Petr Mandl

Krátce o současné finanční matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 44 (1999), No. 2, 135--140

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/140990`

Krátce o současné finanční matematice

Petr Mandl, Praha

Americký klub dam versus pojišťovna Praha

Dostal jsem od redakce námět, abych napsal pro časopis příspěvek o finanční matematice, zejména o matematice oceňování opcí. Blackova-Scholesova teorie opcí je populární v akademických kruzích, kde je rozvíjena zpravidla způsobem beroucím malý ohled na potřeby studentů směřujících do praxe. Začnu proto několika odstavci o občanech, kteří se finanční matematikou živí. Považoval jsem za vhodné poněkud zastřít pekuniární aspekty tohoto úvodu pohledem do národních dějin. K tomu se nabízí postava Františka Josefa Studničky (1836–1903), zejména když nedávno vyšla jeho pěkná biografie od M. Němcové ([10]). Studnička kromě toho, že publikoval knihu Základové počtářství národohospodářského ([13]), byl též naším prvním odpovědným pojistným matematikem. Stal se 23. května 1869 při vzniku pojišťovny Praha členem jejího ředitelství, kde zastupoval obor pojistně-technický ([8]). To se v biografii nenajde a nelze se příliš divit. Ani A. Pánek, který v letním semestru 1897/98 pojistnou matematiku na české technice přednášel ([5]), se o této Studničkově činnosti nezmiňuje ([11]). Proto jsem si v biografii četl, trochu se závistí, o počtu posluchaček na Studničkových přednáškách v Americkém klubu dam.

Protože se matematiky právě zabývají čeští zákonodárci při novelizaci zákona o pojišťovnictví, použil jsem výše uvedené jako zkratku pro vyjádření potřeby profesionalizace našeho oboru: Matematika potřebující mecenáše, kterým v případě Amerického klubu dam byl Vojta Náprstek, nebo matematika jako vlivné povolání?

Jednota československých matematiků a fyziků vydávala v letech 1929–1949 časopis Aktuárské vědy. Těmi se rozuměly pojistná matematika a matematická statistika. Dnes se označení aktuár užívá pro pojistné matematiky. Aktuáři, díky tomu, že musí neustále uplatňovat svou matematickou erudici v soupeření s jinými profesemi, získali praktický smysl pro zájmy svého povolání. Ten uplatňovali i ve školství. Po válce dosáhli vydání zákona č. 122/1946 Sb. o studiu statisticko-pojistném. Absolventi tohoto studia na Karlově univerzitě získávali titul magistra již v roce 1947. Dnes zastupuje zájmy pojistných matematiků Česká společnost aktuárů, která je řádným členem Mezinárodní aktuárské asociace. Projednávaná novela zákona o pojišťovnictví uloží pojišťovnám zaměstnávat odpovědné pojistné matematiky. Ti budou potvrzovat na řadě dokumentů správné užívání teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky,

---

Prof. RNDr. Petr Mandl, DrSc. (1933), Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8.

jejichž aplikace v pojišťovnách se dnes neomezuje na pojišťování (technické riziko), ale i na investování, zejména na sledování solventnosti.

Vznik profesních sdružení matematiků v privátním sektoru a ve státní správě by přispěl k tomu, aby pracovní příležitosti vyžadující matematickou odbornost byly obsazovány kvalifikovanými zaměstnanci. Úspěch vysokoškolských pracovišť pak bude záviset i na významu, jaký jim vlivná profesní sdružení budou přisuzovat. Tím bude vědeckopedagogická činnost zaměřena na potřeby absolventů. V pojistné matematice má takový přístup u nás dobrou tradici. Uveďme, že profesor J. Janko býval místopředsedou Spolku československých pojistných techniků, jehož následníkem je Česká společnost aktuárů.

Matematika na Nobelovu cenu za ekonomii

Máme od redakce úkol ozřejmit si oceňování finančních opcí. Připomínáme, že M. Scholesovi byla současně s R. Mertonem ([9]) udělena v roce 1997 Nobelova cena za ekonomii. *Termínový kontrakt typu call* představuje oprávnění koupit v dohodnutém termínu dohodnuté množství určitého aktiva za dohodnutou cenu. Jako aktivum si nejlépe představíme akcie určitého druhu. Budeme sledovat cenu jednotkového množství aktiva v časových intervalech délky Δ. Označme $S(j)$ cenu v čase $j\Delta$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Přitom $n\Delta = T$ je termín vypořádání opce. Je-li K dohodnutá kupní cena, majitel opce aktivum nekoupí při $S(n) \leqq K$. Jeho výnos při vypršení opce je proto

