Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Hans Wussing
Ke vzniku Erlangenského programu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 13 (1968), No. 6, 367--373

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139946

V textu nejsou uvedeny odkazy na speciální články týkající se jednotlivých otázek, neboť bibliografie tohoto druhu třeba jen zcela povrchní by byla příliš rozsáhlá. V seznamu literatury jsou uvedeny práce přehledové, které obsahují odkazy na speciální články, a kromě toho jsou u jednotlivých měřicích metod uvedeni autoři, v jejichž pracích lze nalézt všechny podrobnosti. Některé poznatky týkající se současného stavu výzkumu ionosféry byly čerpány z materiálů XVI. valného shromáždění URSI (Mezinárodní organizace pro vědeckou radiotechniku) z r. 1966.

Literatura

Geophysique exterieure — Geophysics the Earth's Environment (redaktoři C. DEWITT, J. HIEBLOT, A. LEBEAU). Gordon and Breach, Science Publishers, 1963.

Physics of the Upper Atmosphere (redaktor J. A. RATCLIFFE). Academic Press 1960, ruský překlad Moskva 1963.

Physics of the Earth's Upper Atmosphere (redaktoři C. O. HINES, I. PAGHIS, T. R. HARTZ, J. A. FEJER). Prentice Hall Inc. Engelwood Cliffs, 1965.

JA. L. AL'PERT: *Rasprstranenije radiovolu i ionosfera.* Izdat. A. N. SSSR, Moskva, 1960.

J. M. KELSO: *Radio Ray Propagation in the Ionosphere.* McGraw-Hill Book Comp., 1964.

KE VZNIKU ERLANGENSKÉHO PROGRAMU*)

HANS WUSSING, Lipsko

Téměř celé století uplynulo od doby, kdy se Felix KLEIN (1849—1925) při vstupu na universitu v Erlangen v roce 1872 představil svým kolegům přednáškou „*Srovnávací úvahy o novějších geometrických výzkumech*", která vstoupila do dějin matematiky pod názvem Erlangenský program. Přestože myšlenky v něm obsažené vycházejí z klasické matematiky a jsou ovšem obohaceny o později dosažené výsledky, zůstávají dodnes součástí živého základu moderní matematiky, i když se ukázalo, že se do rámce grupové klasifikace Erlangenského programu nedají zařadit všechny geometrie.

Devatenácté století bylo obdobím prudkého rozmachu geometrie nejen po stránce obsahové, ale i z hlediska jejího pojmového základu. V epoše průmyslové revoluce se jádrem matematického vzdělání, zvláště na evropských polytechnikách, stává deskriptivní geometrie. Vysoká praktická hodnota geometrie je v devatenáctém století pro její rozvoj půdou velmi úrodnou. V rozvoji geometrie od konce osmnáctého sto-

*) Výtah přednášky proslovené 17. února 1967 v Berlíně na IV. výročním vědeckém zasedání Matematické společnosti Německé demokratické republiky.

letí do poloviny století devatenáctého nešlo jen o pouhý odklon od vývojové linie, nýbrž o rozmach různých, v samotných základech geometrie zakotvených a osamostatňujících se tendencí zdánlivě protichůdných směrů. Jakmile se geometrie, chápaná po tisíciletí obsahově, v metodách i v celkovém zaměření eukleidovsky, dala jednou do pohybu, musilo se skoncovat s tradičním pojetím jejích základních myšlenkových pilířů. Takové pojmy jako je souřadnice, délka, rovnoběžnost, vzdálenost, dále zvyklost vycházet od bodu jako výchozího elementu veškeré geometrie, pojetí geometrie jako měřictví, vše to muselo být podrobeno kritice a učiněno schopným zobecnění.

Výsledky práce vedoucích matematiků, mezi něž náleží V. PONCELET, L. N. M. CARNOT, J. D. GERGONNE, C. F. GAUSS, N. LOBAČEVSKI, A. F. MÖBIUS, J. BOLYAI, J. PLÜCKER, J. STEINER, O. HESSE, A. CAYLEY, M. CHASLES, H. GRASSMANN, G. BOOLE, V. STAUDT, B. RIEMANN a jiní, vyústily v polovině devatenáctého století v odstranění až dosud zdánlivě bezpodmínečného spojení geometrie s metrikou, v zobecnění kartézského pojetí souřadnic a v jeho rozšíření v systém parametrů majících nejrůznější geometrický význam, ve vytvoření neeukleidovských geometrií a konečně v přechod k libovolnému (ale konečnému) počtu dimenzí a z toho k pojmovému odloučení „prostoru" v matematickém a fyzikálním smyslu.

