Thomas C. Hales

Dělové koule a včelí plásty

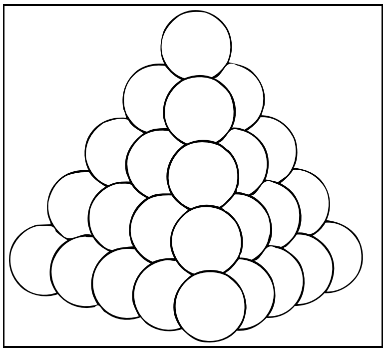
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 46 (2001), No. 2, 101--118

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141071`

Dělové koule a včelí plásty

Thomas C. Hales

Když David Hilbert předložil svůj slavný seznam třiadvaceti problémů, řekl, že zkouškou dokonalosti matematického problému je to, zda může být vysvětlen prvnímu, koho potkáme na ulici.[1]) Avšak ani po celém století nejsou Hilbertovy problémy takto důkladně prověřovány. Kdopak kdy klábosil s prodavačem o Riemannově hypotéze nebo s rodinným lékařem diskutoval o obecných zákonech reciprocity?



Obr. 1. Optimální uspořádání stejných koulí je kubické plošně centrované uspořádání.

Loni se jeden novinář z novozélandského Plymouthu rozhodl podrobit zkoušce Hilbertův osmnáctý problém a vyrazil s ním do ulic. Část tohoto problému může být formulována takto: Je možné z pomerančů poskládat úspornější hromady, než jsou pyramidy na pultech zelinářů? V pyramidách zaujímají pomeranče něco přes 74 % objemu (obr. 1). Může být jiné uspořádání ještě efektivnější?[2])

Na plymouthské obchodníky se zeleninou a ovocem úloha žádný dojem neudělala. „Táta mi ukázal, jak rovnat pomeranče, když mně byly asi čtyři roky,“ pravil prodavač

---

[1]) *Pozn. překladatelů:* P. Hoffman: *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth*, Hyperion, New York, 1998, na str. 208 uvádí Lagrangeův výrok, že matematik dostatečně neporozuměl své vlastní práci, pokud ji nemůže srozumitelně vysvětlit prvnímu člověku, kterého potká na ulici.

[2]) *Pozn. překladatelů:* Přesně vzato, osmnáctý problém je jiný. Problém nejtěsnějšího uspořádání koulí je zmiňován pouze jako „s ním spjatá otázka užitečná pro teorii čísel, fyziku a chemii“. Viz např. P. S. Alexandrov (ed.): *Problemy Gilberta*, Nauka, Moskva, 1969, a též W. Więsław (ed.): *Problemy Hilberta*, Inst. historii nauk PAN, Warszawa, 1997.

Thomas C. Hales je profesorem matematiky na University of Michigan v Ann Arbor; e-mail: `hales@math.lsa.umich.edu`

Cannonballs and Honeycombs. Notices Amer. Math. Soc. *47* (2000), 440–449.

Přeložili Jan Chleboun, Michal Křížek a Karel Segeth za podpory grantu GA ČR 201/01/1200. Překladatelé děkují RNDr. I. Saxlovi, DrSc., a RNDr. A. Šolcové za faktické připomínky a rady, jež vedly ke zlepšení úrovně překladu.

Allen. Novinář mu sdělil, že matematikům trvalo čtyři sta let, než problém vyřešili, a zeptal se ho, jak těžké pro něj bylo najít to nejlepší uspořádání pomerančů. „Vždyť jen dáváte jeden na druhý," zněla odpověď. „Tohle pochopit mně trvalo tak dvě sekundy."

Nedlouho poté, co jsem ohlásil vyřešení tohoto problému, se mi ozvali z tržiště v Ann Arbor. „Zrovna vás tady potřebujeme. Pomeranče rovnat umíme, ale máme problémy s artyčoky."

Jako geometr za tou uštěpačností vidím vážnou otázku. Proč je mezi intuicí a důkazem tak velká propast? Geometrie nás popichuje a provokuje. Například, co takhle rovnání plechovek? Může někdo pochybovat, že rovnoběžné řady stojících plechovek jsou tím nejlepším uspořádáním? Může nějaká neuspořádaná hromada plechovek zabrat ještě méně místa? Jistě řekneme, že nemůže, ale důkaz nám uniká. Jaký tvar zaujme shluk tří, čtyř nebo pěti mýdlových bublin stejného objemu, aby celková plocha povrchu byla minimální? Vyfukujeme bubliny a brzy objevíme odpověď, ale neumíme ji dokázat. Anebo včelí plást.[3]) Trojrozměrná konstrukce plástu, jak ji včely používají, není ta nejefektivnější možná. Jaká je ta skutečně nejúčelnější?