$$\big(S(n) - K\big)_+ . \tag{1}$$

Chceme stanovit, jakou cenu má výplata (1) v čase 0 za předpokladu, že aktivum je obchodováno na trhu dosti idealizovaných vlastností. Z toho trhu převezmeme do našich úvah bezrizikové aktivum. Rozhodli jsme se postupovat podle W. Sharpeho od jednoduchého ke složitějšímu, a proto předpokládáme

$$P\big(S(j+1) = uS(j)\big) = p, \qquad P\big(S(j+1) = S(j)/u\big) = 1 - p, \tag{2}$$

kde $0 < p < 1$ a vzrůst nebo pokles ceny aktiva je nezávislý na minulých cenách. Protože nárůst ceny aktiva není zaručen, musí jeho velikost splňovat

$$u > r, \qquad r = 1 + \text{bezrizikový výnos}.$$

Z (2) vidíme, že jsme začali u bernoulliovské řady náhodných pokusů. Zkušenosti z teorie pravděpodobnosti naznačují, že tudy povede cesta. Půjdeme-li však po ní příliš daleko, dostaneme se do říše pohádek. Cena aktiva představuje náhodnou procházku s pravděpodobností p směrem nahoru, s pravděpodobností $1 - p$ směrem dolů po síti znázorněné v semilogaritmických souřadnicích na obrázku 1. Zjistíme, jakou cenu má (1) v čase $(n-1)\Delta$. Na obrázku jsme vyznačili $S(n-1) = S$. Představme si portfolio tvořené v čase $(n-1)\Delta$ množstvím a aktiva spolu s bezrizikovými dluhopisy v ceně B. Volme a, B tak, aby hodnota portfolia v čase $n\Delta$ byla shodná s (1). Máme rovnice

$$\begin{aligned} uSa + rB &= (uS - K)_+ = C_u, \\ Sa/u + rB &= (S/u - K)_+ = C_d. \end{aligned} \tag{3}$$

Zřejmě na ideálním trhu bude cena opce v čase $(n-1)\Delta$ stejná jako cena portfolia. Ta podle (3) vychází

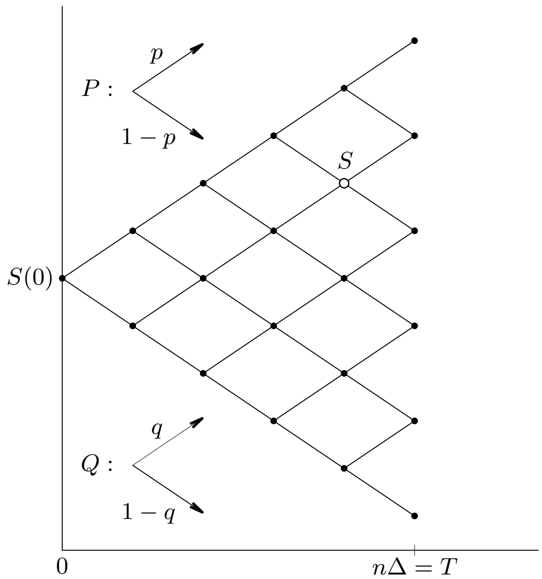
$$\begin{aligned} Sa + B &= \big(C_u(ru-1)/(u^2-1) + C_d(u^2-ru)/(u^2-1)\big)r^{-1} = \\ &= \big(C_u q + C_d(1-q)\big)r^{-1}. \end{aligned}$$

Vidíme, že při stanovení ceny opce se pohybujeme na obrázku 1 podle rozložení pravděpodobností Q, při němž místo (2) platí

$$Q\big(S(j+1) = uS(j)\big) = q, \qquad Q\big(S(j+1) = S(j)/u\big) = 1-q, \tag{4}$$

a diskontujeme vzhledem k bezrizikové výnosové míře. Pro cenu opce v čase 0 dostáváme

$$r^{-n} E_Q\big(S(n) - K\big)_+ . \tag{5}$$



Obr. 1

Počítejme podmíněnou střední hodnotu

$$E_Q\{r^{-j-1}S(j+1) \mid S(j) = S\} = r^{-j-1}\big(quS + (1-q)S/u\big) = r^{-j}S.$$

Při rozložení Q je proto $r^{-j}S(j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, něco jako kapitál hráče hrajícího spravedlivou hru neboli martingal.

