Martin Macháček
Teorie dynamických systémů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 27 (1982), No. 3, 162--173

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139705`

Vím, je to celkem nevinné, ale dělat by se to nemělo. Tak totiž vznikl středověk. Neboť – jak říkal národní umělec Jan Werich [2] – „*Středověk si vymysleli lidé žijící v novověku, aby si odreagovali svůj Minderwertigkeitskomplex, aby, jaksi, se jim dostalo poct a uznání, které třeba by se jim dostalo až po smrti, a oni nechtějí čekat, nuž, tudíž, teda zesměšňují způsob myšlení a práce svých prapraotců a pradědů a nazývají ho středověkem a zapomínají, že touto metodou konsekventně jejich prapraděti a pravnuci se budou dívat zpátky z jejich novověku na jejich středověk a budou říkat: ‚No, no, no, no, nóó...!‘.*“

Literatura

[1] *Písně žáků darebáků.* Přeložil a vydal R. Mertlík. Svoboda, Praha 1970, 292.

[2] WERICH J.: Scény z her Osvobozeného divadla. Soubor gramofonových desek Supraphon DM 15258–60, Praha 1966.

Poděkování

Paní J. Táborské děkuji za přepsání textu. Dr. M. Fojtíkové, Z. Kučerové, dr. M. Lencovi, dr. M. Rozsívalovi a účastníkům luhačovického semináře, zejména doc. dr. J. Formánkovi, CSc., děkuji za připomínky k textu. Prof. dr. H. Boerschovi, prof. dr. Ch. Fertovi, prof. dr. C. Jönssonovi, dr. T. Komodovi a prof. dr. E. Zeitlerovi děkuji za laskavé svolení k reprodukci jejich původních snímků difrakčních a interferenčních jevů.

Autor

Teorie dynamických systémů

Martin Macháček, Ondřejov

1. Úvod

Boltzmannovu formulaci tzv. ergodické hypotézy z r. 1871 lze považovat za jeden z počátků teorie dynamických systémů (DS). Boltzmann chtěl teoreticky odůvodnit, proč při provedení série náhodně rozložených měření na určitém uzavřeném hamiltonovském systému o mnoha stupních volnosti (typickým modelem zde byl klasický plyn) výsledky vykazují stejné statistické vlastnosti, jako kdyby měření byla prováděna současně na souboru identických nezávislých systémů rozložených rovnoměrně po tenké slupce mezi dvěma plochami konstantní energie ve fázovém prostoru (takový soubor byl později nazván *mikrokanonickým*). Význačnost rovnoměrného rozložení systémů souboru je dána Liouvilleovou větou, podle níž právě takové rozložení zůstává konstantní v čase, necháme-li všechny systémy vyvíjet se podle Hamiltonových pohybových rovnic. Je tedy Lebesgueova míra na této slupce invariantní vůči pohybovým transformacím, a celý problém lze abstraktněji formulovat takto: Mějme prostor M s algebrou měřitelných množin $\mathcal{M}$ a měrou P normovanou tak, aby $P(M) = 1$; mějme grupu transformací $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, T_t: $M \to M$ je $1 - 1$ a na, a zachovává míru P, tj. $A \in \mathcal{M}$ právě když $T_t A \in \mathcal{M}$, a potom $P(A) = P(T_t A)$; každé T_t je tedy automorfismem prostoru s měrou M. Je pak pro každé $x \in M$ a $f \in L_1(M)$ časová střední hodnota $\hat{f}(x) = \lim 1/T \int_0^T f(T_t x)\, \mathrm{d}t$ asymptoticky rovna fázové střední hodnotě $\langle f \rangle = \int_M f \, \mathrm{d}P$? Jestliže za f zvolíme charakteristickou funkci χ_A, pak bude $\hat{\chi}_A(x)$ relativní dobou, kterou systém vycházející ze stavu x stráví v množině A, zatímco $\langle \chi_A \rangle$ bude relativní velikostí této množiny. Bude-li odpověď na položenou otázku kladná, dostaneme při měření jednoho systému v náhodně zvolených okamžicích stejnou střední hodnotu makroskopické veličiny f, jako kdybychom ji měřili v tomtéž čase na všech systémech mikrokanonického souboru.

Odložme zatím odpověď na tuto otázku do kapitoly 3. Ukazuje se, že objekt výše definovaný, totiž $(M, \mathcal{M}, P, \{T_t\})$, je vděčným předmětem matematického zkoumání. Doznal samozřejmě během času mnoha zobecnění. Čas t nemusí být nutně spojitý; mnohé důkazy se podstatně zjednoduší, omezíme-li se na diskrétní čas $t \in \mathbb{N}$, a pak tedy $T_n = T^n$ budou mocniny jediného zobrazení T. Dále T nemusí být invertibilní, nebude tedy automorfismem, nýbrž jen endomorfismem prostoru s měrou, a v tom případě $\{T_t\}$ není grupou, ale jen pologrupou. V každém případě nazýváme takové objekty *dynamickými systémy*; tento článek by měl být přehledem různých aspektů a aplikací jejich teorie, je však zřejmé, že na prostoru celkové míry 10 tiskových stran může být nanejvýš nástinem přehledu, a to ještě značně subjektivním. Získá-li čtenář zájem o podrobnější informace o této disciplíně, mohu mu (kromě prací citovaných v jednotlivých kapitolách dále) doporučit následující pěkné přehledy.