V tomto článku popíši jisté nedávno dokázané věty, které by bývaly mohly být dokázány už před staletími, jen kdyby naše matematické nástroje dokázaly soupeřit se silou naší intuice. V článku představím důkaz toho, že pyramidální nakupení pomerančů je nejlepší možné. Ale nejprve vysvětlím několik pojmů. *Uspořádáním koulí* (angl. *sphere packing*) vždy rozumíme seskupení pevných koulí v prostoru. *Hustota* vypovídá o tom, jaká část prostorové oblasti je pevnými koulemi vyplněna. Pro omezenou oblast je to poměr objemu koulí k objemu oblasti. Jestliže nějaká koule protíná hranici oblasti, pak se započítává jen ta část koule, která leží uvnitř oblasti. Je-li oblast neomezená, počítá se hustota v podoblasti vzniklé průnikem původní oblasti a koule o poloměru R. Hustota celé oblasti je definována pomocí $\limsup$ pro R jdoucí do nekonečna.

Harriot a Kepler

Chemici znají rovnání pomerančů do pyramid jako *kubické plošně centrované uspořádání* (angl. *face-centred cubic packing*). Také se mu říká uspořádání dělových koulí, protože ty bývají takto srovnány u válečných památníků. Nejstarším příkladem, který jsem viděl, je pyramida dělových koulí ze šestnáctého století spočívající před Městským muzeem v Mnichově. Z téže doby jsou známy vztahy pro určení počtu dělových koulí v tomto mohylovém uspořádání. Úkol najít takový vztah zadal v šestnáctém století Walter Raleigh svému matematickému asistentovi Thomasi Harriotovi, a ten jej bez problémů našel.

S tím, jak vzrůstala jeho vědecká pověst, stávaly se pevné koule Harriotovým oblíbeným tématem. Atomy považoval za koule. Porozumět tomu, jak jsou vzájemně

[3]) *Pozn. překladatelů:* Děkujeme RNDr. Z. Vavřínovi, CSc., z Matematického ústavu AV ČR a Ing. D. Titěrovi, CSc., z Výzkumného ústavu včelařského, s. r. o., za konzultace týkající se včelařské terminologie. Na jejich doporučení dáváme přednost termínu „plást" před „plástev".

poskládány, znamenalo porozumět přírodě. I čísla byla koulemi. Podle pythagorejského zvyku jsou trojúhelníková čísla uspořádána do trojúhelníku jako sada kulečníkových koulí. Harriot nakreslil Pascalův trojúhelník, v němž čísla nahradil odpovídajícím počtem uspořádaných koulí.

V roce 1606 si Johannes Kepler posteskl, že jeho nedávná kniha o optice byla založena výhradně na teologii. Obrátil se o pomoc k Harriotovi, jenž už léta prováděl optické pokusy. Harriotovy znalosti optiky byly opravdu tak pokročilé, že vlastně objevil Snellův zákon lomu — dvacet let před Snellem a čtyřicet let před Descartem. Harriot Keplerovi nejen dodal cenné informace o optice, ale také se Keplera pokoušel přesvědčit, že skrytá tajemství optiky budou odhalena prostřednictvím atomismu. Na rozdíl od Keplera byl Harriot nadšený atomista a věřil, že tajemství vesmíru mají být odhalována prostřednictvím struktury a uspořádání maličkých kulovitých atomů. Kepler byl skeptický. Příroda se děsí vakua a mezi atomy je přece prázdnota.

Harriot byl tvrdošíjný a Kepler se dal obměkčit. V roce 1611 Kepler napsal útlou brožuru *Novoroční dárek aneb o šestiúhelníkovém sněhu*[4]), která po dvě staletí ovlivňovala nasměrování krystalografie. Tato útlá stať byla „prvním zaznamenaným krokem směrem k matematické teorii vzniku anorganických nebo organických tvarů“.[5]) V pojednání o uspořádání koulí Kepler zkonstruoval kubické plošně centrované uspořádání. Tvrdil, že je „nejtěsnější možné, takže při žádném jiném uspořádání nelze do stejné nádoby napěchovat více kuliček“. Toto tvrzení se stalo známým jako Keplerova domněnka. Zůstávalo bez důkazu téměř čtyři sta let až do srpna 1998, kdy jsem s pomocí doktoranda Samuela P. Fergusona předložil důkaz.