Vzniklý rozklad vnitřní jednoty geometrie po obsahové i metodologické stránce vyvolal mezi geometry jistou bezradnost v otázce vztahu jednotlivých „geometrií" i „geometrických metod" a došlo k pokusům o nový výklad podstaty geometrie. Vzpomeňme např., jak se M. CHASLES v „*Aperçu historique*" (1837) snaží o nové, přirozeně ještě velmi mlhavé pojetí geometrie v tom duchu, že „je nutno jednoduchou představu míry nahradit složenou představou míry a uspořádání, má-li se slovu geometrie dostat správného a úplného smyslu".*) Šlo skutečně o nové uspořádání poznatků a o logické určení místa každé geometrie v souhrnu geometrických metod. V tomto úsilí o syntézu zdánlivě protichůdných směrů tkví nakonec původní podnět k vypracování Erlangenského programu. Klein o tom sám praví: „Už od bonnských dob**) jsem se snažil proniknout do rozporů navzájem si odporujících matematických škol, porozumět vzájemných vztahům navenek různých, ale podstatou příbuzných směrů, sepnout jejich protiklady jednoticím pojetím. V tomto ohledu mně geometrie dávala mnoho podnětů k práci".***)

Cesta k vyjasnění obtížné situace v geometrii začíná studiem „geometrických příbuzností", kde k nejhlubším závěrům pronikl A. F. MÖBIUS (1790—1868). Uveďme tu aspoň několik principiálních poznámek.†)

*) M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, 1837, str. 288.

**) Jako student a asistent u J. Plückera v Bonnu 1865—1868.

***) F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen I.*, Berlin 1921, str. 52.

†) H. Wußing, *August Ferdinand Möbius* (Bedeutende Gelehrte in Leipzig, Leipzig 1965, sv. 2, str. 1—12.

Když Möbius zahájil ve dvacátých letech svou publikační činnost, zaměřil se na vyšetřování transformací zprostředkujících přechod od jednoho geometrického útvaru k druhému. Tyto „příbuznosti", např. afinní transformace, transformace reciprokými radii a jiné, byly všestranně studovány a vynořila se otázka jejich klasifikace, jež se stala rozhodující křižovatkou na cestě k nadcházející grupové klasifikaci geometrie. Myšlenku klasifikace geometrie sledoval Möbius výslovně už ve své knize „Barycentrický počet" z roku 1827. V předmluvě vysvětluje, jak jej velké možnosti jeho barycentrických souřadnic podnítily k přechodu od vyšetřování podobností ke studiu Eulerem (1707—1783) odvržené afinity, a jak tím zesílil jeho zájem o studium geometrických příbuzností vůbec. Möbia to „pohnulo k vytvoření mnoha dalších podobných vztahů mezi geometrickými útvary a tak vznikl druhý díl mé knihy, pojednávající o geometrických příbuznostech jako o nauce, která ve smyslu zde naznačeném v sobě zahrnuje základy veškeré geometrie a která by byla jednou z nejobtížnějších, kdyby měla být zpracována v plné obecnosti a do důsledků."*)

Už v předmluvě k „Barycentrickému počtu" vyjmenovává Möbius z geometrických příbuzností shodnost, podobnost, afinitu a kolineaci a vysvětluje jejich vzájemný vztah. Shodnost a podobnost — praví Möbius — se podstatně neliší; toto tvrzení odpovídá vlastnostem tzv. hlavní grupy Erlangenského programu. Obecnější jsou afinity, které zahrnují podobnosti a shodnosti jako zvláštní případy — to odpovídá vztahu mezi afinní a hlavní grupou. Ještě obecnější jsou konečně kolineace.**) Také zde Möbius předjímal (přirozeně bez užití názvu grupa a vůbec bez výslovného grupového uvažování) začlenění afinní geometrie do geometrie projektivní. V pozdějších letech Möbius tyto základní myšlenky ještě rozvedl a své vyšetřovací metody rozšířil na další příbuznosti. Podrobnosti by tu vedly příliš daleko a uveďme jen, že se Möbius v roce 1858, tedy již v pokročilém věku, obrátil k úvahám o tzv. „elementárních příbuznostech", ještě obecnějších než kolineace. Tyto úvahy zařazujeme dnes do oblasti topologie.

