František Štěpánek
130 let divergentních trigonometrických Fourierových řad (1. část)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 49 (2004), No. 1, 53--60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/140851

130 let divergentních trigonometrických Fourierových řad (1. část)

František Štěpánek, Praha

Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration...

Niels Henrik Abel (1826)
(Œuvres complètes, Tome 2,
Christiania 1881, s. 256)

Předmluva

V roce 2003 uplynulo 130 let od sestrojení první spojité funkce, jejíž trigonometrická Fourierova řada **diverguje** (alespoň) v jednom bodě. V tomto článku se zaměříme (po nezbytných úvodních partiích) na poněkud obsáhlejší reflexi této významné historické události (§ 1).

Dále pak připojíme řadu stručných informací o některých (klasických i novějších) **konstrukcích** funkcí s divergentní trigonometrickou Fourierovou řadou (§§ 1–4).

Zmíníme se rovněž o množinách divergence trigonometrických Fourierových řad (§ 5) a o řešeních Luzinovy hypotézy (Dodatek).

V textu jsou také uvedeny (zejména v § 5) některé (vesměs obtížné) **neřešené** problémy. Lze tedy oprávněně očekávat, že i tematika divergentních trigonometrických Fourierových řad bude živou součástí ortogonální spirituality v matematické analýze dvacátého prvního století.

Symbolika, úmluvy, základní pojmy

Množinu všech reálných (resp. racionálních) čísel značíme $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Q}$), množinu všech přirozených (resp. celých nezáporných) čísel pak $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}_0$). Písmeno $\mathcal{C}$ (resp. L) označuje systém všech reálných 2π-periodických funkcí, které jsou v intervalu $I = \langle -\pi, \pi \rangle$ spojité (resp. mají v I konečný Lebesgueův integrál). Konečně symbol L^p $(p > 1)$ značí systém všech měřitelných reálných 2π-periodických funkcí f, pro něž $|f|^p \in L$.

RNDr. František Štěpánek, CSc. (1938), Jirečkova 3/1021, 170 00 Praha 7.

Nekonečnou řadu funkcí

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(u_k \cos kx + v_k \sin kx), \qquad x \in \mathbb{R},$$

kde $u_k \in \mathbb{R}$, $v_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}_0$), nazveme trigonometrickou řadou. Pro libovolnou funkci $f \in L$ položíme[1])

$$(2) \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{N}_0, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Číslům (2) říkáme (viz dále historický úvod) Fourierovy koeficienty funkce f. Pro trigonometrickou řadu speciálního tvaru

$$(3) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad x \in \mathbb{R},$$

pak užíváme název Fourierova řada (= F-řada) funkce f. Přitom posloupnost částečných součtů řady (3) je posloupnost

$$(4) \qquad \begin{aligned} s_0(f,x) &= \frac{a_0}{2}, \\ s_n(f,x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Slovo „divergentní“ (resp. „diverguje“) znamená v celém výkladu totéž jako „není konvergentní“ (resp. „nekonverguje“).

Zkratka „s. v.“ je místo slov „μ-skoro všude v $\mathbb{R}$“, kde μ je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}$. (K tomu srov. např. [20, s. 69].) Je-li množina $M \subset \mathbb{R}$ taková, že $\mu M = 0$, říkáme, že M je nulová.

Historický úvod

1. Vzorce (2) a trigonometrické řady (3) byly poprvé (a to velice nejasně) uvedeny v § 6 III. kapitoly knihy [18], kterou napsal profesor pařížské polytechniky Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768–1830). (Srov. [13, s. 55–61].[2])) Ten přitom v této své knize navíc tvrdil, že každou „graficky zadanou“ funkci lze vyjádřit jako **součet** nějaké trigonometrické řady (1)! (Viz [18, §§ 417–418], event. [13, s. 61–67], [12, s. 468], [6, s. 153].)

---

[1]) Integrace zde i dále v textu je ve smyslu Lebesgueově.

[2]) Poměrně málo citovaná kniha [13] je unikátní publikací, kterou napsal litevský matematik Algirdas Boleslavovič Paplauskas (* 1931). Recenzentem [13] byl mj. Adolf Pavlovič Juškevič (1906–1993). (Srov. [13, s. 5] a dále [2, s. 53].)

Takové překvapivé tvrzení se objevilo dokonce již v pojednání, které J. Fourier předložil 21. prosince 1807 pařížské akademii věd. Dotyčné tvrzení — uvedené bez korektního důkazu (např. konvergence příslušné trigonometrické řady) — vyvolalo tehdy ostrou reakci některých významných matematiků. (Srov. [13, s. 40–41].)