Věta (Keplerova domněnka)**.** *V trojrozměrném prostoru nemá žádné uspořádání koulí stejného poloměru větší hustotu než kubické plošně centrované uspořádání.*

Kubické plošně centrované uspořádání vznikne položením jedné vrstvy koulí na druhou. Koule každé vrstvy vytvářejí pravidelný vzorek v síti rovnostranných trojúhelníků. Existují ale i jiná uspořádání koulí, která mají stejnou hustotu ($\pi/\sqrt{18} \approx 0{,}74$) jako kubické plošně centrované uspořádání. Nejznámější alternativou je hexagonální těsné uspořádání (angl. *hexagonal close-packing*). Jeho jednotlivé vrstvy jsou shodné s vrstvami v kubickém plošně centrovaném uspořádání, avšak jsou poskládány tak, že vznikne[6]) jiné uspořádání s touž hustotou (obr. 2). Neexistuje žádný jednoduchý seznam všech uspořádání s hustotou $\pi/\sqrt{18}$. Naopak, možností je mnoho. Hustota vyplnění prostoru je definována limitně a odstranění jedné, dvou či stovky koulí neovlivní výslednou hustotu. Bez vlivu bude i vyjmutí celé jedné[7]) nekonečné vrstvy koulí.

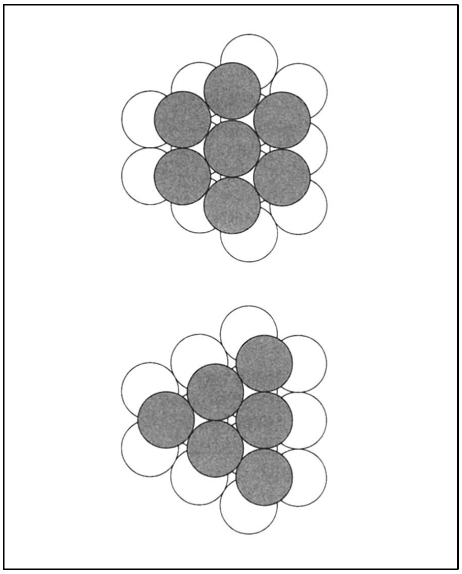
---

[4]) *Pozn. překladatelů: Strena sen de nive sexangula*, Praha, 1611.

[5]) L. L. Whyte: *The Six-Cornered Snowflake*, Oxford Clarendon Press, Oxford, 1966.

[6]) *Pozn. překladatelů:* Vznikne otočením horní vrstvy o úhel $\pi/3$ kolem společného těžiště libovolných tří dotýkajících se koulí.

[7]) *Pozn. překladatelů:* … nebo konečně mnoha nekonečných vrstev koulí. To potom umožňuje získat nepravidelná nejhustší uspořádání tím, že s každou koulí „nepatrně“ pohneme.



Obr. 2. Existují dva optimální způsoby pro umístění jedné vrstvy koulí nad druhou. Obměnami umístění každé další vrstvy lze sestrojit mnoho různých optimálních uspořádání.

Tento článek podává hrubý nástin důkazu Keplerovy domněnky, a to nejelementárnějšími možnými prostředky. Vlastní důkaz je dlouhý (282 strany)[8]) a je založen na ještě delších, počítačem prováděných kalkulacích. Porota dvanácti posuzovatelů[9]) se nad ním radila od září 1998. Nikdo nezapochyboval o celkové správnosti důkazu, ačkoli, pokud vím, počítačový program dosud nikdo pečlivě a nezávisle neprověřil.[10])

