenu na nepřijemnou sprchu, kterou zažili při

prvním setkání s diferenciálním počtem, když se ocitli tvář v tvář nerovnostem a nerovnicím. Za celou dobu osmileté základní a čtyřleté střední školy jste se dříve nesetkali s veličinami, které by se sobě nerovnaly. Nic překvapujícího, že jejich použití až při diferenciálním počtu bylo odstrašujícím nárazem, jež mnozí nepřekali a zanechali studia, ač z nich možná mohli vyrůst i dobří matematikové.

Číselné množiny otvírají široké perspektivy do matematických struktur. Prvním velkým překvapením je těleso reálných čísel, kde se ocitáme před uzavřeným vesmírem, z něhož zdánlivě není východu. V předcházejících množinách bylo vždy možno podniknout něco nového, např. v množině nezáporných čísel klást neřešitelné úlohy, jež vedly k vytvoření čísel záporných.

Menší úspěchy v reformním hnutí má geometrie. Příčinou toho patrně je, že tu začínáme nejméně zajímavou partií, logickou výstavbou a axiomatikou eukleidovské geometrie. Eukleidovy *Základy* nejsou učebnicí geometrie, ale dílem zralého matematika, a obsahují vše, co bylo za Eukleidových časů známo z aritmetiky, teorie čísel, algebry i geometrie. Na neštěstí se dnes za „Eukleidovo dílo“ vydává snůška nejméně zajímavých vět vybraných ze třinácti knih *Základů*. Modernizační vlna se snažila toto monstrum přetvořit vyplněním logických mezer, které z dnešního hlediska v Eukleidově díle jsou a které snadno pochopíme, uvědomíme-li si chudost aparátu, jež měl Eukleides k dispozici. Ti, kdo se snažili opravit logickou stavbu, nemohli pořídit nic jiného než situaci ještě zhoršit, a to z toho prostého důvodu, že zavést např. spojitost znamená začít s geometrií v září a dostat se k rovno-ramennému trojúhelníku před velikono- cemi. Jsem přesvědčen, že žáci desátého,

ba ani dvanáctého ročníku netouží po tom vědět toho tolik o základech geometrie, ale chtějí se naučit samotné geometrii. Samozřejmě jsme i vyučování geometrie zlepšili, a to nejen zavedením souřadnicové metody, ale i včleněním stereometrických úvah do planimetrické látky. Místo staré početní trigonometrie pěstujeme trigonometrii analytickou, která je dnes důležitější a mnohem zajímavější.

Současné učebnice, ať už vydávané obchodně nebo k účelům experimentálním, jsou lepší než kdykoliv v minulosti. Věřím, že také vyučování má mnohem vyšší úroveň, hlavně v důledku masového zapojení učitelů do modernizačního hnutí v posledních deseti letech. Pochopili jsme, že se musíme znovu začít učit, protože právě studium je hlavní pákou pokroku ve vyučování. Snad bych to neměl připomínat, ale osobně jsem považoval za ztracený každý den, ve kterém jsem se ve škole něčemu novému nenaučil.

Máme nyní více učitelů, kteří znají lépe matematiku, ale také více matematiků, kteří více rozumějí vyučování. Protože modernizace byla společným dílem učitelů, matematiků i psychologů, naučili jsme se všichni něčemu z toho, co jsme předtím neznali. Je to důležité proto, že až budeme připravovat další etapu, budeme mít kolektiv lidí, kteří budou moci řešit nové úkoly s větší znalostí věci, než tomu bylo dříve.

Máme-li být upřímní, musíme uznat, že i při rekonstrukci matematického vyučování došlo k přestřelkům zrovna tak, jako tomu bylo v přežívajícím systému. Stará matematika nebyla ve skutečnosti nikdy tak špatná, jak jsem ji na začátku charakterizoval, a nová matematika není zase tak zázračná, jak jsem ji právě líčil. Když jsme „objevili“ množiny, ztratili jsme téměř hlavu, byly pro nás novou

hračkou. Každá nová učebnice začínala dvěma kapitolami o množinách; jimi jsme vyplnili první dva měsíce, ale v dalším vyučování jsme se k nim nevraceli. Pak jsme objevili různé číselné soustavy – hotoivé kouzlo! Jaká radost probírat tuto novou látku, např. násobení v číselné soustavě o základu sedm – přímo fantastické! I zde jsme ztratili hlavu a mnohé učebnice upadaly do deliria... Vzpomínám na profesora, který začal vyučovat podle učebnic vypracovaných skupinou SMSG (School Mathematics Study Group – Studijní skupina pro školskou matematiku) a zhlédl se v trojkové soustavě. Snad by bylo rozumné věnovat jí dvě až tři vyučovací hodiny, ale ten člověk s tím ztrávil půldruhého měsíce, a když jsem se s ním posledně setkal, dával žákům přepočítávat logaritmy podle základu tři.

Poctivé zhodnocení toho, co jsme v posledních letech vykonali, by nicméně vzdor všem přestřelkům potvrdilo, že jsme v matematickém vyučování učinili velký pokrok.

Kterým směrem se dáme nyní?

Máme před sebou několik možných cest. Když Evropani zpozorovali, co podnikáme, řekli si: „To je dobrá myšlenka, ale proč nepřebudovat matematické vyučování od základu?“ To byl začátek jejich modernizačního hnutí a teď mají před námi náskok pěti let. Nutno ovšem uvážit, že střední školy skoro ve všech evropských zemích mají přísně výběrový charakter. Kdybyste si prohlédli učebnice vydané v Evropě během posledních čtyř let, nevěřili byste, že jsou určeny pro střední školy, neboť v Evropě přizpůsobili matematické vyučování současnému stavu matematické vědy.



