Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Igor Vajda

Modelování ve vědě a technice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 14 (1969), No. 3, 123--131

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139904`

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XIV — ČÍSLO 3

MODELOVÁNÍ VE VĚDĚ A TECHNICE*)

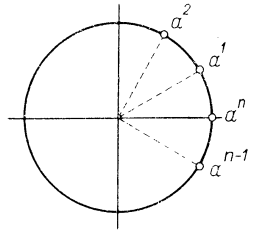
IGOR VAJDA, Praha

Aby naše intuice vycházela ze stejné zkušenosti, uvedeme nejdříve několik konkrétních příkladů modelů.

Uvažujme nejdříve abstraktní matematický objekt zvaný grupa. Grupou nazýváme libovolnou neprázdnou množinu G, na které je definována operace násobení „.“ tak, že pro libovolnou dvojici $a, b \in G$ existuje $c \in G$ tak, že $a \,.\, b = c$, přičemž platí tyto tři podmínky:

1. Pro libovolnou trojici $a, b, c \in G$ platí $(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$.
2. Existuje jednotkový element $1 \in G$, pro který $a \,.\, 1 = 1 \,.\, a$ pro všechan $a \in G$.
3. Ke každému $a \in G$ existuje inverzní prvek $a^{-1} \in G$ tak, že $a \,.\, a^{-1} = a^{-1} \,.\, a = 1$.

Nechť nyní $n > 1$ je libovolné přirozené číslo a uvažujme komplexní číslo $a = \exp(i\, 2\pi/n)$, kde i značí imaginární jednotku. Pak $G_* = \{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$, kde a^j je j-tá mocnina komplexního čísla a, je množina ekvidistantních bodů na jednotkové kružnici v Gaussově rovině (viz obr. 1). Jestliže v G_* definujeme operaci násobení vztahem $a^j \,.\, a^k = a^{j+k}$, $1 \leq j, k \leq n$, pak G_* je vzhledem k této operaci grupa s jednotkovým prvkem a^n. Inverzní prvek k a^j, $1 \leq j < n$, je a^{n-j}.



Obr. 1.

G_* můžeme interpretovat jako model abstraktní grupy G. Vlastnosti, kterých si povšimneme u G_*, můžeme přenášet (pokud to dovedeme) na abstraktní grupu.

---

*) Výtah z přednášky na konferenci o modelech v moderním vyučování fyzice, konané ve dnech 19.—21. září 1968 v Gottwaldově.

Jako další příklad uvažujme rozpad radioaktivního atomu. Z elementární jaderné fyziky si všichni pamatujeme soubor předpokladů, které nám umožňují odvodit si vzorec

$$p_t = \exp(-\lambda t)$$

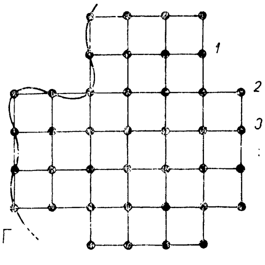
udávající pravděpodobnost rozpadu atomu v čase větším než $t \geqq 0$. Na základě experimentálních výsledků Ruthefordových víme, že tento soubor předpokladů tvoří uspokojivý model radioaktivního rozpadu.

Nechť nyní harmonická funkce $\varphi(x, y)$ představuje řešení určitého rovinného Dirichletova problému. Jinými slovy, nechť

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\varphi(x, y) = f(x, y) \quad \text{pro} \quad (x, y) \in \Gamma\,,$$

kde Γ je libovolný homeomorfní obraz kružnice v rovině (x, y) a f je spojitá funkce na Γ. Je všeobecně známo, že φ za jistých okolností modeluje celou řadu vzájemně analogických fyzikálních situací (stacionární proudění nestlačitelné kapaliny v rovině,



Obr. 2.