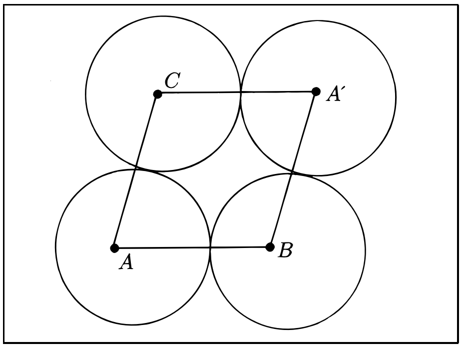
Gauss

Carl Friedrich Gauss byl první, kdo o Keplerově domněnce něco dokázal. Ukázal, že pokud jsou středy všech koulí umístěny do průsečíků pravidelné mřížky, pak žádné mřížkové uspořádání nemůže být lepší než kubické plošně centrované. Gaussovo jméno získalo tomuto elementárnímu výsledku nezasloužený věhlas. Důkaz zabírá jen pár řádků a nevyžaduje výpočty. V případě nejlepšího uspořádání je jistě pravda, že se nějaké dvě koule budou dotýkat. Jakmile se dvě koule dotýkají, pak charakter mřížky nutí koule, aby se dotýkaly v dlouhých rovnoběžných řadách jako korálky navlečené na špejli. Pro nejlepší uspořádání bude též jistě platit, že dvě z těchto dlouhých řad korálků se budou dotýkat. Pro zachování pravidelnosti mřížky musí být koule poskládány v identických rovnoběžných vrstvách. Středy čtyř koulí ve vrstvě vytvářejí rovnoběžník, jak je ukázáno na obr. 3. Rovnoběžné vrstvy by na sebe měly být poskládány co nejtěsněji. Koule se středem D z horní vrstvy sedí na dutině mezi

[8]) *Pozn. překladatelů:* Důkaz Velké Fermatovy věty má „jen“ 129 stran.

[9]) *Pozn. překladatelů:* Škoda, že autor neuvádí jejich jména.

[10]) *Pozn. překladatelů:* Protože program nepracuje v celočíselné aritmetice, prověřit jeho správnost bude velice obtížné, jak vyplyne z dalšího.



Obr. 3. V optimálním uspořádání do mřížky se koule ve vrstvě nad zobrazenou vrstvou dotýká tří koulí A (nebo A'), B a C.

koulemi se středy A, B, C z nižší vrstvy tak, že se všech tří dotýká. Trojúhelník ABD je rovnostranný.

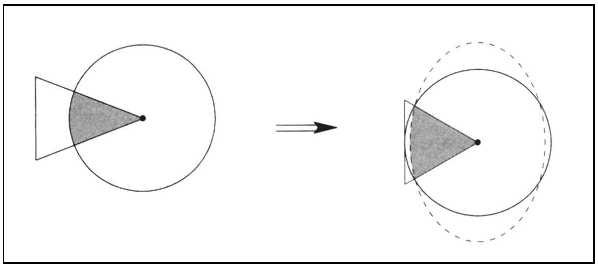
Změňme nyní svůj úhel pohledu. Dívejme se na všechny koule tak, že jsou seskupeny v rovinách rovnoběžných s ABD. Středy koulí v každé z těchto vrstev opakují vzor rovnostranného trojúhelníku ABD. Koule v jedné vrstvě se musí uvelebit v kapsách mezi koulemi předchozí vrstvy tak, že každá koule spočívá na třech sousedkách nižší vrstvy. Tomuto popisu odpovídá právě kubické plošně centrované uspořádání.

Thue

Dvojrozměrná verze Keplerovy domněnky hledá nejhustší seskupení jednotkových kruhů v rovině. Jestliže rovinu vydláždíme pravidelnými šestiúhelníky a do každého šestiúhelníku vepíšeme kruh, dosáhneme hustoty $\pi/\sqrt{12} \approx 0{,}9069$. Thueova věta předložená roku 1890 tvrdí, že je to nejvyšší možná hustota. Panuje mylná představa, že důkaz Thueovy věty není jednoduchý. Důkaz, který tady uvádíme, je založen na Rogersově myšlence a nevyžaduje téměř žádné počítání. V ideálním případě by měl být předváděn interaktivně na obrazovce počítače a bez psaných slov. Protože jsem však nikdy nenašel čas napsat příslušný počítačový program, uchyluji se jen ke slovnímu výkladu.

Uvažujme libovolné vyplnění roviny nepřekrývajícími se kruhy o poloměru 1. Rovinu rozdělíme na oblasti a ukážeme, že hustota kruhů v každé oblasti je nejvýše rovna $\pi/\sqrt{12}$. Kolem každého kruhu opišme kružnici o poloměru $2/\sqrt{3}$. Kdykoliv se dvě z těchto kružnic protnou, spojíme průsečíky úsečkou a sestrojíme nad ní dva shodné rovnoramenné trojúhelníky s vrcholy ve středech těch dvou kružnic. Neexistuje bod, jenž by současně ležel uvnitř tří kružnic. Opravdu, v extrémním případě se tři kružnice protínají v jednom bodě a jejich středy tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka o straně délky 2.