Právě popsaný (poněkud vágní) počátek Fourierovy analýzy byl výstižně charakterizován těmito slovy:

„Žilo se v naději na odpověď, že dobré funkce budou mít dobré řady a historie této části matematiky byla touto nadějí silně ovlivněna.“ (Viz [3, s. 315^{11-13}].[3]))

2. První kritérium bodové konvergence řad (3) publikoval až Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) — poprvé r. 1829 a v přepracované verzi r. 1837 ([13, s. 85–94]). Při důkazu tohoto kritéria P. G. L. Dirichlet především upřesnil obecný postup hledání součtu řady (3), navržený již dříve J. Fourierem ([13, s. 61–63]). Upravil také (pro uvažovanou třídu funkcí f — srov. [8, s. 248]) Fourierův vzorec pro (4) (srov. [13, s. 62]) na finální tvar

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{5}$$

kde (při dnešním obvyklém značení)

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{1}{2}t)}, \quad t\in I,\ t\neq 0,\ n\in\mathbb{N},\\ D_0(t) &= \frac{1}{2}, \quad t\in I, \qquad D_n(0) = n+\frac{1}{2}, \quad n\in\mathbb{N}. \end{aligned} \tag{6}$$

Funkci (6) dnes říkáme **Dirichletovo jádro** (n-tého řádu). (Srov [13, s. 89], [16, s. 9], [17, s. 94, 151], [19, s. 46, 60], [21, s. 125] apod.)

3. O případné divergenci F-řady spojité funkce (která není „po částech“ monotonní) se P. G. L. Dirichlet vyjadřoval vesměs neurčitě ([8, s. 248], [13, s. 92–93, 151]). Příslušný D-příklad = příklad funkce $f \in \mathcal{C}$ takové, že

(d) posloupnost (4) diverguje (alespoň) v jednom bodě $x \in I$,

tak čekal na svou publikaci ještě hezkou řádku let.

V [8] na str. 248 je mj. vyloženo, jak se jednotlivé D-příklady postupně objevovaly. Uvedené údaje doplníme a zpřesníme v dalším textu. Pro začátek je vhodné zdůraznit, že první prezentace jisté třídy D-příkladů byla téměř společnou záležitostí dvou německých matematiků — Paula Du Bois-Reymonda a Hermanna Schwarze.

[3]) Naopak názor, který je tak suverénně (podruhé! — viz [11]) formulován větou na s. 314_{6-4} v práci [3], je podivný a spíše nesprávný!! „This sentence gave me a jolt“ — napsal o této větě (právě v [11]) tvůrce moderní harmonické analýzy Solomon Bochner (1899–1982); viz [1, s. 278, 282].

1. D-příklady P. Du Bois-Reymonda a H. Schwarze

1. Dne 6. srpna 1873 vyšel ve zprávách göttingenské univerzity pod číslem 21 článek [23]. Jeho autor — Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831–1889) v něm na str. 574–578 stručně vysvětlil hlavní myšlenku **konstrukce** jistých funkcí $f \in \mathcal{C}$, které mají vlastnost (d). Podrobně byla tato konstrukce provedena až v [24, IV. kap. + část závěru] a dodatečně zjednodušena v [25, s. 440–445].[4])

P. Du Bois-Reymond celkem názorným způsobem sestrojil funkci $f \in \mathcal{C}$ takovou, že

(•) f má v libovolném okolí bodu nula **nekonečně mnoho** ostrých lokálních extrémů

a přitom posloupnost (4) není omezená pro $x = 0$. (Srov. [13, s. 153–154].) Jeho následovníci hodnotili tento průkopnický čin zpravidla velice kladně ([30, § 5, odst. 2], [13, s. 150], [16, s. 10]).

2. Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) při hledání funkce $f \in \mathcal{C}$ s vlastností (d) navázal přímo na úvahy z [25]. Ve svém D-příkladě ([15, s. 109–112], resp. [13, s. 156–157]) uvedl **sudou** funkci $f \in \mathcal{C}$ splňující (•). Zvolil totiž

$$n_0 = 1, \qquad n_k = 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1), \qquad c_k = \big(\log(2k+1)\big)^{-\frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

a pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$ definoval

$$f(0) = 0, \qquad f(x) = c_k \sin n_k x, \quad x \in \left\langle \frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}} \right\rangle, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Po drobné standardní úpravě vzorce (5) ([17, s. 134–135][5])) se zjistí, že platí (d) s $x = 0$.