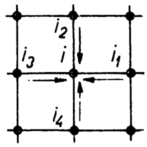
stacionární rovinné elektrické či magnetické pole, elongaci pružné blány, tepelnou rovnováhu v desce atd.). O fyzikálních analogiích budeme podrobně hovořit později a nyní zaměříme naši pozornost trochu jiným směrem. Uvažujme souvislý omezený síťový polygon v rovině podle obr. 2. Předpokládejme že délka všech jeho žeber je h a že celkový počet uzlů je N. Uzel nazveme hraniční, jestliže z něho vychází méně než čtyři žebra. Hraniční uzly označíme čísly $1, 2, \ldots, M$ a předpokládejme, že $M < N$. Zbývající uzly nazveme vnitřní a označíme $M + 1$, $M + 2, \ldots, N$. Každý vnitřní uzel $M < i \leqq N$ je spojen čtyřmi žebry se sousedními uzly $1 \leqq i_1, i_2, i_3, i_4 \leqq N$. Nechť nyní $f_1, f_2, \ldots, f_M$ je libovolná číselná posloupnost a nechť $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ je řešení následující soustavy n rovnic o n neznámých

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} \varphi_i = f_i \quad i = 1, 2, \ldots, M \\ \varphi_i = \frac{1}{4}(\varphi_{i_1} + \varphi_{i_2} + \varphi_{i_3} + \varphi_{i_4}) \quad i = M + 1, M + 2, \ldots, N\,. \end{cases}$$

Determinant této soustavy je vždy nenulový a $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$ tedy existuje.

Z kapitol o numerické řešení rovnic matematické fyziky víme, že $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$ představuje přibližné řešení Dirichletova problému reprezentovaného křivkou Γ a funkcí f, pokud Γ prochází hraničními uzly podle obr. 2 a pokud pro hodnotu $f(i)$ funkce f v uzlu i platí $f(i) = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$.

V modelování však můžeme jít ještě dál. Představme si, že polygon na obr. 2 je zhotoven z vodivého materiálu, tj. že vodivé žebra jsou vodivě spojena v jednotlivých uzlech a že odpor každého žebra je R. Jestliže v libovolných uzlech i, i_1, i_2, i_3, i_4 udržujeme elektrické napětí o hodnotách $\varphi_i, \varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}, \varphi_{i_4}$ (viz obr. 3), pak



Obr. 3.

polygonem začne protékat elektrický proud. Předpokládejme, že z uzlu i_k teče proud $\boldsymbol{i}_k$ ve směru vyznačeném šipkou na obr. 3 do uzlu i, $k = 1, 2, 3, 4$. Pak podle Kirchhoffova zákona

$$\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_4 = 0\,,$$

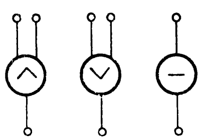
kdežto podle Ohmova zákona

$$R\boldsymbol{i}_k = \varphi_i - \varphi_{i_k} \quad k = 1, 2, 3, 4\,.$$

Pro hodnoty napětí v uvažovaných uzlech tedy platí

$$\varphi_i = \tfrac{1}{4}(\varphi_{i_1} + \varphi_{i_2} + \varphi_{i_3} + \varphi_{i_4})\,.$$

Řešení soustavy (S) lze tedy vyhledat tak, že hraniční uzly $1, 2, \ldots, M$ uvedeme na předepsaná napětí $f_1, f_2, \ldots, f_M$ a změříme napětí φ_i v uzlech vnitřních. Jinými slovy, můžeme mluvit o modelování soustavy vodivým síťovým polygonem.

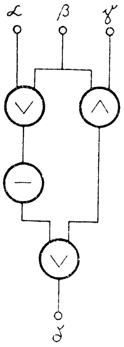


Obr. 4.