Tím dostáváme jednoduché rozdělení prostoru: oblasti vně větších kružnic, rovnoramenné trojúhelníky a části uvnitř kružnic, ale vně všech trojúhelníků. Oblasti mimo kružnice mají hustotu 0, což je jistě méně než $\pi/\sqrt{12}$. Hustota uvnitř kružnic je rovna $3/4$, tj. čtverci poměru $(1 : 2/\sqrt{3})$ mezi menším a větším poloměrem, což je opět méně než $\pi/\sqrt{12}$. Na tuto nerovnost se můžeme podívat i geometricky, když nakreslíme pravidelný šestiúhelník[11]) tak, aby byl vepsán kružnici a obsahoval jednotkový kruh. V pravidelném šestiúhelníku je hustota právě $\pi/\sqrt{12}$, což je více než hustota uvnitř celé větší kružnice.



Obr. 4. Lineárně transformovaná oblast napravo zaujímá menší část rovnostranného trojúhelníka, než je část uvnitř jednotkového kruhu.

K výpočtu hustoty v rovnoramenném trojúhelníku použijeme lineární transformaci (zachovávající poměry ploch, a tudíž i hustotu), jíž trojúhelník zobrazíme na trojúhelník rovnostranný s délkou strany $2/\sqrt{3}$. Transformace mění měřítko podél kolmých os daných základnou a výškou trojúhelníka, nemění však polohu vrcholu ν vzhledem k základně rovnoramenného trojúhelníka. Jednotkový kruh je transformován v elipsu. Lineární transformace zachovává délky obou stejně dlouhých ramen rovnoramenného trojúhelníka, tudíž elipsa protíná strany transformovaného trojúhelníka ve vzdálenosti 1 od středu ν (viz obr. 4). Ze znalosti těchto průsečíků vyvodíme, že průnik elipsy s vnitřkem rovnostranného trojúhelníka je obsažen v kruhu o poloměru 1 se středem ν. To znamená, že hustota v rovnostranném trojúhelníku se zvětší, nahradíme-li elipsu kruhem o poloměru 1. Sjednocením rovnostranných trojúhelníků vzniknou pravidelné šestiúhelníky s vepsanými kruhy o poloměru 1. Hustota v těchto šestiúhelnících je proto $\pi\sqrt{12}$, a tím končí důkaz Thueovy věty.

Tři dimenze

Vraťme se do trojrozměrného prostoru a zabývejme se důkazem Keplerovy domněnky. Budeme zkoumat, jak koule vyplňují celý eukleidovský prostor. Tím se vyhneme nepříjemným okrajovým jevům objevujícím se u vyplňování konečné oblasti. Uspořádání koulí jsou určena nekonečnou, avšak spočetnou množinou parametrů udávajících souřadnice středů každé koule. V padesátých letech dvacátého století vzniklo přesvědčení, že by mělo být možné dokázat Keplerovu domněnku studiem jen konečného počtu koulí. Majíce toto na paměti, budeme se věnovat konečným shlukům koulí.

[11]) *Pozn. překladatelů:* Délka strany pravidelného šestiúhelníka opsaného jednotkovému kruhu je $1/\cos(\pi/6) = 2/\sqrt{3}$.

Voronoi

Každá koule z našeho uspořádání by měla být obarvena jednou z konečného počtu barev. Tyto barvy jsou zapotřebí pro jisté konstrukce vypořádávající se s degeneracemi, pro vytvoření hladkých funkcí z funkcí po částech hladkých a pro zachování kompaktnosti jistých uvažovaných oblastí. Barvy nám pomohou vyhnout se příliš zjednodušenému výkladu. Ale zacházením do detailů o barvách bych zatemnil hlavní myšlenky důkazu Keplerovy domněnky. Takže nyní, když jsme zavedli obarvení koulí, si je čtenář může všechny natřít načerno.

Nechť $t > 1$ je reálné číslo. Definujme shluk koulí jako množinu neprotínajících se barevných koulí kolem pevné koule v počátku a takových, že jejich středy jsou vzdáleny nejvýše $2t$ od počátku. Shluk n koulí je určen $3n$ souřadnicemi středů. Tyto souřadnice určují topologii na množině $C = C(t)$ všech shluků a dělají z ní množinu kompaktní. Dva shluky s odlišným počtem koulí nebo jiným obarvením leží v odlišných souvislých komponentách množiny C.