Základem metrické teorie DS je teorie prostorů s měrou; tu podává např. Rochlin [1,2]. Halmosova knížka [3] je velmi hezkým výkladem ergodické a spektrální teorie DS (byla napsána ještě před zavedením entropie DS). Entropická teorie je snad nejlépe vyložena v Rochlinově článku [4], velmi obsažném a nevyžadujícím speciálních předběžných znalostí; lze ji však nastudovat např. i u Billingsleye [5], který se věnuje i aplikacím v teorii čísel a v teorii kódování, nebo v knížečce Smorodinského [6] (ta však obsahuje dost tiskových chyb). Obě poslední práce se nezabývají spektrem; Sinajova skripta [7] a jeho práce [8] obsahují spektrální i entropickou teorii DS, jsou však poněkud náročnější. Speciálním případem DS jsou tzv. *klasické* DS, totiž hladká zobrazení na hladké varietě; kniha Arnolda a Aveze [9] se jimi zabývá podrobněji. Je-li klasický DS velmi silně a stejnoměrně nestabilní, nazývá se *Anosovovým* systémem nebo U-systémem; definice a vlastnosti těchto systémů jsou např. v práci Anosova a Sinaje [10]. Spíše topologickým aspektům DS, kvalitativnímu chování trajektorií, stabilitě, ap., je věnována kniha Němyckého a Stěpanova [11] (obsahuje také kapitolu věnovanou invariantním měrám). Abstraktní topologickou teorií klasických DS se zabývá Smaleův článek [12]. Obdobným otázkám, avšak se zřetelem k aplikaci v nebeské mechanice, se věnuje také Moser [13]. Práce, které jsem zde uvedl, jsou do značné míry uzavřené v tom smyslu, že vyžadují pouze obecné matematické znalosti a potřebný aparát si samy budují. Čtenář, který se teorii DS věnuje hlouběji, sáhne po referativní práci [14], v níž jsou obsáhle citovány a popsány původní práce až do r. 1975. Tam nebo v některém z výše uvedených článků a monografií najde také odkazy na některé významnější práce, které v dalším textu jen naznačuji, avšak z nedostatku místa je neuvádím v seznamu literatury. (Při korektuře byl seznam literatury doplněn o nedávno vyšlou monografi [17].)

2. Ergodické věty

Použijeme jako modelu opět hamiltonovský systém. V jeho fázovém prostoru definujme množinu $M(E_1, E_2) = \{x : H(x) \in (E_1, E_2)\}$, kde $(H(x) = H(p, q)$ je hamiltonián, E_1 a E_2 konstanty). Protože při pohybových transformacích zůstává bod stále na téže energetické nadploše, je $M(E_1, E_2)$ uzavřené vůči těmto transformacím, a je-li B algebra borelovských množin, λ Lebesgueova míra, je $(M(E_1, E_2), B, \lambda/\lambda(M), \{T_t\})$ dynamický systém. Hned je patrné, že pro takový systém ergodická hypotéza neplatí: stačí vzít $E = (E_1 + E_2)/2$, $f(x) = 1$, je-li $H(x) \in (E_1, E)$, $f(x) = 0$ jinak, a potom $\langle f \rangle \in (0, 1)$, zatímco $\hat{f}(x) = f(x) = 0$ nebo 1 pro každé x. Je to zřejmě důsledkem rozložitelnosti M v řadu disjunktních podmnožin (v našem případě energetických nadploch) uzavřených vůči pohybovým transformacím. Je-li M nerozložitelný tímto způsobem, tedy z $A \subset M$, $A \subset T_t^{-1}A$ pro každé t plyne $P(A) = 0$ nebo 1 (neexistují netriviální invariantní podmnožiny), nazýváme příslušný dynamický systém *ergodickým* nebo též *metricky tranzitivním*. Vyloučíme-li neergodické systémy, projde v ostatních skoro každá trajektorie každou množinou nenulové míry, a k důkazu ergodické hypotézy stačí už jen dokázat, že ji zaplní „stejně hustě", tj. že v ní stráví čas úměrný její míře. Elementárními úvahami lze problém ještě o něco zredukovat. Pro jednoduchost se omezme na diskrétní čas, a f nechť je omezená funkce. Jestliže posloupnost $f_N(x) = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)$ v nějakém smyslu konverguje k funkci $\hat{f}(x)$, pak $\hat{f}$ bude invariantní, $\hat{f}(Tx) = \hat{f}(x)$, neboť $f_N(Tx) - f_N(x) = (f(T^N x) - f(x))/N \to 0$. Celkem snadno nahlédneme, že jedinými invariantními funkcemi vůči ergodickému DS jsou konstanty s.v.; je tedy $\hat{f} = \text{const.}$, a z invariantnosti míry P plyne $\langle f \rangle = \int f \, \mathrm{d}P = \int f(Tx) \, \mathrm{d}P = \int f_N \, \mathrm{d}P = \int \hat{f} \, \mathrm{d}P = \hat{f}$. Klíčovým momentem je tedy důkaz konvergence posloupnosti f_N, ostatní plyne již z toho že míra P je invariantní. Spokojíme-li se s konvergencí ve smyslu L_2, není důkaz příliš obtížný, a příslušný výsledek je znám jako von Neumannova neboli statistická ergodická věta (EV). Důkaz, že posloupnost konverguje s.v., je mnohem obtížnější; podal jej Birkhoff a příslušná věta je známa jako Birkhoffova neboli individuální EV. Protože je fundamentálním výsledkem, uvedeme její úplné znění:

Buď T míru zachovávající zobrazení na σ-konečném prostoru s měrou $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Buď f integrabilní funkce na tomto prostoru. Potom existuje integrabilní invariantní funkce $\hat{f}$ taková, že $f_N \to \hat{f}$ s.v. Je-li $\mu(M) < \infty$, je navíc $\int_M \hat{f} \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$.

I když impuls k dokazování EV vyšel původně z fyziky, ukázalo se, že věta sama je mnohem důležitější v různých oblastech matematiky než ve fyzice. Háček je totiž v tom, že Boltzmannova hypotéza plyne z EV až za předpokladu, že DS je ergodický, a dokázat ergodicitu realistických fyzikálních systémů je dosud prakticky nevyřešený problém. Mnohem jednodušší je dokázat ergodicitu některých transformací v teorii čísel nebo v teorii pravděpodobnosti; zde nás tedy aplikace EV přivede jednoduchým způsobem k významným výsledkům. Ukážeme si to na třech příkladech.