Protože $\log\bigl(S(j)/S(0)\bigr)$, $j = 0, 1, \ldots$, je náhodná procházka, je přechod ke spojitému času v obrázku 1 při $\Delta \to 0$ dobře známá věc. Parametry v závislosti na Δ lze volit

$$u = \exp\bigl(\sigma\sqrt{\Delta}\bigr), \qquad r = \exp(\varrho\Delta), \qquad p = \bigl(1 + \mu\sqrt{\Delta}/\sigma\bigr)/2. \tag{6}$$

Bernoulliovská náhodná procházka přejde při $\Delta \to 0$ v proces Brownova pohybu. Spojitá trajektorie $\{S_t,\, t \geqq 0\}$ ceny aktiva má pak vyjádření

$$S_t = S_0 \exp\{\mu t + \sigma W_t\}, \quad t \geqq 0, \tag{7}$$

kde $\{W_t,\, t \geqq 0\}$ je Wienerův proces. Ten odpovídá představě integrálu normovaného bílého šumu neboli elementárního spojitého působení náhody. Proces objevil L. Bachelier ([1]) právě při rozvíjení teorie burzovní spekulace. Z (6) plyne

$$q = \bigl(1 + (\varrho - \sigma^2/2)\sqrt{\Delta}/\sigma\bigr)/2 + O(\Delta).$$

Odtud při rozložení Q

$$S_t = S_0 \exp\bigl\{(\varrho - \sigma^2/2)t + \sigma\, {}^{\circ}W_t\bigr\}, \quad t \geqq 0, \tag{8}$$

kde

$${}^{\circ}W_t = W_t + \gamma t, \quad t \geqq 0, \qquad \gamma = \mu + \sigma^2/2 - \varrho, \tag{9}$$

je při Q Wienerovým procesem.

Při jisté zručnosti s počítáním integrálů vzhledem k normálnímu rozložení se nejen ověří, že při Q je $\{\mathrm{e}^{-\varrho t} S_t,\, t \geqq 0\}$ martingalem, ale vypočte se

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\varrho T} E_Q(S_T - K)_+ = S_0 \Phi\bigl([\log(S_0/K) + (\varrho + \sigma^2/2)T]/\sigma\sqrt{T}\bigr) - \\ - \mathrm{e}^{-\varrho T} K \Phi\bigl([\log(S_0/K) + (\varrho - \sigma^2/2)T]/\sigma\sqrt{T}\bigr), \end{aligned} \tag{10}$$

kde $\Phi(x)$ je distribuční funkce standardního normálního rozložení. (10) je *Blackova--Scholesova formule* pro oceňování (evropských) call opcí. Parametru σ se říká volatilita cenného papíru, ϱ je bezriziková výnosová intenzita, veličina γ v (9) představuje cenu rizika. Předpokládá se, že nejsou transakční náklady, není vyplácena dividenda, aktivum a bezrizikový dluhopis jsou volně a okamžitě obchodovatelné i v záporném množství.

Přehlédněme, co jsme odvodili:

a) K určení ceny opce je třeba nalézt rozložení pravděpodobností Q vzájemně absolutně spojité s P, při němž je $\{\mathrm{e}^{-\varrho t} S_t,\, t \geqq 0\}$ martingalem. Poznamenejme, že pro různá σ jsou rozložení procesů (7) nebo (8) na libovolném časovém intervalu vzájemně singulární.

b) Cena opce nezávisí na parametru μ, vyjadřujícím trend v ceně aktiva.

c) Hlavním nástrojem bylo replikační portfolio, jehož cena zůstává stejná s cenou opce bez dodávání finančních prostředků.

Je nasnadě, jak vznikají variace na uvedené téma. Do modelu se zahrne více aktiv a více Wienerových procesů, předpokládá se výplata dividendy nebo zúčtování v cizích měnách. Snadné je zobecnění na případ, kdy parametry μ, σ, ϱ jsou funkcemi času.

Zvláštní pozornost si zaslouží stochastické modely úrokových sazeb. Ty byly rozvíjeny již delší dobu, značnou reputaci si při tom získal náš krajan O. Vašíček ([14]). Do rámce Blackovy-Scholesovy teorie byly zařazeny teprve nedávno ([3]) tak, že pro *bezkuponový dluhopis* jednotkové výše splatný v čase T vyšla cena

$$E_Q \exp\left\{-\int_0^T \varrho_t \,\mathrm{d}t\right\}, \tag{11}$$

v souladu s dřívějšími modely. V (11) je $\varrho_t \,\mathrm{d}t$ výnos z bezrizikové půjčky na dobu $\langle t, t+\mathrm{d}t)$, což je v čase 0 náhodná veličina.

To byla úvodní ukázka z jedné oblasti finanční matematiky. My jsme již naznačili, že v popředí našeho zájmu jsou matematikové ve finančnictví skutečně zaměstnaní. Stručná informace o populárním tématu oceňování opcí, např. z knihy ([2]), jim umožní nahlédnout do matematických metod vytváření ekonomických teorií. Jejich činnost však vyžaduje matematické modely koncipované pro bezprostřední práci s daty.