3. Na závěr § 1 ještě připojíme drobnou poznámku.

P. Du Bois-Reymond si položil otázku, zdali existuje funkce $f \in \mathcal{C}$ taková, že řada (3) diverguje **všude** v $\mathbb{R}$. (Srov. [25].) V této souvislosti pak napsal, že „neměl štěstí řešit tuto otázku“, a usoudil, že taková funkce f **neexistuje**! (Viz [13, s. 155].) To byla v roce 1876 geniální hypotéza, jejíž pravdivost se potvrdila až po devadesáti letech. (Viz [8, s. 249] a náš Dodatek.)

Mezitím již **roku 1900** nadaný student z Budapešti Lipót (Leopold) Fejér ([14, s. 31–32]) uvedl do teorie F-řad sčítatelnost metodou aritmetických průměrů ([27], [20, s. 518, věta 191, II]). Toto jeho elegantní užití (C,1)-sčitatelnosti ([8, s. 248], [19, s. 94, věta 73]) tak u F-řad spojitých funkcí obnovilo jistou estetiku, pokaženou prvními D-příklady ([16, s. 11]).

---

[4]) Připomeňme, že P. Du Bois Reymond (v letech 1874–1884 profesor univerzity v Tübingen) publikoval v delší práci z roku 1875 i Weierstrassův příklad spojité funkce „bez derivace“ ([5, s. 233^{1-2}]). Vznik tohoto příkladu přitom A. Pinkus ([14, s. 4]) klade snad již do roku **1861**! (Srov. [5, s. 232], [8, s. 243_1], [10, s. 194^1].)

[5]) Zde je Schwarzův D-příklad omylem uveden jako Lebesgueův! (Viz [13, s. 157].)

V první dekádě dvacátého století však HENRI LEON LEBESGUE ([7]) a LIPÓT FEJÉR ([4, s. 73]) zahájili novou éru vytváření (brilantních) D-příkladů.

2. Divergentní F-řady spojitých funkcí v pracích H. Lebesguea a L. Fejéra

1. Lebesgueův přístup k tvorbě D-příkladů byl ryze **geometrický** ([22, s. 85–88], [32, § 33, § 48], resp. [19, s. 78–80]).

H. Lebesgue vyšetřoval posloupnost čísel[6])

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} D_n(t)\cdot D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad n\in\mathbb{N}_0, \tag{7}$$

a dokázal, že $L_n \to \infty$ pro $n\to\infty$.[7])

Velikost L_n příliš nezměníme, jestliže funkci $\operatorname{sign} D_n$ ([17, s. 151] a (7)) nahradíme vhodnou **spojitou** funkcí, která ovšem bude (bohužel!) **záviset** na daném n. Dominantní pozici při výkladu Lebesgueova D-příkladu ([22, s. 87–88]), resp. jeho zobecnění ([19, s. 78, věta 66]) proto má jisté názorné „aproximační lemma", např. toto:

Lemma L. *K libovolnému $n\in\mathbb{N}$ existuje funkce $f_n\in\mathcal{C}$ tak, že $|f_n(t)|\leqq 1,\ t\in I,$ a*[8])

$$s_n(f_n,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)D_n(t)\,\mathrm{d}t \geqq 2^{-1}L_n. \tag{$*$}$$

Pomocí funkcí $f_1,\ f_2,\ f_3,\ \dots$ lze již snadno definovat funkci $f\in\mathcal{C}$, pro kterou (vzhledem k $(*)$) platí (d) s $x=0$ ([19, s. 78–79], [8, s. 247]).

2. L. Fejér, „grandstudent" C. T. Weierstrasse (viz [4, s. 73], [14, s. 31–32]), je autorem několika D-příkladů ([28], resp. [26], [29], [30]). Typickým rysem těchto D-příkladů je, že se v nich výrazným způsobem uplatňují **lakunární** trigonometrické řady ([17, kap. XI], [19, s. 110, 145, (6.4)]).[9])

Fejérovy D-příklady jsou vesměs početně náročné a navíc místy doplněné (dodnes!) neřešenými úlohami. (Srov. např. [30, § 5].) Často citované jsou jeho D-příklady, v nichž je užito trigonometrických polynomů

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-1}\big(\cos(n-k+1) - \cos(n+k)x\big), \qquad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{8}$$

resp. jejich modifikací. První příklad tohoto typu byl publikován v [29] a je (s malou obměnou) vyložen i v [20, s. 516–517].

---

[6]) Při běžně užívaném označení ([17, s. 115], [21, s. 129] apod.). L. Fejér zavedl pro čísla (7) název „Lebesgueovy konstanty" ([30, §1]).