1. *Borelův zákon normálních čísel* praví, že skoro všechna čísla $x \in (0, 1)$ mají asymptotickou relativní frekvenci jedniček i nul ve svém dvojkovém rozvoji $x = 0, x_1 x_2 ..$ rovnu $1/2$. Definujme transformaci $Tx = 2x \bmod 1$, tedy $0, x_1 x_2 \ldots \mapsto 0, x_2 x_3 \ldots$ (*Bernoulliho endomorfismus*); snadno zjistíme, že T zachovává Lebesgueovu míru ($\lambda(T^{-1}A) = \lambda(A)$ pro každý interval typu $(k/2^n, (k+1)/2^n)$). Lze také poměrně jednoduše ukázat, že T je ergodické (vůči λ). Borelův zákon pak plyne z EV, použijeme-li funkce $f(x) = x_1$, t.j. $f = \chi_{(1/2, 1)}$, neboť $f(T^k x) = x_{k+1}$, $\hat{f}(x) = \lim (1/n) \sum_{k=1}^{n} i_k$ je právě asymptotická relativní frekvence jedniček v rozvoji čísla x, a $\langle f \rangle = \int_0^1 \chi_{(1/2, 1)}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Totéž lze ovšem provést i v jiné než ve dvojkové soustavě (viz konec příští kapitoly).

2. *Silný zákon velkých čísel.* Zobecníme předcházející případ a dáme mu současně jinou interpretaci. Mějme experiment, jehož výsledek i nechť nadejde s pravděpodobností $p(i)$. Za prostor M nyní vezměme množinu všech posloupností možných výsledků $x = (i_1, i_2, \ldots)$ (tj. $x_k = i_k$, $k = 1, 2, \ldots$), a za míru na tomto prostoru vezměme součinovou míru, $P(x_{k_1} = i_{k_1}, \ldots, x_{k_n} = i_{k_n}) = p(i_{k_1}) \ldots p(i_{k_n})$. Opět definujme Bernoulliho posuv vztahem $(Tx)_k = x_{k+1}$. Stejně jako v prvním případě T tuto míru zachovává a je vůči ní ergodické (a je-li $p(0) = p(1) = 1/2$, máme přechozí příklad a P přejde v λ). S funkcí $f(x) = x_1$ opět dokážeme, že střední hodnota výsledků experimentu $\hat{f}(x) = \lim (1/n) \sum_{k=1}^{n} x_k = \text{const} = \sum_i i\, p(i)$ pro s.v. posloupnosti experimentů (tedy s pravděpodobností 1).

3. *Řetězové zlomky.* Číslo $x \in (0, 1)$ můžeme psát právě jedním způsobem ve tvaru

$$x = \frac{1}{a_1 + x_1} = \frac{1}{a_1 +} \quad \frac{1}{a_2 + x_2} = \frac{1}{a_1 +} \quad \frac{1}{a_2 +} \quad \frac{1}{a_3 + x_3} = \ldots$$

atd., kde $a_1, a_2, \ldots$ jsou celá čísla a $x_k \in (0, 1)$. Zřejmě $x_{k+1} = Tx_k = 1/x \bmod 1 = \{1/x_k\}$, $a_{k+1} = [1/x_k]$. Transformace T zachovává na $[0, 1)$ Gaussovu míru $P(\mathrm{d}x) = (\ln 2)^{-1}\, \mathrm{d}x/(1 + x)$ a je vůči ní ergodická. Vezmeme-li za f charakteristickou funkci množiny $\{x : a_1(x) = k\} = (1/(k+1), 1/k)$, plyne z EV, že asymptotická relativní frekvence čísla k v posloupnosti $a_1(x), a_2(x), \ldots$ je

$$\frac{1}{\ln 2} \int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

pro s.v. x (s.v. vůči Gaussově, a tedy i Lebesgueově míře).

3. Invariantní míry

V reálných fyzikálních problémech, s výjimkou důležitého, ale speciálního případu hamiltonovských systémů, máme obvykle zadán jen fázový prostor M a transformace $\{T_t\}$; naším prvním úkolem pak je určit, jaké všechny invariantní míry takový prostor připouští, a vybrat z nich případně nějaké vhodné. Invariantních měr (IM) bude většinou více, tak např. pro hamiltonovské systémy to jsou všechny míry P_E s „hustotou" úměrnou $\delta(H(x) - E)$ a všechny jejich konečné či nekonečné lineární kombinace. Při jejich hledání bychom se intuitivně snažili využít ergodické věty, podle níž $(1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f(T^k x)$ konverguje „pro s.v. x" k invariantní funkci $\hat{f}(x)$; pro ta x, pro něž to platí, je $l_x f = \hat{f}(x)$ lineární nezáporný funkcionál, a tedy podle Rieszovy-Markovovy věty definuje míru, která je invariantní díky invarianci f. Tak jednoduché to sice nebude, neboť důkaz EV sám netriviálním způsobem využívá existence IM, avšak myšlenka hledat IM jako slabou limitu měr rovnoměrně rozložených po úseku trajektorie nějakého bodu když délka tohoto úseku jde k nekonečnu, k cíli skutečně vede. Jestliže jsme až dosud mluvili o M jen jako o prostoru s měrou, naznačuje termín „slabá limita", že bude třeba dát M také topologii. (Obecnějším problémem hledání IM bez ohledu na topologii se zabývá Halmos; samozřejmě dochází jen k dosti obecným výsledkům.) Tato topologie nemůže být ale na DS úplně nezávislá. Algebra měřitelných množin $\mathcal{M}$ musí být generována otevřenými množinami této topologie, míra P musí být regulární a T_t musí být spojité zobrazení pro každé t. Nebudeme-li se snažit o největší obecnost a spokojíme-li se s realistickým případem metrických prostorů, postačí nám Bogoljubovova a Krylovova teorie IM (spíše než v originále dostupná v knize Němyckého a Stěpanova [11]); podle jejich věty je postačující podmínkou k existenci aspoň jedné konečné IM kompaktnost metrického prostoru M. Pro ilustraci významu tohoto kritéria a vztahu mezi DS a topologií na něm uveďme jednoduchý příklad. Za DS vezměme posun doprava na reálné ose $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $T_t x = x + t$. V obvyklé topologii $\mathbb{R}$ není kompaktní a konečná IM pro $\{T_t\}$ neexistuje. Přidáme-li k $\mathbb{R}$ bod ∞ a k topologii jeho okolí (jednobodová kompaktifikace), bude jediným spojitým rozšířením $T_t \infty = \infty$, a existuje konečná IM δ_∞ (δ_x je míra soustředěná v bodě x: $\int f \, d\delta_x = f(x)$).