V exhibici příkladů budeme pokračovat příkladem z logiky. Nechť symboly na obr. 4 označují tři reálné systémy (např. elektrické), které funkcionálně můžeme popsat např. v elektrotechnické terminologii takto: První má dva vstupy a jeden výstup, přičemž výstupem proud probíhá právě tehdy, když probíhá současně oběma vstupy. Druhý se od prvního liší tím, že výstupem proud probíhá právě tehdy, když probíhá alespoň jedním vstupem. Třetí má jeden vstup a jeden výstup, přičemž výstupem proud probíhá právě tehdy, když neprobíhá vstupem a naopak.

Pak zařízení sestavené podle obr. 5 modeluje výrokovou funkci

$$D(A, B, C) = \overline{(A \vee B)} \vee (B \wedge C),$$



Obr. 5.

kde $A \wedge B$, resp. $A \vee B$ značí konjunkci resp. disjunkci výroků A, B a $\bar{A}$ značí negaci výroku A. Jestliže je totiž pravdivost či nepravdivost výroků A, B, C reprezentována přítomností či absencí proudu ve vstupech označených na obr. 5 α, β, γ, pak pravdivost výroku D je rovněž reprezentována průběhem proudu ve výstupu δ.

V uvedeném výčtu příkladů stejně jako v celé řadě dalších příkladů, které každému z nás poskytuje vlastní zkušenost, je model jako realita vždy ve vztahu k nějaké jiné realitě. Jaké jsou obecné rysy vztahu mezi modelem a modelovanou realitou, to je kardinální otázka, se kterou se chtě nechtě musí vypořádat každý, kdo chce uvažovat o modelování obecně. Jestliže budeme hledat nejdříve mezi slovy to nejvýstižnější, zjistíme, že nejlépe snad vyhovuje slovo zobrazení. Pokaždé se totiž ve struktuře modelu svým způsobem obrážela struktura modelované reality, což odpovídá jak obecně lexikálnímu, tak i matematickému obsahu pojmu zobrazení.

Při tomto zobrazování se může jednat o jedno-jednoznačné vztahy na úrovni „dobře definovaných pojmů", jako tomu bylo v příkladě se síťovým polygonem numerickým a elektrickým, ale jen málokdy lze jedno-jednoznačné přiřazení provést do všech důsledků. Tak například tepelný šum v elektrickém polygonu nemá žádný svůj protějšek v polygonu numerickém. Jde totiž o to, že elementární otázka, zda vůbec existují dva různé systémy, které by bylo možné s veškerou důkladností (tj. včetně veškerých jejich možných vztahů k jiným systémům) zobrazit navzájem na sebe jedno-jednoznačně, nebyla zatím uspokojivě zodpovězena. Jindy však o jedno-jednoznačném vztahu nemůže být ani řeči, jako tomu bylo např. v příkladě s grupou.

Teď by bylo samozřejmě žádoucí tyto první naše poznatky, zafixované zatím na intuitivní úrovni, přenést do oblasti přesněji vymezených pojmů. Než však k tomu přistoupíme, zastavme se ještě u menší historické exkurze, která nám rovněž poskytne jisté informace. Máme na mysli etymologii slova *model* a vývoj jeho sémantického obsahu v evropských jazycích. Ve starověku latinské *modus*, *modulus* označovalo míru, pomocí níž se vyjadřovaly proporce staveb. Odsud ve středověku vzniklo starofrancouzské *moule*, staroanglické *mould*, staroněmecké *model*. Vzhledem k tomu, že rozpínající se lidská zkušenost odjakživa zařazuje pod střechu existujících pojmů nový a aktuálnější obsah, tato slova už mají obecnější význam něčeho, co je uděláno podle „správné míry". Až přírodověda 19. století přidává pojmu model další nový význam. Kritické myšlení tohoto století dospívá k přesvědčení, že vznikající teoretické představy týkající se hmotného světa nereprodukují skutečnost přesně tak, jak je sama o sobě, ale že jsou pouze jakési modely. V tomto století navíc dochází k prvním pokusům zobrazovat jevy jednoho oboru na jevy oboru jiného (NEWTONOVA korpuskulární teorie světla jako mechanický model optiky) a tedy i k takovému chápání slova model, které je i nám blízké a které jsme se i zde již snažili naznačit. Metoda mezioborového izomorfismu dosáhla značné dokonalosti v díle MAXWELLOVĚ, který se snažil najít mechanický model elektromagnetických jevů. Mám zde na mysli aplikaci mechaniky na éter jako elastické pevné těleso. Obdobné úspěšné snahy (i když původně s mnoha logickými nepřesnostmi) se objevují u GIBBSE a BOLTZMANNA; tentokrát jde o mechanické vysvětlení tepelných procesů.