Prestižní studium

Francie jistě není zemí, kde by bylo málo pochopení pro teoretickou matematiku. Pojďme se tam proto poučit o vzdělávání ve finanční matematice. Ve Francii je významná tradice tzv. velkých škol, jako École polytechnique nebo École normale supérieure, které poskytují svým absolventům přednostní předpoklady pro životní kariéru. K takovým školám patří též Institut finanční a pojistné vědy při Univerzitě C. Bernarda v Lyonu (ISFA). Byl založen v roce 1930. Studium na ISFA je tříleté, uchazeči musí mít nejméně dvouleté vysokoškolské vzdělání. Přijímací zkouška zahrnuje dvě zkoušky z matematiky, které jsou rozhodující, zkoušku z francouzštiny a z cizího jazyka. Z přijímacích zkoušek roku 1992 ([4]) uveďme jako příklad úlohu vyšetřit asymptotické chování řešení diferenciální rovnice

$$f''(t) - \left(1 + 1/t^{1+\mu}\right) f(t) = 0, \qquad \mu > 0,$$

při $t \to \infty$. Byla rozdělena na 11 dílčích úloh, čas na vypracování 4 hodiny. Matematické schopnosti jsou, jak vidíme, klíčem k výběru posluchačů, kteří potom vedle matematiky a informatiky studují právo, finanční vědy a účetnictví. Absolventi mají velmi vlivnou profesní organizaci Asociaci aktuárů s diplomem ISFA ([6]).

Obdobnou koncepci jako ISFA mělo již od roku 1921 studium pojistné matematiky a matematické statistiky na Karlově univerzitě. Profesní a společenské aktivity jeho absolventů se konaly převážně v rámci JČSMF. Současná finanční a pojistná matematika na Matematicko-fyzikální fakultě UK navazuje na tradici obou pražských škol aktuárských věd ([7]). Její směřování k prestižnímu studiu dokládá projekt Výuka financí a pojišťovnictví pro studenty matematiky, sponzorovaný programem Tempus

(1996–99). Podstatou projektu je výklad matematiky současně s finanční či pojistnou teorií a práce s pokročilým matematickým softwarem, jako je Mathematica či Maple.

L i t e r a t u r a

[1] Bachelier, L.: *Théorie de la spéculation.* Ann. École normale supérieure *17* (1900), 21–86.

[2] Baxter, M., Rennie, A.: *Financial Calculus.* Cambridge University Press, Cambridge 1996.

[3] Heath, D., Jarrow, R., Morton, A.: *Bond pricing and the term structure of interest rates.* Econometrica *60* (1992), 77–105.

[4] I.S.F.A.: *Annales du Concours d'Entrée.* Lyon 1993.

[5] Janko, J. (ed.): *Třicet let pojistné techniky.* Spolek čs. pojistných techniků, Praha 1935.

[6] Mandl, P.: *ISFA — prestižní škola francouzských aktuárů.* Pojistný obzor *73* (1996), č. 11, 12–13.

[7] Mandl, P.: *Vývoj studia pojistné matematiky a matematické statistiky u nás.* Pojistný obzor *75* (1998), č. 3, 14–15.

[8] Marvan, M. et al.: *Dějiny pojišťovnictví v Československu, díl 1.* Novinář, Praha 1989.

[9] Merton, R. C.: *Continuous-time finance.* Blackwell, Cambridge MA, 1990.

[10] Němcová, M.: *František Josef Studnička.* Prometheus, Praha 1998.

[11] Pánek, A.: *Studnička František Josef.* Ottův slovník naučný XXIV (1906), 297–300.

[12] Pearce, D. W.: *Macmillanův slovník moderní ekonomie.* Victoria Publishing, Praha 1992.

[13] Studnička, F.: *Základové počtářství národohospodářského čili juridicko-politické arithmetiky.* Matice česká, Praha 1887.

[14] Vasicek, O. A.: *An equilibrium characterization of the term structure.* J. of Finance *5* (1977), 177–188.

P. S. V tomto dodatku uvádíme výklad několika pojmů našeho článku. Čtenář nechť posoudí přínos matematické formulace. Ten je podstatou zmíněného projektu programu Tempus.

Aktivum je zejména předmět mající směnnou hodnotu. Finanční aktiva (akcie, dluhopisy) představují nároky na obdržení důchodu nebo jiných plnění, zpravidla peněžních. Mezi finanční aktiva patří též peníze.

Dluhopis je převoditelné aktivum představující nárok na uhrazení dlužné jistiny v době splatnosti a na pravidelnou výplatu pevné peněžní částky (kuponu) do této doby. Bezkuponový dluhopis zavazuje pouze k uhrazení jistiny.

Opce je kontrakt opravňující zakoupit od druhé strany nebo jí prodat během dané doby určité množství aktiva (komodita, cenný papír) za předem dohodnutou cenu.

Portfolio je zde soubor finančních aktiv držených fyzickou nebo právnickou osobou.