Bogoljubovova a Krylovova teorie obsahuje tyto hlavní body: Množina normovaných nezáporných měr na kompaktním metrickém prostoru je sama slabě kompaktní, proto pro každé x existuje hromadný bod posloupnosti měr $P_x^N = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{T^k x}$ a tento hromadný bod je sám invariantní normovanou měrou. Máme-li tím zaručenu existenci aspoň jedné IM, můžeme mluvit o množinách absolutně nulové míry ($P(A) = 0$ pro každou invariantní míru P) a o množinách „skoro všech" bodů ($P(A) = 1$ pro každou normovanou invariantní míru P). Pak lze ukázat, že posloupnost P_x^N má dokonce slabou limitu P_x pro s.v. x, a že pro s.v. x je tato limita ergodickou měrou; naopak, každá ergodická IM je rovna P_x pro některé x. Je-li S libovolné okolí bodu x, pak pro s.v. x je $P_x(S) > 0$. Body, pro které platí tvrzení posledních dvou vět, nazveme regulárními (jejich množina U_R má v každé IM míru 1); hledanou strukturu IM na prostoru M pak určují tato tvrzení:

1. Uzávěr $\bar{U}_R$ množiny regulárních bodů je *minimálním atraktorem* DS (tj. nejmenší uzavřená množina A taková, že $\chi_{\tilde{A}}(x) = 1$ pro každé x a každé okolí $\tilde{A}$ množiny A).

2. Vztah $x \sim y$ když $P_x = P_y$ je ekvivalencí na U_R, takže U_R lze rozložit na disjunktní *ergodické komponenty*. Ty jsou invariantní vůči T_t a na každé z nich spočívá právě jedna ergodická normovaná IM. Dvě takové míry jsou tedy buď stejné, nebo vzájemně singulární. Celý prostor lze rozložit na množinu $M - U_R$ míry 0 (to je množina bodů, v jejichž blízkosti setrvá každá trajektorie nejvýše konečnou dobu) a na jednotlivé ergodické komponenty. V případě hamiltonovských systémů je $M = U_R$ a ergodickými komponentami jsou právě energetické nadplochy (za předpokladu, že jsou samy již dále nerozložitelné). Obecná IM je lineární kombinací ergodických IM nebo slabou limitou těchto kombinací; IM je ergodická právě tehdy, nelze-li ji vyjádřit jako netriviální lineární kombinaci jiných IM. V případě Bernoulliho posunu (kap. 2, příklad 2) ke každé dvojici p_0, $p_1 \in (0, 1)$, $p_0 + p_1 = 1$, existuje právě jedna ergodická IM; příslušná ergodická komponenta sestává ze všech čísel $x \in (0, 1)$ takových, že v jejich dvojkovém rozvoji je relativní asymptotická frekvence nul p_0 a jedniček p_1. Je-li $p_0 = p_1 = 1/2$, je tato míra Lebesgueova λ, jinak dostáváme různé „cantorovské" míry singulární vůči λ i vzájemně vůči sobě. Klasické Cantorovo diskontinuum je až na množinu absolutní míry 0 sjednocením všech ergodických komponent pro Bernoulliho posun $Tx = 3x \bmod 1$ s $p_1 = 0$, p_0 a p_2 libovolným (relativní asymptotické frekvence číslic 0, 1, 2 v trojkovém rozvoji).

4. Směšování

Podle EV je DS ergodický, právě když $\lim (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} P(T^{-k}A \cap B) = P(A)\,P(B)$ pro každé měřitelné A, B. Z matematického hlediska lze formulovat silnější vlastnosti, zaměníme-li hořejší Cesarovu limitu silnější limitou posloupnosti $P(T^{-k}A \cap B)$; z fyzikálního hlediska pak existuje několik závažných důvodů bránících uznat ergodicitu za vlastnost postačující k vysvětlení pozorovaného chování termodynamických systémů. Především lze odhadnout, že doba, za kterou trajektorie DS proběhne s požadovanou hustotou celou energetickou nadplochu, je astronomicky veliká, v každém případě nesrovnatelná se skutečně pozorovnými relaxačními časy. Kromě toho samotná ergodicita nevylučuje ještě takové chování DS, při němž ze znalosti určitých makroskopických veličin v jednom čase můžeme předpovídat jejich hodnoty pro libovolně velké časy záporné nebo kladné; to je v rozporu se zkušeností, podle níž nejsme s to zpětně určit, z jakého makrostavu se systém dostal (za relaxační čas) do rovnovážného stavu, ať určíme makroskopické veličiny v rovnovážném stavu sebepřesněji.