Všechny tyto a mnohé další případy úspěšného použití metody modelování jí zaručily pevné místo v moderní vědě a technice a přesto dodnes chybí její přesný a současně dostatečně obecný popis. (Jinými slovy, neexistuje obecná teorie modelování, u které bychom nacházeli všechny nezbytné atributy vědeckosti a která by současně byla v souladu s intuitivními představami deduktivních, empirických i behaviorálních vědních oborů.)

Nejdál v tomto směru pokročili matematikové, kteří ovšem vyšli z vlastní zkušenosti ohledně modelů. Tato zkušenost je ovšem dosti svérázná, a tedy výsledek nejen že není dostatečně obecný, ale jak uvidíme, je i v jistém protikladu k pojetí modelu v praxi např. empirických věd.

První logicky přesně vymezený pojem modelu, který je blízký naší intuitivní představě, se poprvé objevil v TARSKÉHO přednášce na mezinárodním sjezdu vědecké filosofie v Paříži roku 1935. Při definici modelu TARSKI vyšel z přesně vymezeného pojmu teorie. Nemáme čas, abychom Tarského úvahy reprodukovali zde s tou precizností, která je jim vlastní. Proto je jen naznačíme.

Nechť určitá vědecká disciplína je budována na základě jistého souboru primitivních pojmů a primitivních tvrzení. Primitivní pojmy jsou takové, kterých používáme, aniž vysvětlujeme jejich významy (např. „množina G" v teorii grup). Jejich význam se obvykle považuje za evidentní. Podobně primitivní tvrzení (axiómy) jsou taková tvrzení, která považujeme za platná, aniž je dokazujeme. Jejich platnost se nám obvykle jeví jako evidentní. Pod budováním disciplíny rozumíme jednak definování nových pojmů na základě primitivních anebo již definovaných pojmů a jednak dokazování tvrzení z axiómů anebo již dokázaných tvrzení. Každou takovou disciplínu Tarski nazývá teorie (deduktivní teorie). V dalším se omezíme pouze na takové teorie, jejichž primitívní pojmy jsou proměnné. Pod proměnnými pojmy rozumíme takové pojmy, které nemají samy o sobě nějaký význam, např. v tom smyslu, že na otázku: Je (příslušný pojem) nula? nelze dát smysluplnou odpověď. Takovým pojmem je např. „reálné číslo" v protikladu k pojmu „$\sqrt{2}$".

Jsou-li dány určité reálné věci, tj. neproměnné pojmy, můžeme zjistit, zda splňují všechny axiómy teorie, tj. zda axiómy (a tedy i všechna ostatní tvrzení uvažované teorie) zůstávají pravdivými výroky, nahradíme-li jejich primitivní pojmy příslušnými věcmi. Je-li tomu tak, řekneme, že tyto věci tvoří model uvažované teorie.

Tak například grupa G_* z prvního příkladu je model teorie grup (v příkladě jsme mluvili o G_* jako o modelu abstraktní grupy, ale to není podstatné). Přitom primitivní proměnný pojem „neprázdná množina G" nahradíme konkrétní množinou G_* a primitivní proměnný pojem „operace násobení" konkrétní operací násobení tak jak je obvykle definována v Gaussově rovině.