Tímto široce založeným programem razil Möbius novou cestu, jíž se geometrie ubírala během devatenáctého století. Jako spoluvydavatel sebraných Möbiových prací ocenil Klein později — po vyslovení Erlangenského programu — vřelými slovy Möbiův přínos. Plného uznání se Möbiovu životnímu dílu v geometrii dostalo teprve později, protože Möbius pro nedostatek formálního, hlavně algebraického aparátu, nebyl s to uskutečnit zamýšlené pojetí klasifikace geometrie. Zvláště postrádáme u Möbia použití metod algebraické teorie invariantů, v devatenáctém století velmi obsáhle propracovávané teorie, kterou ve Velké Británii široce rozvinuli G. BOOLE (1815—1864), A. CAYLEY (1821—1895) a J. J. SYLVESTER (1814—1897) a které Cayley použil k pokusu o stanovení místa projektivní geometrie v celkové výstavbě geometrie.

---

*) A. F. Möbius, *Gesammelte Werke*, Leipzig 1885, sv. 1, str. 9.

**) Termín „afinní" zavedl L. Euler v roce 1748 v „*Introductio in analysis infinitorum*". Označení „kolineace" použil Möbius z podnětu svého přítele filosofa Weiskeho.

Cayley navázal své teoretické studie o invariantech v roce 1854 přímo na Booleho; tehdy začalo vycházet jeho deset proslulých *„Pojednání o kvantikách“*.*) Základní Cayleyho myšlenka spočívá v tom, že vlastnosti invariantní vůči geometrickým transformacím geometrických útvarů se musejí projevit také analyticky ve formě algebraických invariantů „kvantik“, které odpovídají daným geometrickým útvarům. Pomocí míry, později nazvané po Cayleyovi, se ve známé šesté stati o kvantikách v roce 1859 Cayleyovi podařilo vymezit souvislost mezi projektivní a metrickou geometrií. Cayley tam praví: „Metrická geometrie je tedy součástí projektivní geometrie a projektivní geometrie je veškerá geometrie“.**)

Tím však byla zatím provedena klasifikace jen části geometrických disciplín a metod a zbývalo začlenění neeukleidovských geometrií. K tomu bylo zapotřebí ještě účinnějších algebraických metod, zvláště grupového pojetí, jež představuje poslední a rozhodující myšlenkové kořeny Erlangenského programu.

Kolem roku 1870 byla už teorie grup poměrně široce propracovanou matematickou disciplínou, ač ovšem byly v podstatě studovány jen grupy permutací. Východiskem tohoto vývojového směru byla teorie řešení algebraických rovnic. Vzpomeňme staletého úsilí, jež už N. Tartaglia (1500?—1557), G. Cardano (1501—1576) a L. Ferrari (1522—1565) začali vynakládat na nalezení obecného řešení rovnic vyššího než čtvrtého stupně pomocí radikálů. Dále to byl J. L. Lagrange (1736—1812), C. F. Gauss (1777—1855), P. Ruffini (1765—1822) a N. H. Abel (1802—1829), který jako první podal — implicitním použitím teorie grup podobně jako Ruffini — úplný důkaz o neřešitelnosti obecné rovnice vyššího než čtvrtého stupně pomocí radikálů.

Začátkem třicátých let hluboce pronikl do otázky řešitelnosti algebraických rovnic geniální E. Galois (1811—1832), který zavedl název grupy jako odborného matematického termínu, poznal rozhodující úlohu normálních dělitelů, přiřadil každé rovnici grupu permutací a nastínil teorii po něm nazvanou, která dovoluje rozhodnout podle struktury Galoisovy grupy příslušné rovnice o její řešitelnosti, zvláště o řešitelnosti pomocí radikálů. Galoisovy myšlenky však došly plného pochopení a matematického propracování teprve v padesátých letech; vedoucí úlohu tu měli E. Betti (1823—1892), J. A. Serret (1819—1885) a G. Jordan (1838—1922). Roku 1870 vyšel v Paříži Jordanův velkoryse založený systematický výklad Galoisovy teorie o řešitelnosti rovnic *„Traité des substitutions et des équations algébriques“*, důsledně vybudovaný na teorii grup permutací. Tato kniha dala Kleinovi do rukou rozhodující algebraický nástroj k vypracování Erlangenského programu.

Když Klein koncem dubna 1870 spolu se svým norským přítelem S. Liem (1842 až 1899) přijel na studijní pobyt do Paříže, znal z Bonnu, Berlína a Göttingen všechny

---

*) Pod kvantikou („quantic“) rozuměl Cayley to, co dnes nazýváme formou, tedy homogenní polynom stupně n v m nezávisle neurčitých s libovolnými konstantními koeficienty z daného okruhu. Invariant je polynom v koeficientech kvantiky, který se až na mocninu substitučního determinantu reprodukuje, jestliže se kvantika podrobí nesingulární lineární homogenní transformaci.