I. mezinárodní kongres o vyučování matematice v Lyonu 1969. Zleva: Jul. Hlavatý (USA), A. I. Markuševič (SSSR), H. Freudenthal (NL).

Čím se budou vyznačovat nové osnovy? Především tím, že se pojmy moderní matematiky budou zavádět velmi záhy. Možná, že některým z vás běhá mráz po zádech, když vidí, jak se taková hesla jako maticová algebra najednou objevují v učebnicích pro osmý, ba i pro sedmý ročník. Pochopitelně nejde na této úrovni o maticovou algebru v universitním podání. S některými jejími prvky však můžeme s pochopením seznámit i mladší žáky, později se k nim vracet a postupně je skloubit do logicky uspořádaného systému, který se už nebude členit na tradiční oddíly, jak jsme je studovali dříve – na aritmetiku, algebru, geometrii a trigonometrii atd., ale bude tvořit jediný celek – matematiku.

Co se týče geometrie, začínala a bude v přiměřené podobě i nadále začínat velmi brzy, už v mateřské škole, neboť již v tomto věku mají děti mnoho názorných představ o tvarech i o velikosti. Geometrie znamená mnohem víc než dokazování pouček na základě určitého počtu axiomů. Vyžaduje pozorování geometrických útvarů, jejich přemísťování, sledování obrazů v zrcadle, obracení na rubu a přehýbání na listu papíru.... Nic z toho jsme se dříve v geometrii neučili, ač je to velmi zajímavé a do geometrie to patří.

Dvě důležitá hesla by se měla v osnovách objevit už v nižších ročnících a průběžně probírat až do nejvyšších tříd: statistika s pravděpodobností a počítáče. Nauka o pravděpodobnosti je z nejmladších matematických disciplín a proniká do všech oblastí aplikované i „čisté“ matematiky jako nástroj ke zvládnutí náhodných jevů. Druhou vymožeností jsou počítáče, nezbytný pomocník současné civilizace. Víc než polovina vašich žáků s nimi bude tím nebo oním způsobem jed-

nou pracovat. Do kterého ročníku je zařadit? Nelze přece s nimi lidi seznamovat teprve v okamžiku, kdy je budou potřebovat! I zde bude nutno začít velmi záhy.

Z druhé strany bychom měli uvážlivě zmírnit zdůrazňování některých oddílů, kterým jsme dosud přikládali nepřiměřeně velkou důležitost. Patří mezi ně i množiny, které jsou sice pojmem základním, ale jejichž význam nelze přeceňovat. Podobně bychom měli klást menší důraz na numerické počítání. Nehlásám jeho odstranění, ale jsem přesvědčen, že na prvním místě stojí důkladné pochopení základních pojmů.

Závěrem bych rád podal nástin toho, co by podle mého soudu měla obsahovat budoucí učebnice pro sedmý ročník*): 1. Konečné číselné množiny. 2. Množiny a operace. 3. Funkce. 4. Záporná celá čísla. 5. Pravděpodobnost a statistika. 6. Celá čísla (znovu). 7. Mřížové body v rovině. 8. Množiny a relace. 9. Transformace roviny. 10. Úsečky, úhly, shodnost. 11. Prvky teorie čísel. 12. Racionální čísla.

Některé z těchto novinek vás možná ohromí, ale stejnou odezvu vzbudilo před lety zavedení pojmu množiny a funkce. Jmenovaná hesla zůstanou nedělitelnou součástí osnov, které se i v budoucnosti dále budou zlepšovat a rozšiřovat.

Přeložil František Dušek

*) Zřejmě se tím míní první ročník střední školy podle členění 6 + 6. Viz pozn.***) na str. 330. (Pozn. překl.)

O autorovi:

Dr. Julius Hlavatý je Američan slovenského původu. Pochází z Piešťan, kde za první světové války vychodil ľudovou (tehdy ještě maďarskou) školu a po převratu měšťanskou (již slovenskou) školu. Z důvodů sociálních se jeho rodiče vystěhovali do USA a tak v roce 1921 odejel jako čtrnáctiletý chlapec za svou matkou do New Yorku, kde vystudoval střední školu a učitelskou kolej (Teachers College), po jejímž absolvování v roce 1929 vyučoval na středních školách v New Yorku a nakonec se stal profesorem na učitelské koleji.



Prof. Julius Hlavatý se významně účastní práce v řadě matematických společností, přispívá metodickými statěmi do odborných časopisů, řídí vydávání sborníků, přednáší na letních školách pro učitele a napsal několik metodických příruček.

Vysokého uznání se prof. Hlavatému dostalo zvolením za presidenta Národní rady učitelů matematiky (The National Council of Teachers of Mathematics – NCTM) v roce 1969. Význam této funkce vynikne, řekneme-li, že NCTM je vrcholnou institucí sdružující kolem padesáti tisíc učitelů matematiky v USA a v Kanadě.

V uplynulých letech navázal prof. Hlavatý na mezinárodních kongresech přátelské styky s našimi předními pracovníky a udržuje s nimi spojení výměnou publikací apod. Mimo jiné uveřejnil v časopise The Mathematics Teacher (roč. 1968, str. 80) obširnou stať o naší matematické olympiádě.