Pokud tedy jde o matematiku, Tarského definice více-méně (podle toho, který matematický obor máme na mysli) odpovídá intuitivní představě o modelu. Horší je to, pokud jde o modely ve vědách empirických. Mnohé z těchto věd jsou zatím plně zaměstnány snahou podpořit svoje základní hypotézy uspokojivým množstvím průkazného experimentálního materiálu, aby je bylo možné považovat za evidentní a jako takové je položit v základ příštích deduktivních teorií. Formální struktura teorií existujících v těchto vědách neodpovídá tedy Tarského představě, a tedy ani o modelech v Tarského smyslu nemůže být ani řeči. Pokud jde o zralejší empirické vědy, zde už často nacházíme teorie, které jsou buď přímo axiomatizované, anebo jsou axiomatizovatelné. Např. stanfordský profesor P. SUPPES axiomatizoval v r. 1957 klasickou mechaniku hmotných částic a v r. 1959 relativistickou kinematiku.

Omezme se proto v dalším na „axiomatizovatelné" teorie empirických věd. Tak například klasická mechanika částic byla axiomatizována pomocí pěti primitívních pojmů: množina částic, interval času, poziční funkce, funkce masy a silová funkce. Ve smyslu Tarského definice je tedy modelem mechaniky částic určitý konkrétní soubor částic, který umožňuje proměnné uvedených pět proměnných pojmů nahradit konkrétními smysluplnými pojmy. Tento závěr neodpovídá představě teoretického fyzika o modelu, zejména když jdeme dál a považujíce např. optický model jádra anebo orbitální model atomu za teorie, dospějeme k závěru, že reálný svět je modelem jeho teorií. Některým autorům obhajujícím univerzálnost Tarského definice se toto stanovisko zdá být přijatelné. Domníváme se však, že důsledné trvání na tom, aby exaktní definice obecného modelu byla v dobré shodě s intuitivními představami všech vědních oborů by nám pomohla vytvořit definice obecnější, než je definice Tarského. Vědecké studium šíře pojatých abstraktních modelu by mělo samozřejmě i širší metodologický význam. V této souvislosti uvedeme několik poznámek.

Vycházejme z hlediska, které jsme se již snažili naznačit, že totiž model je fiktivní anebo také konkrétní nástroj badatele snažícího se vynášet pravdivé soudy o studované realitě a že kritériem pro jeho volbu je, aby pokud možno nezkresleně zobrazoval všechny ty stránky studované reality, které jsou předmětem badatelova zájmu a současně aby byl zbaven zbytečného balastu nepodstatných detaiiů. Z tohoto hlediska například nejen grupu G_*, ale také celou teorii cyklických grup (jíž je G_* také modelem) musíme považovat za model teorie grup, což Tarského definice nedovoluje, neboť primitívní pojmy teorie cyklických grup jsou proměnné. Bylo by možné v Tarského definici předpokládat navíc nahrazovaní proměnných primitívních pojmů jinými „názornějšími" proměnnými pojmy a také neproměnných jinými neproměnnými? Dále, realita studovaná matematikem je deduktívní teorie abstraktní struktury, např. grupy, kdežto realita studovaná empirickým badatelem je materiální svět.

Bylo by možné připustit existenci hypotetické teorie, kterou bychom mohli v nějakém smyslu ztotožnit s materiálním světem? Obě tyto otázky se musí důsledněji zformulovat a prozkoumat. Je totiž možné, že vedou k ještě větším absurdnostem a námitkám, než k jakým jsme dospěli výše v souvislosti s Tarského definicí. Jestliže se však ukáže, že lze na ně odpovědět kladně, pak by bylo možné všechny tyto námitky a absurdnosti překonat vhodným rozšířením a interpretací Tarského definice.

Tím bychom obecný výklad pojmu model ukončili a nyní pokračujeme v úvahách o vývoji sémantického obsahu pojmu model. Skončili jsme u Maxwella, Boltzmanna a Gibbse.