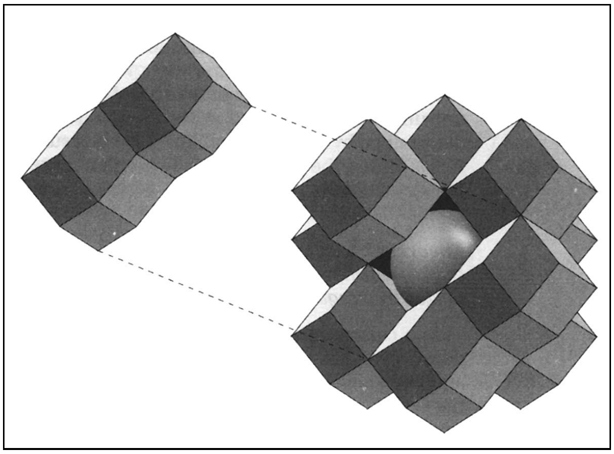
Koule ve středu shluku je obsažena v *oříznuté* (angl. *truncated*) *Voronoiově buňce.* Voronoiova buňka je definována jako množina všech bodů, které leží blíže k počátku než ke kterémukoli jinému středu koule ze shluku. Pro $p \in C$ je oříznutá Voronoiova buňka $V_t(p)$ průnik Voronoiovy buňky s koulí o poloměru t a se středem v počátku. Voronoiovy buňky jsme již viděli v důkazu Thueovy věty, ačkoliv jsme je tak nenazývali. Pravidelné šestiúhelníky, které vystupují v důkazu této věty, jsou Voronoiovy buňky optimálního uspořádání. A ty velké kružnice, pomocí nichž byly konstruovány rovnoramenné trojúhelníky, jsou oříznuté Voronoiovy buňky (pro $t = 2/\sqrt{3}$). Ořezávání je výlučně věc pohodlí, protože umožňuje snadněji odhadovat objem Voronoiových buněk.

Oříznuté Voronoiovy buňky určují mez pro hustotu uspořádání koulí. Kolem každé koule vytvoříme její oříznutou Voronoiovu buňku. Voronoiovy buňky se nepřekrývají. Bod z průniku dvou uzavřených Voronoiových buněk leží ve stejné vzdálenosti od středů dvou koulí, tedy leží na hranici obou buněk. Části prostoru vně všech oříznutých Voronoiových buněk se neprotínají s žádnými koulemi a mají hustotu 0. Hustota uspořádání tedy není větší něž největší hustota v oříznutých Voronoiových buňkách. Největší možný podíl objemu koule a objemu oříznuté Voronoiovy buňky tudíž dává horní hranici pro hustotu uspořádání.

Voronoiovy buňky kubického plošně centrovaného uspořádání jsou identické kosočtverečné dvanáctistěny, jak ukazuje obr. 5. Nechť ν_{fcc} je objem kosočtverečného dvanáctistěnu. Hustota kubického plošně centrovaného uspořádání je poměr mezi objemem jednotkové koule a ν_{fcc}:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi}{\nu_{\mathrm{fcc}}} = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0{,}74.$$

Největší vzdálenost vrcholů tohoto konkrétního kosočtverečného dvanáctistěnu od středu činí $\sqrt{2}$. Z toho plyne, že ořezávání je zbytečné, jestliže $t \geqq \sqrt{2}$. Je-li $t < \sqrt{2}$, pak seříznutí zasáhne kosočtverečný dvanáctistěn a poruší vztah mezi jeho objemem a naším cílem $\pi/\sqrt{18}$. Nastavme parametr ořezávání na jeho nejmenší užitečnou



Obr. 5. Kubické plošně centrované uspořádání vytvoříme tak, že prostor vyplníme kosočtverečnými dvanáctistěny a do každého z nich vepíšeme kouli.

hodnotu $t = \sqrt{2}$. Ořezávání je teď pevně dáno. Můžeme tedy ze zápisu vypustit t a psát $V(p) = V_t(p)$.

Minimální objem Voronoiovy buňky (ať už neoříznuté, nebo oříznuté při užití $t = \sqrt{2}$) nedávno určil Sean McLaughlin. V lednu roku 2000 za tento výsledek získal Morganovu cenu udělovanou AMS-MAA-SIAM. Potvrzuje se tím domněnka, kterou vyslovil L. Fejes Tóth před téměř šedesáti lety.

Věta (McLaughlin)**.** *Objem Voronoiovy buňky shluku koulí p je jednoznačně minimalizován pravidelným pětiúhelníkovým dvanáctistěnem, jenž je opsán kouli o poloměru* 1.