Kromě ergodicity DS definujme tedy nejprve

slabé směšování: $\lim\limits_{N\to\infty} 1/N \sum_{k=0}^{N-1} |P(T^{-k}A \cap B) - P(A)\,P(B)| = 0$,

(silné) směšování: $\lim\limits_{k\to\infty} P(T^{-k}A \cap B) = P(A)\,P(B)$,

vždy pro každé dvě měřitelné množiny A, B. Existuje ještě mnoho dalších typů směšování, které mají význam jen ve speciálních případech (slabé směšování, mezisměšování (intermixing), částečné směšování, r-násobné směšování, ap). Existuje však jeden velmi důležitý pojem, *K-směšování* (též Kolmogorovovo), které je ze všech dosud uvedených nejsilnější; dříve než jej budeme definovat, zavedeme několik pojmů, jež jsou samy o sobě velmi významné v teorii DS. Buď $\xi = (A_1, A_2, \ldots, A_N)$ konečný rozklad M na konečný počet měřitelných množin, dále $T^{-1}\xi = (T^{-1}A_1, \ldots, T^{-1}A_N)$. Je-li $\eta = (B_1, \ldots, B_Q)$ další měřitelný rozklad, je jejich součin $\xi\eta$ (nebo též $\xi \vee \eta$) rozkladem M na všechny možné průniky $A_i \cap B_j$. Označme nakonec $\xi_{-n}^{-m} = T^{-n}\xi \vee T^{-n+1}\xi \vee \ldots \vee T^{-m}\xi$ a $\xi_{-\infty}^{-m}$ příslušnou limitu. (Je-li $B \in \xi_{-n}^{-m}$, obsahuje B právě všechny ty body $x \in M$, pro něž $T^m x \in A_r$, $T^{m+1}x \in A_s, \ldots, T^n x \in A_u$, kde celá čísla $r, s, \ldots, u$, vybraná z $(1, \ldots, N)$, určují právě o které B jde. Zadáme-li $B \in \xi_{-\infty}^{-m}$, zadáme tím právě do kterých množin $A \in \xi$ padne $T^k x$ pro k od času m výše.)

Teď tedy můžeme již definovat

K-směšování: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{B\in\xi_{-\infty}^{-n}} |P(A \cap B) - P(A)\,P(B)| = 0$

pro každé měřitelné A a měřitelný rozklad ξ.

Příklady z kapitoly 2 se týkaly vesměs K-směšujících systémů; ostatně i když je poměrně snadné nalézt ergodické a nesměšující systémy, nalezení slabě a nikoliv silně, nebo silně a nikoliv K-směšujících systémů je již velice netriviálním problémem.

Směšování a K-směšování lze charakterizovat i pomocí „zákonů 0–1", známých z teorie pravděpodobnosti. K tomu nejprve poznamenejme, že $\xi \geqq \eta$ podle definice znamená, že každé $A \in \xi$ je podmnožinou jistého $B \in \eta$ (tedy ξ je zjemněním η); píšeme-li $\xi_{-\infty}^{-n} \searrow \eta$, znamená to, že η je největší rozklad, pro nějž platí $\xi_{-\infty}^{-n} \geqq \eta$ pro všechna n (takový rozklad vždy existuje pro klesající posloupnost $\xi_{-\infty}^{-n}$ a označuje se též Tail ξ). Nakonec písmenem v se značí triviální rozklad obsahující jen množiny míry 0 a 1. Pak lze formulovat

Kolmogorovův zákon 0–1: *DS je K-směšující, právě když* $\xi_{-\infty}^{-n} \searrow v$.

Suchestonův zákon 0–1: *DS je silně směšující, právě když každá rostoucí posloupnost přirozených čísel obsahuje takovou vybranou posloupnost,* $n(1), n(2), \ldots$, *že*

$$T^{-n(k)}\xi \vee T^{-n(k+1)}\xi \vee \ldots \searrow v$$

když $k \to \infty$.

Interpretujeme-li ξ jako rozklad fázového prostoru na makrostavy, lze to slovy vyjádřit takto: Ať známe jakkoliv dlouhý průběh makrostavů jisté trajektorie K-systému, můžeme o chování této trajektorie při $t \to \pm\infty$ říci vždy jen takové výroky, které platí, i pro skoro všechny ostatní trajektorie. (Analogicky pro směšující systémy.) Vidíme, že vlastnosti K-systémů dosti dobře odpovídají vlastnostem reálných termodynamických systémů s relaxačním časem: ať známe průběh makroskopických veličin jakkoliv dlouho, nelze nikdy předpovídat jejich průběh libovolně dlouho dopředu (nebo dozadu: neboť existuje-li T^{-1}, jsou T i T^{-1} K-systémy současně). Skutečně lze ukázat, že definujeme-li rozumně relaxační čas DS, je K-směšování nutnou a postačující podmínkou pro existenci takového času.

Existuje snad dosud jediný důkaz ergodicity (a současně K-směšování) pro poněkud realistický fyzikální systém: je to Sinajův důkaz týkající se „biliardu", tj. bodu pohybujícího se mezi hladkými vypuklými tělesy a pružně se od nich odrážejícího. V poznámce pod čarou ve svém článku [15] uvádí Sinaj, že jsou dokázány tytéž vlastnosti i pro „plyn z kulečníkových koulí". Domněnka, že termodynamické systémy jsou (všechny nebo ve své většině) K-směšující, vypadá proto dnes dosti věrohodně.

5. Spektrum dynamických systémů

Na prostor s měrou $(M, \mathscr{M}, P)$ je nasnadě postavit nějaký prostor funkcionální a Hilbertův prostor $L_2(M, P)$ má tu výhodu, že v něm lze provádět hlubokou spektrální analýzu. Grupa nebo pologrupa míru zachovávajících transformací $\{T_t\}$ na M pak indukuje grupu nebo pologrupu unitárních transformací $\{U_t\}$ na L_2 vztahem $(U_t f)(x) = f(T_t x)$ (někdy se též definuje jako $f(T_{-t}x)$). Naopak kdy lze k danému $\{U_t\}$ nalézt $\{T_t\}$? Nutnými podmínkami je zřejmě to, aby U_t převáděl omezené funkce v omezené a aby $U_t(f.g) = U_t f.U_t g$ pro omezené $f, g \in L_2$; lze ukázat [3], že to jsou také podmínky postačující.