**) A. Cayley, *The Collected Mathematical Papers*, Cambridge 1889, sv. 2, str. 592.

nové směry v geometrii, vydobyl si už jméno v přímkové geometrii a důvěrně se seznámil s teorií invariantů a Cayleyho mírou. V Paříži, kde Klein a Lie pobyli až do vypuknutí německo-francouzské války, se seznámili z právě vyšlé Jordanovy knihy „Traité“ s teorií grup permutací. Nyní se už hledaná klasifikace geometrie mohla, ba musila stát klasifikací výslovně založenou na grupovém pojetí.

Z počátku přistoupil Klein ke klasifikaci geometrie na základě teorie invariantů. V řadě přechodných stadií — do podrobností nelze zacházet — se vytvářely základní myšlenky grupové klasifikace, v níž Klein mohl stanovit i místo neukleidovských geometrií v souhrnu veškeré geometrie.

Ve vlastním Erlangenském programu nastiňuje Klein v úvodu celkovou situaci vzniklou v oblasti geometrie a vysvětluje své záměry těmito — jistě skromnými — slovy: „...nerozvíjíme zajisté žádnou vskutku novou myšlenku, nýbrž vymezujeme zřetelně a výrazně to, co více méně určitě tušili již jiní. Uveřejnit shrnující úvahy se jevilo tím oprávněnější, čím víc se geometrie, svou látkou jednotná, rozpadala rychlým rozmachem v poslední době v řadu téměř oddělených disciplín, rozvíjejících se značně nezávisle jedna na druhé“.*)

V prvním paragrafu Erlangenského programu se definuje grupa a vysvětluje pojem hlavní grupy. Výrazněji než v Kleinově druhé stati „O tzv. neeukleidovské geometrii“ z 8. června 1892 se rozpracovává rozdíl mezi pojmy prostoru a variety (v originále „Mannigfaltigkeit“, pozn. překl.) a rozdíl mezi smyslovým obrazem geometrie a její abstraktní podobou. Studium variety se chápe jako „zobecnění geometrie“, kdy „si odmýšlíme matematicky nepodstatný smyslový obraz a spatřujeme v pojmu prostor jen vícenásobně rozhlehlou varietu... Analogicky k transformacím prostoru hovoříme o transformacích variety; také ony tvoří grupy. Nyní se však nevyznačuje jedna grupa od ostatních jako v prostoru svým významem; každá grupa je s ostatními stejně opravněná. Jako zobecnění geometrie tak vyvstává následující obsáhlý problém: Je dána varieta a v ní grupa transformací; mají se vyšetřit ty vlastnosti útvarů variety, které se transformacemi grupy nemění.“**)

Hlavní grupu definuje Klein takto: „Geometrie se může zabývat jen těmi vlastnostmi prostorových útvarů, které nezávisejí na umístění útvarů v prostoru ani na jejich absolutní velikosti. Nemůže ani rozlišovat (bez přibrání třetího tělesa) mezi vlastnostmi tělesa a jeho zrcadlového obrazu. Těmito větami je charakterizována jistá grupa prostorových transformací — nazývejme ji hlavní grupou —, jejíž transformace nemění souhrn geometrických vlastností útvaru. Tato grupa se skládá ze šestinásobně nekonečného množství pohybů, z jednoduše nekonečného množství podobnostních transformací a z transformace zrcadlením podle roviny.“***)

Pojem grupy se při uspořádání geometrií stává kouzelným proutkem. Každé „geometrii“ je podle Kleinových slov „adjungována“ jistá grupa. „V zavedení tako-

*) F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin 1921, sv. 1, str. 460/461.

**) Tamže, str. 463.

***) Tamže, str. 318.

vých obecných grup místo grupy hlavní spočívá podstata různých geometrických metod, jež se v nové době rozvinuly.“*) Na jiném místě shrnuje Klein vyšetřovací metodu spolu s jejími hlavními výsledky takto: „Nahradí-li se hlavní grupa grupou obsáhlejší, zůstává zachována jen část geometrických vlastností. Ostatní se už nejeví jako vlastnosti samotných geometrických útvarů, ale jako vlastnosti systému, který vznikne, připojí-li se k němu význačný útvar. V tom spočívá svéráznost popisovaných zde nových geometrických idejí a jejich poměr k elementární metodě. Vyznačují se právě tím, že místo z hlavní grupy vycházejí z rozšířené grupy prostorových transformací.“**)