Shluk koulí, jenž vede k pravidelnému pětiúhelníkovému dvanáctistěnu, má jednu kouli ve svém středu a dvanáct dalších koulí dotýkajících se té středové a umístěných ve středech stěn pravidelného dvanáctistěnu.

Poměr mezi objemem jednotkové koule a objemem pravidelného pětiúhelníkového dvanáctistěnu jí opsaného je horní mezí hustoty uspořádání koulí. Tato mez[12]) je zhruba rovna 0,75. Ve dvou dimenzích je Voronoiovou buňkou s minimálním obsahem pravidelný šestiúhelník, jímž lze vyplnit celou rovinu. Ve třech dimenzích už prostor nelze beze zbytku vyplnit Voronoiovou buňkou s minimálním objemem. Lokálně optimální tvar, pravidelný pětiúhelníkový dvanáctistěn, neodpovídá globálně optimálnímu tvaru, tj. prostor vyplňujícímu kosočtverečnému dvanáctistěnu. To je v důkazu Keplerovy domněnky zdrojem komplikací.

Přidejme k minimalizaci objemu Voronoiových buněk korekční člen f. Definujme funkci f spojitou na C a uvažujme minimalizační úlohu

$$\min_p \big(\mathrm{vol}\big(V(p)\big)+f(p)\big)\,.$$

Řekneme, že f je *fcc-kompatibilní*, jestliže minimální hodnota $\mathrm{vol}\big(V(p)\big) + f(p)$ je ν_{fcc}, objem kosočtverečného dvanáctistěnu.

[12]) *Pozn. překladatelů:* Tato mez je rovna $\pi\sqrt{650 + 290\sqrt{5}}/150$, jak lze zjistit pomocí vztahů uvedených např. v článku M. Křížek, P. Křížek: *Kouzelný dvanáctistěn pětiúhelníkový*, Rozhledy mat.-fyz. *74* (1997), 234–238.

Nechť Λ je množina středů koulí v obecném uspořádání. Pro $\lambda \in \Lambda$ uvažujme shluk koulí soustředěných ve vzdálenosti nejvýše $2t = 2\sqrt{2}$ od λ. Přemístěním shluku do počátku pak získáme shluk p_λ v C. Nechť Λ_R je množina všech středů z Λ vzdálených nejvýše R od počátku. Řekneme, že f je *transientní*, jestliže

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_R} f(p_\lambda) = o(R^3).$$

Předpokládejme, že f je fcc-kompatibilní a transientní. Sečtením

$$\nu_{\mathrm{fcc}} \leqq \operatorname{vol}\bigl(V(p)\bigr) + f(p)$$

přes Λ_R dostaneme

$$|\Lambda_R|\, \nu_{\mathrm{fcc}} \leqq \operatorname{vol}(B_R) + o(R^3),$$

kde B_R je koule o poloměru R a $|\cdot|$ označuje počet prvků množiny. Vydělením $R^3\nu_{\mathrm{fcc}}$ dostaneme hustotu uspořádání uvnitř koule B_R,

$$\frac{|\Lambda_R|}{R^3} \leqq \frac{4\pi/3}{\nu_{\mathrm{fcc}}} + o(1) = \frac{\pi}{\sqrt{18}} + o(1).$$

V limitě pro R jdoucí k nekonečnu obdržíme pro hustotu uspořádání mezní hodnotu $\pi/\sqrt{18}$.

Ukazuje se tedy, že nalezneme-li transientní fcc-kompatibilní funkci f, důkaz Keplerovy domněnky bude hotov. Aby byla zajištěna fcc-kompatibilita, musí být na C vyřešen neobyčejně obtížný nelineární optimalizační problém. Funkci f vybíráme s ohledem na transientnost, takže ta je již automaticky splněna.

Fejes Tóth

Existují vůbec korekční členy s požadovanými vlastnostmi? Fakta naznačují, že jich je spousta. První korekční člen navrhl L. Fejes Tóth[13]) v roce 1953, ale jeho shluky byly mnohem větší než ty, které jsme použili my. Jeho shluky obsahují tolik koulí, že nikdy nebyla zaručena fcc-kompatibilita. Nicméně jeho návrh představuje významný pokrok, protože jím podal první důkaz, že Keplerova domněnka by mohla být vyřešena pomocí optimalizační úlohy pro konečný počet proměnných. V roce 1964 vystoupil s tím, že k určení minima by mohly být použity počítače. Tak byla stanovena obecná strategie důkazu.