Protože $U_t 1 = 1$, má U_t vždy vlastní hodnotu 1; budeme-li mluvit o *spektru* DS, myslíme tím spektrum unitárního operátoru U_1, často s vyjmutím této triviální jedničky. Spektrum úzce souvisí s ergodickými vlastnostmi DS, a to nám umožňuje často převést úlohu do dobře propracované oblasti funkcionální analýzy. Tak na první pohled je zřejmé tvrzení, že DS je ergodický právě tehdy, je-li 1 jeho jednoduchou vlastní hodnotou. Je-li ergodický, pak všechny jeho vlastní hodnoty jsou jednoduché a tvoří podgrupu rotací jednotkové kružnice v komplexní rovině a jeho vlastní funkce mají konstantní absolutní hodnotu. Zhruba lze říci, že ergodické vlatnosti DS jsou tím silnější (ergodicita, slabé, silné, K-směšování), čím je jeho spektrum „hladší". Platí totiž tyto věty:

DS je slabě směšující, právě když jeho spektrum je spojité (tj. neatomické).

DS je směšující, jestliže má lebesgueovské spektrum (tj. abs. spojité vůči λ). Připomeňme zde, že unitární operátor má n-násobné lebesgueovské spektrum, právě když lze nalézt takovou bázi funkcí $\{f_{i,j}\}_{i \in I, j \in \mathbf{N}}$, že $Uf_{i,j} = f_{i,j+1}$, a n je kardinalita I.

Je-li DS K-směšující, potom má spočetně násobné lebesgueovské spektrum. (Ale jsou známy systémy s takovým spektrem, které nejsou K-směšující.)

Podle spektrální věty jsou operátory U_1 na $L_2(M_1, P_1)$ a U_2 na $L_2(M_2, P_2)$ unitárně ekvivalentní právě tehdy, mají-li stejný spektrální typ. Nechť tyto operátory jsou indukovány míru zachovávajícími transformacemi T_1 na M_1 a T_2 na M_2. Můžeme pak říci, že tyto dvě transformace jsou izomorfní, tj., že existuje měřitelné zobrazení R: $M_1 \to M_2$ s měřitelnou inversí R^{-1}, které je s.v. prosté a na, takové, že $P_1(A) = P_2(RA)$ pro měřitelné $A \subset M_1$, a $RT_1 = T_2 R$? Snadno nahlédneme, že unitární ekvivalence je nutnou podmínkou izomorfismu, a tedy spektrální typ je invariantem vůči izomorfismu. Má-li DS čistě diskrétní spektrum, je tento invariant úplný: dva DS se stejným diskrétním spektrem jsou již izomorfní [3]. Jak je tomu v ostatních případech, nebylo jasno až do r. 1958, kdy Kolmogorov definoval nový invariant, *entropii* dynamického systému, který dokázal rozlišit i DS stejného spektrálního typu (např. všechny Bernoulliho posuvy, které jsou K-systémy, a mají tedy spočetné Lebesgueovo spektrum) ve třídy, mezi nimiž je izomorfismus vyloučen. Později Ornstein ukázal, že Kolmogorovova entropie je úplným invariantem mezi Bernoulliho posuvy; v obecném případě tomu však tak není. Další invariant, Kušnirenkova entropie dokáže rozlišit mezi systémy, které mají nulovou Kolmogorovovu entropii.

6. Entropie

Náhoda a předurčenost od sebe nemají daleko. Zcela deterministické DS jsou definovány jako míru zachovávající transformace na prostoru s pravděpodobnostní měrou $(M, \mathcal{M}, P)$; avšak na tomtéž prostoru lze definovat i náhodné proměnné a stochastické procesy. Měřitelná funkce f: $M \to \mathbb{R}$ je z hlediska teorie dynamických systémů makroskopickou veličinou na fázovém prostoru M, z hlediska teorie pravděpodobnosti náhodnou proměnnou na prostoru elementárních jevů M. Funkce $g(x, t) = f(T_t x)$ je stacionárním stochastickým procesem.

Pojem „stochastický proces" v sebe zahrnuje na jedné straně zcela triviální funkce konstantní a periodické v čase a na straně druhé procesy s hodnotami v různých časech statisticky zcela nezávislými, např. házení mincí (vezmeme-li za T Bernoulliho posuv z příkladu 1, za f funkci $\chi(\frac{1}{2},1)$. Lze nějak kvantifikovat obsah náhody ve stochastickém procesu, a tím i v DS? V r. 1949, při studiu řetězců znaků (jakožto stochastického procesu) definoval Shannon *množství informace* obsažené v experimentu (v určení hodnoty náhodné proměnné), a střední množství informace na jednotku času obsažené ve stochastickém procesu (jakožto posloupnosti náhodných proměnných). V r. 1958 Kolmogorov vyšel z jeho teorie informace a zavedl entropii DS, původně jen prostředek pro řešení problému izomorfismu, dnes s aplikací mnohem širší.

Hodnotu reálné funkce nikdy nezměříme úplně přesně, a makroskopická veličina f tedy určuje rozklad ξ prostoru M na měřitelné množiny takové, že f na nich má prakticky konstantní hodnotu. Výsledkem experimentu pak bude odpověď na otázku, ve které množině $A \in \xi$ leží bod $x \in M$. Tážeme se po středním množství informace, kterou provedením takového experimentu získáme; z obecné teorie informace [16] plyne, že u experimentu, jehož jednotlivé výsledky mají pravděpodobnost p_i, je toto množství informace rovno $-\sum p_i \log p_i$, a definujeme tedy entropii spočetného rozkladu jako

$$H(\xi) = -\sum_{A\in\xi} P(A) \log P(A) .$$

Víme již, ve které množině jiného rozkladu η bod x leží, bude pro nás měření na rozkladu ξ spojeno s novou informací $H(\xi_B) = -\sum_{A\in\xi} P(A \mid B) \log P(A \mid B)$, kde $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$ je podmíněná pravděpodobnost A vůči B, a střední nová informace bude rovna *podmíněné entropii*

$$H(\xi \mid \eta) = -\sum_{B\in\eta} \sum_{A\in\xi} P(B)\, P(A \mid B) \log P(A \mid B) .$$