Myšlenka modelování tak, jak ji naplnili tito badatelé, podnítila celou řadu nových ideových směrů, a to nejen na půdě fyziky. Domníváme se, že tyto otázky by značně rozšířily myšlenkový prostor studentů např. do oblasti gnoseologie a že by se jimi mohlo a mělo navázat na zkušenost, kterou studenti získají při setkání s modely nejrůznějšího druhu ve fyzice. Proto se zmíníme o některých z nich.

Jde např. o otázku analogií, speciálně fyzikálních analogií. Původcem termínu fyzikální analogie je Maxwell, který pod fyzikální analogií rozuměl „...onu dílčí podobnost mezi zákony jedné oblasti jevů a zákony jiné oblasti jevů, která způsobuje, že každá z nich je ilustrací té druhé“. Doplníme-li Maxwellovu fyzikální analogii na „fyzikálně matematickou“ analogii, a to na základě toho, že izomorfní fyzikální jevy mají stejný matematický model, dostaneme se ke kořenům alespoň dvou významných hnutí ve vědě tohoto století. Jedno, to plodnější, lze charakterizovat slovy samočinný počítač, to druhé je logický pozitivismus, nověji teorie systémů.

Pokud jde o samotné analogie, zdržme se u tzv. potenciálních analogií, jejichž dobrou ilustrací je Dirichletův rovinný problém z jednoho z našich příkladů, který současně reprezentuje mechanickou, elektrickou, tepelnou a magnetickou problematiku. Na základě analogie např. víme, že k levnému a názornému řešení všech těchto problémů nám stačí pryžová homogénní blanka a kus drátu. Jestliže přitiskneme napjatou blánu na prostorovou uzavřenou křivku z drátu, pak kóta $\varphi(x, y)$ bodu blány, jehož průmět na určitou rovinu je (x, y), vyhovuje Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

a napjatá blána představuje přibližné řešení Dirichletova a všech analogických problémů pro Γ definované jako průmět drátu do roviny (x, y) a pro $f(x, y)$ definované jako kóta bodu drátu o průmětu (x, y).

V souvislosti s analogiemi poznamenejme, že tento myšlenkový směr umožnil nejen komplexní přístup k zdánlivě spolu nesouvisejícím problémům, ale také pomohl odhalit nová neobvyklá řešení, někdy se značným hospodářským efektem, např. tím, že nákladné mechanické modely v inženýrství umožnil nahradit levnějšími modely elektrickými. Tím se také dostáváme k jednomu z uvedených hnutí v soudobé vědě, a to k samočinným počítačům.

Donedávna platilo schéma, že matematika rozřeší nějaký matematický problém a fyzika tohoto řešení použije. V souvislosti s obrovským objemem výpočtů, které si vyžadovalo řešení některých technických problémů tohoto století připadli někteří badatelé na myšlenku toto schéma obrátit. Totiž rozřešit fyzikální problém experimentálně a toto řešení interpretovat jako řešení odpovídajícího (v rámci příslušného modelu) matematického problému. Řešení matematického problému metodou analogie tedy vyžaduje zvolit fyzikální děj, který se dá levně realizovat a přesně proměřovat a který je mu ve výše uvedeném smyslu analogický. Těmto požadavkům zpravidla nejlépe vyhovují elektromagnetické děje. Zařízení určená k realizaci těchto dějů za tímto účelem nazýváme analogové počítače.

Obdobně analogie mezi fyzikálními ději a logikou tak, jak je reprezentována naším příkladem s elektrickým modelováním výrokové funkce, vedla ke vzniku samočinných číslicových počítačů. Touto cestou dokázal člověk modelovat nejcharakterističtější a nejdůstojnější svoji schopnost — myšlení.