[7]) Čísla L_n se „chovají" asi jako $\log n$ ([8, s. 249], přesněji pak např. [17, s. 115, (35.15)], [21, s. 128–129, (11)]).

[8]) Tato nerovnost byla během dvacátého století v mnoha směrech zobecněna. (Viz dále § 4.)

[9]) Srov. „image" Weierstrassovy spojité funkce „bez derivace" ([5, s. 232[10]]).

Polynomy (8) umožňují konstruovat i funkce $f \in \mathcal{C}$ s vlastností (d), pro něž navíc platí

$$(O_1) \qquad \text{existuje } A > 0 \text{ tak, že } |s_n(f,x)| \leqq A, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

([17, s. 132–133]). O jednom užití takových D-příkladů se zmíníme hned v následujícím paragrafu.

3. Kondenzace singularit u D-příkladů

1. Lze sestrojit funkci z $\mathcal{C}$, jejíž F-řada diverguje dokonce na spočetné množině, husté v I? Odpověď je „ANO“! Abychom si to ověřili, stačí jen vhodným způsobem aplikovat tzv. metodu **kondenzace singularit**.[10]) Tuto metodu popsal r. 1870 profesor tübingenské univerzity Hermann Hankel (1839–1873). (Srov. [31, s. 77–84].)

Zmíněnou metodu dobře známe z elementární analýzy. Položíme-li například $(r_l, r_2, r_3, \ldots) = \mathbb{Q} \cap (0,1)$, potom funkce

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}|x - r_n|, \qquad x \in (0,1),$$

je spojitá, ale nemá derivaci v žádném r_n.[11])

Podobným způsobem můžeme „zhušťovat“ i singularity bodové konvergence F-řad. Uveďme si jednoduchý příklad.

Příklad. Uvažme množinu $(s_1, s_2, s_3, \ldots) = \mathbb{Q} \cap (0, 2\pi)$ a vezměme funkci $f \in \mathcal{C}$ takovou, že řada (3) diverguje pro $x = 0$, konverguje pro všechna $x \in I$, $x \neq 0$, a přitom platí (O_1). (Viz výše.) Položme

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} f(x - s_n), \qquad x \in (0, 2\pi).$$

Potom $H \in \mathcal{C}$ a F-řada funkce H diverguje v každém bodě s_n, $n \in \mathbb{N}$ ([17, s. 320–322]).

2. Károly Tandori (* 1925) z Bolyaiova matematického ústavu univerzity v Szegedu konstruoval pomocí polynomů (8) funkci $f \in \mathcal{C}$ takovou, že

- platí (O_1),
- řada (3) diverguje na **nulové** množině, která je mohutnosti kontinua v **každém** intervalu z $\mathbb{R}$.

(Srov. např. [17, s. 322–323].)

[10]) O to se zběžně pokusil už P. Du Bois-Reymond v závěru své práce [24]. (Srov. [13, s. 155].)

[11]) Funkce $|x - r_n|$, $n \in \mathbb{N}$, má jediný „zub“ (v bodě $x = r_n$). Funkce F je pak „stejnoměrnou limitou“ jistých „pil“ ([9, s. 149]).

3. Existuje funkce $f \in \mathcal{C}$, jejíž F-řada diverguje na množině **kladné** Lebesgueovy míry? Odpověď na tuto otázku byla získána až roku 1966! Geniálním užitím nestandardního „zjemnění“ klasických metod se zjistilo, že taková funkce **neexistuje**. (Srov. [8, s. 249] a náš Dodatek.) To jen potvrzuje pravdivost poslední věty S. Bochnera z [11]:

YES, FOURIER SERIES DID INDEED COME FIRST!

(*Pokračování příště.*)

L i t e r a t u r a

Články z PMFA

[1] Fischer, A.: *Od funkcí periodických ke skoroperiodickým.* *45* (2000), 273–283.
[2] Grattan-Guinness, I.: *Aktivita v historiografii matematiky ve 20. století.* *45* (2000), 47–64.
[3] Halmos, P.: *Zpomalil se rozvoj matematiky? 2. část.* *36* (1991), 305–319.
[4] Hersh, R., Johnová-Steinerová, V.: *Návštěvou u maďarských matematiků.* *40* (1995), 65–87.
[5] Hykšová, M.: *Fraktály a objektově orientované programování.* *46* (2001), 232–253.
[6] Kopáčková, A.: *Nejen žákovské představy o funkcích.* *47* (2002), 149–161.
[7] Netuka, I., Veselý, J.: *Henri Lebesgue. (K stému výročí narození).* *20* (1975), 301–307.
[8] Netuka, I., Veselý, J.: *Sto let Baireovy věty o kategoriích.* *45* (2000), 232–256.
[9] Preiss, D.: *Nederivovatelné funkce.* *28* (1983), 148–154.
[10] Zajíček, L.: *Obecná teorie derivování funkcí a měr na katedře matematické analýzy MFF UK.* *45* (2000), 188–207.