Nechť nyní rozklad η je dán měřením téže veličiny f, avšak v různých časech $t = 1, 2, \dots, n$, takže $\eta = \xi_{-n}^{-1} = T^{-1}\xi \vee T^{-2}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi$. Známe-li hodnoty f v těchto časech, bude střední nová informace v měření f v čase 0 rovna $H(\xi \mid \xi_{-n}^{-1})$ a při $n \to \infty$ (známe tedy veškerý budoucí průběh f) dostáváme entropii $h(\xi, T) = H(\xi \mid \xi_{-\infty}^{-1})$ Chronologie se sice zdá trochu nepřirozená, známe spíše minulý průběh stochastického procesu nebo makroskopické veličiny než budoucí, avšak v tomto tvaru lze definici aplikovat i na endomorfismy, které nejsou invertibilní a nemají tedy minulou historii; pro automorfismy pak lze ukázat, že $h(\xi, T) = h(\xi, T^{-1})$.

Nakonec entropii DS definujeme jako $h(T) = \sup_{\xi} h(\xi, T)$ (supremum přes všechny měřitelné rozklady prostoru M). Je již vidět, že entropie udává, nakolik se DS chová „skutečně náhodně"; je nulová pro právě všechny takové DS, u nichž pro každou volbu makroskopických veličin (tj. rozkladu ξ) platí: známe-li hodnoty těchto makroskopických veličin po dostatečně dlouhou dobu, umíme je předpovědět libovolně daleko do budoucna (s pravděpodobností 1). Takové jsou např. periodické DS. Existují DS s nenulovou entropií; tak např. snadno zjistíme, že Bernoulliho posuvy (totiž posuvy na množině posloupností výsledků nezávislých náhodných experimentů, z nichž i-tý výsledek má pravděpodobnost p_i) mají stejnou entropii jako každý tento experiment sám, $h(T) = -\sum_i p_i \log p_i$.

Pomocí entropie lze formulovat další charakteristiku K-systémů. DS je K-směšující, právě když pro každý rozklad $\xi \neq \nu$, $H(\xi) < \infty$, je $h(\xi, T) > 0$. Podle definice odtud plyne, že pak i $h(T) > 0$, avšak obrácené tvrzení neplatí: existují dokonce i neergodické DS s kladnou entropií. Entropie souvisí se spektrem: automorfismy s diskrétním, singulárním (vůči λ) nebo s konečně násobným spektrem mají nulovou entropii. Spočetně násobné lebesgueovské spektrum je tedy nutnou podmínkou pro $h(T) > 0$, nikoliv však postačující.

7. Topologická teorie dynamických systémů

Teorie, o níž jsme dosud mluvili se týkala T jako automorfismů ap. prostoru s měrou; označuje se též jako *metrická* teorie DS a entropie definovaná v předchozí kapitole jako *metrická* entropie. V poslední době se, jak se zdá, věnuje větší pozornost T jako homeomorfismům topologického prostoru (snad je to móda anebo je metrická teorie opravdu trochu vyčerpaná). Otázce po množství informace na jednotku času v DS lze přiřadit i její topologickou analogii. Představme si, že v kompaktním metrickém prostoru (M, ϱ) můžeme měřit polohu bodu s určitou přesností ε; potom od sebe odlišíme prakticky jen konečný počet bodů, nejvýše $\mathcal{N}(\varepsilon)$, což je mohutnost minimálního pokrytí M disjunktními množinami o průměru nejvýše ε. Měříme-li polohu bodu $x \in M$ v n časech $i = 1, 2, \dots, n - 1$, rozlišíme dvě trajektorie začínající v bodech x a x' právě tehdy, jestliže $\varrho_n(x, x') \equiv \max_{0 \leq i < n} \varrho(T^i x, T^i x') < \varepsilon$. Prakticky tedy od sebe odlišíme nejvýše $\mathcal{N}_n(\varepsilon)$ takových úseků trajektorií, přičemž $\mathcal{N}_n(\varepsilon)$ je tatáž mohutnost jako výše, ale v metrickém prostoru (M, ϱ_n), opět samozřejmě kompaktním. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \log \mathcal{N}_n(\varepsilon)/n$, a výrazu

$$h(T \mid M) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to 0} \frac{\log \mathcal{N}_n(\varepsilon)}{n}$$

říkáme *topologická entropie* homeomorfismu T na $M, \varrho)$. Obecná definice topologické entropie je složitější, avšak vychází ze stejného principu. Buď T homeomorfismus kompaktního topologického prostoru; definujeme pokrytí u tohoto prostoru otevřenými množinami a pak obdobně jako u rozkladů (viz kap. 4) relaci $u \geqq v$ mezi dvěma pokrytími, součin $u \wedge v$, pokrytí $T^{-1}u$, a $u^0_{-n} = \bigvee\limits_{k=-n}^{0} T^k u$. Buď $\mathcal{N}_n$ mohutnost minimálního podpokrytí pokrytí u^0_{-n} (díky kompaktnosti je $\mathcal{N}_n$ konečné); potom existuje $h(T \mid M, u) = \lim\limits_{n\to\infty} \log \mathcal{N}_n/n$. Nakonec výrazu $h(T \mid M) = \sup\limits_{u} h(T \mid M, u)$ (supremum přes všechna otevřená pokrytí) říkáme topologická entropie homeomorfismu T na M. Tak jako je metrická entropie invariantní vůči izomorfismu dvou metrických DS, je i topologická entropie invariantní vůči „topologické ekvivalenci" dvou topologických DS (M_1, T_1) a (M_2, T_2), tj. homeomorfismu R: $M_1 \to M_2$ takovému, že $RT_1 = T_2R$.