Tím je podán výklad vyšetřovací metody. V dalších paragrafech Erlangenského programu je tímto způsobem stanoveno logické zařazení projektivní geometrie, přímkové geometrie, geometrie reciprokých poloměrů a ostatních geometrií. Projektivní geometrie je např. určena takto: „Zkoumá na prostorových útvarech jen to, co se nemění kolineárními transformacemi, adjunguje si tedy grupu kolineárních transformací.“***)

Tyto vztahy dnes zpravidla vyjadřujeme (pro klasické geometrie) tímto schématem:

	podobnostní grupa $\subset$	afinní grupa $\subset$	projektivní grupa
poloha	mění se	mění se	mění se
velikost	mění se	mění se	mění se
pravoúhlost	zachována	mění se	mění se
rovnoběžnost	zachována	zachována	mění se
incidence	zachována	zachována	zachována
	podobnostní geometrie $\supset$	afinní geometrie $\supset$	projektivní geometrie

Přechodu k obsáhlejší grupě odpovídá tedy přechod k „chudší“ geometrii.

Závěrem několik doplňujících poznámek, které se zčásti týkají historického vlivu Erlangenského programu.

Při četbě Erlangenského programu udivuje, že v něm Klein nestuduje afinní grupu a nezačleňuje ji tedy mezi hlavní grupu a grupu kolineací. Klein to později (1921) retrospektivně vysvětluje jako „vliv jednostranné tradice“; teprve počínaje rokem 1895/96 výrazněji vytkl ve svých přednáškách afinní grupu jako souhrn všech celistvých lineárních substitucí v nehomogenních proměnných.

*) Tamže, str. 319.

**) Tamže, str. 465/466.

***) Tamže, str. 319.

Klasifikace geometrie, uskutečněná Erlangenským programem, podstatně přispěla k odhalení matematické závažnosti axiomaticky postavených základů geometrie ve smyslu Helmholtzových a Riemannových podnětů. Ačkoliv se Klein na tomto procesu nepodílel — stavěl se dokonce dosti odmítavě vůči množinově založené a axiomaticky budované moderní matematice, rozvíjející se na začátku dvacátého století — stal se v geometrii Erlangenským programem takřka nevědomky iniciátorem nového jejího pojetí, jež zahájil M. PASCH (1843—1930) a pak rozvinul D. HILBERT (1862—1943). Je třeba připomenout, že Klein přes mnohé protichůdné názory na Hilbertovo pojetí podstaty matematiky dal sám podnět k Hilbertově povolání na své vlastní působiště v Göttingen.

Erlangenský program představuje pojmovou syntézu dlouholetého vývoje nejrůznějších a až do té doby oddělených matematických a zejména geometrických disciplín. Koncepce grupové klasifikace geometrie, která je v něm obsažena, znamenala skutečný historický zvrat nejen ve vývoji geometrie, ale se zřetelem na jednotící sílu grupového myšlení současně i zvrat v oblasti algebry, v níž se během devatenáctého století vyvíjelo myšlení v matematických strukturách. Erlangenský program stál tedy na konci starého a zároveň na začátku nového vývojového období a patří k nejvýznamnějším mezníkům dějin matematiky devatenáctého století.

Přeložil a upravil František Dušek

Miniaturní zkapalňovač plynů

(⌀ 7 mm, délka 43 mm, hmota 6 g) byl vyvinut pro chlazení speciálních elektronických součástek. Vzduch, dusík nebo argon z bomby se ochlazuje v protiproudovém chladiči, expanduje po průchodu tryskou o průměru 0,05 mm a protiproudovým chladičem odchází. Během několika vteřin se dosáhne teploty 77°K, plyn kapalní a stéká do pracovního prostoru. Tepelnou izolaci zaručuje Dewarova nádoba. Poněvadž přístroj je poměrně jednoduchý, má zřejmě větší ztráty plynu, ale to při malých rozměrech a spotřebě příliš nevadí.

Sk

Fotografická závěrka

poháněná vířivými proudy vytvářenými elektromagnetem byla patentována v USA.

Sk

Miliden

jako jednotku času doporučují někteří američtí odborníci. Je to o něco více než 1 minuta (přesněji 86,4 s). Podle návrhu by se dny číslovaly průběžně od počátku roku a šestimístné číslo by s přesností ± 1 min. určovalo čas v kterémkoli okamžiku roku. Tato úprava by byla výhodná pro lidi i pro počítače. Má však i své nevýhody; o půlnoci mezi Silvestrem a Novým rokem by se takové hodiny musely nastavit na 001.000 a při přechodu mezi dnešními časovými pásmy by se muselo přičítat nebo odečítat 41,666 ... milidnů.

Sk