Další publikace z historie matematiky, přehledné články

[11] Bochner, S.: *Fourier series came first.* Amer. Math. Monthly *86* (1979), 197–199.
[12] Coppel, W. A.: *J. B. Fourier — on the occasion of his two hundredth birthday.* Amer. Math. Monthly *76* (1969), 468–483.
[13] Paplauskas, A. B.: *Trigonometričeskije rjady ot Eulera do Lebega.* Nauka, Moskva 1966.
[14] Pinkus, A.: *Weierstrass and approximation theory.* J. Approx. Theory *107* (2000), 1–66.
[15] Sachse, M. A.: *Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique.* Bull. Sci. Math. (2. série) *4* (1880), 43–64, 83–112.
[16] Zygmund, A.: *Notes on the history of Fourier series.* Studies in harmonic analysis, De Paul University, Chicago 1974, 1–19.

Monografie, učebnice

[17] Bari, N. K.: *Trigonometričeskije rjady.* Gosud. izdatělstvo fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva 1961.
[18] Fourier, J. B. J.: *Théorie analytique de la chaleur.* Paris 1822.
[19] Hardy, G. H., Rogosiński, W. W.: *Fourierovy řady.* SNTL, Praha 1971.
[20] Jarník, V.: *Integrální počet II.* NČSAV, Praha 1955.
[21] Kašin, B. S., Saakjan, A. A.: *Ortogonalnyje rjady.* Nauka, Moskva 1984.
[22] Lebesgue, H.: *Leçons sur les séries trigonométriques.* Gauthier-Villars, Paris 1906.

Další články k §§1–3

[23] Du Bois-Reymond, P. D. G.: *Ueber die Fourierschen Reihen.* Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften (Göttingen) No. 21 (1873), 571–584.

[24] Du Bois-Reymond, P. D. G.: *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln.* Abhandlungen der Math.-Phys. Classe der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Abt. 2, *12* (1877), 1–103.

[25] Du Bois-Reymond, P. D. G.: *Zusätze zur Abhandlung: Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln.* Math. Ann. *10* (1876), 431–445.

[26] Dzjadyk, V. K.: *Prostoj priměr něpreryvnoj periodičeskoj funkciji ně razlagajuščejsja v rjad Furje.* Ukrajinskij mat. žurnal *17* (1965), 103–104.

[27] Fejér, L.: *Sur les fonctions bornées et intégrables.* Comptes rendus Acad. Sci. Paris *131* (1900), 984–987.

[28] Fejér, L.: *Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe.* J. Reine Angew. Math. *137* (1909), 1–5.

[29] Fejér, L.: *Eine stetige Funktion, deren Fouriersche Reihe divergiert.* Rendiconti di Palermo *28* (1909), 402–404.

[30] Fejér, L.: *Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen.* J. Reine Angew. Math. *138* (1910), 22–53.

[31] Hankel, H.: *Untersuchungen über die unendliche oft oscillirenden und unstetigen Funktionen.* Math. Ann. *20* (1882), 63–112.

[32] Lebesgue, H.: *Sur les intégrales singulières.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (3) *1* (1909), 25–117.

Vztažné systémy v astronomii

Jan Horský, Brno, a Milan Štefaník, Bratislava

Významnou položkou práce astronomů je nejenom samotné pozorování, ale také následné zpracování naměřených hodnot, jejich interpretace a popřípadě extrapolace do minulosti a budoucnosti. Měření i výpočty se mohou samozřejmě provádět v různých souřadnicových systémech. Ne všechny výpočty se dají dělat explicitně, proto se musí užít různých aproximačních metod. Tvar obdržených řešení může být různý a různé mohou být i referenční systémy. Proto je důležité mít takový tvar metrických koeficientů, tedy referenční neboli vztažný systém, v němž by pohybové rovnice dobře (jednoduše) popisovaly jak translační, tak i rotační pohyb těles, šíření světla, rychlost

Prof. RNDr. Jan Horský, DrSc. (1940), Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Kotlářská 2, 611 37 Brno, e-mail: horsky@sci.muni.cz

RNDr. Milan Štefaník, Ph. D. (1966), Belčanského 12, SK-85 101 Bratislava, e-mail: milan.stefanik@alcatel.sk