Již v práci Adlera, Konheima a McAndrewa, kde byla topologická entropie definována, byla vyslovena hypotéza, že je supremem metrické entropie braným přes všechny regulární invariantní míry. Pro konečně rozměrné kompakty toto tvrzení dokázal Dinaburg, v obecném případě Goodman. Jako ukázku si opět vezměme Bernoulliho endomorfismus $Tx = 2x \bmod 1$ na $[0, 1]$ (ztotožníme-li 0 a 1, je to spojité zobrazení, i když nejde o homeomorfismus). Jak jsme viděli v kap. 3, každé dvojici $p_0 = p$, $p_1 = 1 - p$, $p \in (0, 1)$ odpovídá právě jedna invariantní míra μ_p s entropií $h(T; \mu_p) = -p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1$; maxima $\log 2$ je dosaženo při $p = 1/2$ a při Lebesgueově míře λ (v obecném případě však taková maximální míra existovat nemusí). Při každém $\varepsilon = 2^{-k}$ je $\mathcal{N}_n(\varepsilon) = 2^{\mathrm{Max}(n,k)}$, a tedy $h(T \mid M) = \log 2$. Význačnost Lebesgueovy míry vůči topologii obvyklé metriky na $[0, 1]$ tkví mj. i v tom, že její nosič má maximální Hausdorffův rozměr, $\dim(\operatorname{supp} \lambda) = 1$. Obecněji, $\dim(\operatorname{supp} \mu_p) = h(T; \mu_p)/\log 2$. Nejsou zajímavé takové souvislosti, jimiž teorie DS spojuje teorii čísel a teorii dimenze, statistickou mechaniku a teorii pravděpodobnosti?

Literatura

[1] V. A. ROCHLIN: *Ob osnovnych ponjatijach teorii mery.* Matem. sb. *25* (67): 1 (1949,) 107—150.
[2] V. A. ROCHLIN: *Izbrannyje voprosy metričeskoj teorii din. sistem.* Uspechi mat. nauk *4* (2) (1949), 57—128.
[3] P. HALMOS: *Lectures on ergodic theory.* Chelsea, N. Y. (1958).
[4] V. A. ROCHLIN: *Lekcii po entropijnoj teorii preobrazovanij s invariantnoj meroj.* Uspechi mat. nauk *22* (5) (1967), 3—56.
[5] P. BILLINGSLEY: *Ergodic theory and information.* Wiley, N. Y. (1965).
[6] M. SMORODINSKY: *Ergodic theory, entropy.* Springer, Berlin (1971).
[7] J. G. SINAJ: *Theory of dynamical systems.* Aarhus universitet (1970).

[8] JA. G. SINAJ: *Dinamičeskije sistemy so sčetnokratnym lebegovskim spektrom.* Izv. AN SSSR (mat.) *25* (1961), 899—924, 30 (1966), 15—68.
[9] V. I. ARNOLD, A. AVEZ: *Ergodic problems of classical mechanics.* Benjamin, N.Y., 1968.
[10] D. V. ANOSOV, Ja. G. SINAJ: *Nekotoryje gladkije ergodičeskije sistemy.* Uspechi mat. nauk *22* (5) (1967), 107—172.
[11] V. V. NEMYCKIJ, V. V. STEPANOV: *Kačestvennaja teorija diff. uravnenij.* Gostechizdat, Moskva (1949).
[12] S. SMALE: *Differentiable dynamical systems.* Bull. Amer. Math. Soc. *73* (1967), 747—817; ruský překlad Uspechi mat. nauk *25* (1) (1970), 113—185.
[13] J. MOSER: *Stable and random motions in dynamical systems.* Princeton (1973).
[14] A. B. KATOK, JA. G. SINAJ, A. M. STEPIN: *Teorija din. sistem i obščich grup preobrazovanij s invariantnoj meroj.* Itogi nauki i techniki, Matematičeskij analiz *13.*
[15] JA. G. SINAJ: *K obosnovaniju ergodičeskoj gipotezy dlja odnoj dinamičeskoj sistemy statističeskoj mechaniky.* Dokl. AN SSSR *153* (6) (1963), 1261—1264.
[16] L. BRILLOUIN: *Science and information theory.* N. Y., Academic Press (1956).
[17] I. P. KORNFELD, JA. G. SINAJ, S. V. FOMIN: *Ergodičeskaja teorija.* Nauka, Moskva (1980).

---

vyučování

PROBLÉMY DISKUTOVANÉ NA ICME IV

Jaroslav Šedivý, Praha

V základní informaci o Mezinárodním kongresu o vyučování matematice (ICME IV, Berkeley 1980), která byla otištěna v Pokrocích (roč. 1981, č. 4, str. 235–6), jsem se zmínil o 150 „položkách" programu, které měly ráz předložených a diskutovaných problémů. Pro naši učitelskou veřejnost může být užitečné znát problematiku, která se na počátku 80. let považuje za aktuální pro další rozvoj didaktiky matematiky a vyučování matematice na školách základních, středních a vysokých. Je možné, že předložené náměty zaujmou někoho, kdo se chystá zpracovat či zadat práci diplomovou, rigorózní či kandidátskou.

Řada ze zmíněných 150 problémů se týká situací, které se u nás nevyskytují, např. problematika výuky analfabetů (osvojení základních aritmetických dovedností), výuka matematiky pro tu část mládeže, která navštěvuje školu jen čtyři roky apod. Mnohé problémy byly zformulovány paralelně pro různé obory matematiky, resp. pro různé typy škol; v těchto případech volím úspornou formulaci [s alternativami v závorkách tohoto typu].

Problematika nižších tříd základní školy (primary education)

Jakou matematiku by měly ovládat všechny děti na konci tohoto stupně škol (tj. v 11 – 12 letech)?

Co je podstatné, co je žádoucí a co je jen zajímavé probírat s dětmi v těchto třídách?

Jaký je současný stav hnutí „zpět k základům" (Back to basics)? Co to vůbec znamená?

Jakých úspěchů dosáhla úprava výuky matematice v uplynulých dvaceti letech? Kterých chyb se dopustili tvůrci nových osnov?