Nyní několik slov k tomu druhému hnutí, k logickému pozitivismu, resp. k teorii systémů. Konečnou snahou logických pozitivistů reprezentovaných jmény CARNAP, NEURATH a SCHLICK byla reorganizace veškerého poznání v rámci tzv. jednotné vědy na základě jednotného jazyka. Uvažovalo se o přeložitelnosti všech jazyků na jazyk fyziky. Vliv myšlenky analogií je tu více než patrný. Na sklonku třicátých let se upouští od těchto koncepcí a k jejich oživení došlo znova až v létech padesátých při vzniku tzv. teorie systémů, která dává ideji analogií vyniknout explicitněji. Zakladatel této teorie, VON BERTALANFFY, vyšel ze strukturální analogie (izomorfismu) mezi zákony různých vědních disciplín. Teorie systémů studuje abstraktní modely, abstraktní systémy, v nichž by měla být obsažena struktura problémů různých vědních oborů.

Abychom si udělali konkrétnější představu o ambicích této teorie, uveďme si příklad strukturálního izomorfismu, který ve své první práci uvažuje Bertalanffy. Jde o exponenciální zákon, jímž se řídí radioaktivní rozpad, rozpad chemické sloučeniny při monomolekulární reakci, hynutí baktérií pod vlivem dezinfekčních prostředků, úbytek hladovějícího zvířete, vymírání populací, když mortalita převyšuje fertilitu apod. Přispěla-li teorie systémů ke skutečnému obohacení lidského poznání — nevíme. Pokud jde např. o izomorfismus uvažovaný před chvílí, není v tom žádná mystika. K exponenciálnímu zákonu nás snadno přivede jeden předpoklad, který je v přírodě splněn zřejmě dost často. Exponenciální zákon popisuje pravděpodobnost p_t toho, že nějaký jev nastane v čase $\tau > t$. Přitom předpokládáme, že tento jev jistě nastane v čase $0 < \tau < \infty$. Předpoklad, o kterém jsme mluvili stanovuje, aby pravděpodobnost, že jev nastane v době od t do $t + s$ za předpokladu, že určitě nenastal před uplynutím doby t, byla stejná jako pravděpodobnost, že nastane v době od 0 do s. Jinými slovy

$$(*) \qquad P[t < \tau \leqq t + s | \tau > t] = P[0 < \tau \leqq s] .$$

Odsud máme odvodit, že

$$p_t = P[\tau > t] = \exp(-\lambda t),$$

kde λ je konstanta. Podle vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost víme, že

$$P[t < \tau \leqq t + s | \tau > t] = \frac{P[t < \tau \leqq t + s, \tau > t]}{p_t} = \frac{P[t < \tau \leqq t + s]}{p_t}$$

a (*) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$(**) \qquad \frac{P[t < \tau \leqq t + s]}{p_t} = P[0 < \tau \leqq s].$$

Nyní předpokládejme, že existuje spojitá reálná funkce $x(\theta)$ taková, že

$$P[t_1 < \tau \leqq t_2] = \int_{t_1}^{t_2} x(\theta)\, d\theta$$

pro každou dvojici $t_1 \leqq t_2$. Podle (**) tedy

$$\frac{1}{s}\int_t^{t+s} x(\theta)\, d\theta = p_t \frac{1}{s}\int_0^s x(\theta)\, d\theta.$$

Podle věty o střední hodnotě integrálu při $s \to 0$ můžeme psát

$$x(t) = \lambda p_t, \quad \lambda = x(0).$$

Avšak

$$\frac{d}{dt} p_t = \frac{d}{dt}\int_t^{\infty} x(\theta)\, d\theta = -x(t),$$

takže naši rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dt} p_t + \lambda p_t = 0,$$

přičemž podle předpokladu že jev jistě nastane v době $0 < \tau < \infty$ platí $p_0 = 1$. Řešením dané diferenciální rovnice pro tuto počáteční podmínku je funkce

$$p_t = \exp(-\lambda t),$$

což bylo dokázat.

Logický předpoklad, který jsme zformulovali výše, lze tedy považovat i za základ modelu radioaktivního rozpadu, jak jsme o něm mluvili v jednom z příkladů na začátku.