Korekční členy f vycházejí z pečlivého studia lokální geometrie uspořádání koulí. Korekční člen $f(p)$ Fejese Tótha má tvar

$$\sum_q a(p,q)\nu(q),$$

[13]) *Pozn. překladatelů:* Podrobnější popis Tóthovy metody je uveden v článku T. C. Hales: *The status of the Kepler Conjecture*, Math. Intelligencer *16* (1994), 47–58.

kde q probíhá přes všechny středy koulí ve shluku p, jejichž vzdálenost od středu shluku nepřekračuje jistou pevnou hodnotu. Člen $\nu(q)$ značí objem oříznuté[14]) Voronoiovy buňky se středem v q. Součet konstant $a(p,q)$ je nula, tj. pro všechny shluky p v uspořádání je $\sum_p a(p,q) = 0$. Podmínka nulového součtu vede k anulování členů v $\sum f(p)$, a tudíž k transientnosti f. Uvedený korekční člen ilustruje obecnou strategii pro výběr korekčních členů: f je konstruována pomocí součtů objemů, jež jsou přidávány v p a opět odečítány v q. Součet $\sum f(p)$ se chová jako alternující řada $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ a každý jeho člen je vyrušen svým následovníkem v řadě. Důsledkem tohoto vzájemného rušení členů je transientnost.

Samozřejmě že není zapotřebí, aby oblasti přesunované mezi p a q byly Voronoiovy buňky. Jedna z mnoha jiných možností je známa jako Delaunayova teselace na simplexy (čtyřstěny). Při tomto rozkladu se vytvoří hrana mezi dvěma středy koulí, jestliže jejich Voronoiovy buňky mají společnou stěnu. Tyto hrany definují simplexy známé jako Delaunayovy simplexy, a ty vyplňují celý prostor.

Když jsem tázán, co byla nejtěžší část důkazu Keplerovy domněnky, bez váhání odpovídám, že to bylo navržení vhodného rozkladu prostoru, protože rozklady jsou skrytě obsaženy v f. Bez úspěchu jsem používal Voronoiovy buňky a také jsem zkoušel Delaunayovy simplexy. Oba přístupy se tak zkomplikovaly, že už jsem jim nebyl schopen porozumět. Můj postup se zastavil. Nakonec mne jednoho dne v listopadu 1994 napadlo, jak zkombinovat tyto dvě metody v hybridní rozklad, který si podrží nejlepší vlastnosti každé z nich. Od toho dne jsem se nikdy nevzdal svého přesvědčení, že Keplerova domněnka nakonec bude dokázána hybridním přístupem.

Hybridní korekční členy jsou nesmírně přizpůsobivé a lze je snadno konstruovat. Brzy jsme si se Samuelem Fergusonem uvědomili, že kdykoliv při řešení minimalizačního problému narazíme na obtíže, můžeme upravit f, a tím je obejít. Funkce f se komplikovala, ale s každou změnou jsme ušetřili měsíce — ne-li roky — práce. Neustálé úpravy se mým kolegům nelíbily. Pokaždé, když jsem o postupu své práce referoval na konferenci, jsem minimalizoval jinou funkci. Ba hůře, korekční funkce z mých starších článků se liší od funkce z těch závěrečných, což mne nutilo vracet se a záplatovat staré práce. Korekční funkce se měnila, dokud nenastal čas, aby Ferguson obhájil disertaci, a my jsme konečně pocítili povinnost přestat si s ní hrát. Avšak kdybych měl důkaz předělat a zjednodušit, první věc, kterou bych učinil, by byla další změna korekční funkce. To je klíč k jednoduchému důkazu.

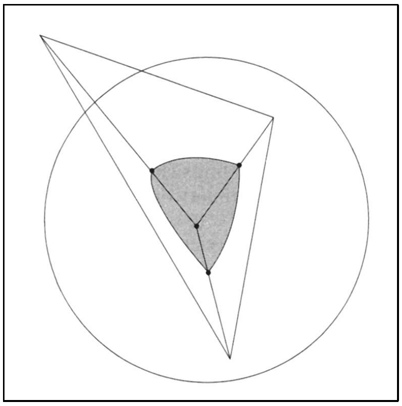
Kombinatorické struktury

Je-li f pevně zvolená transientní funkce, pak jediným zbývajícím problémem je minimalizační úloha: ukažte, že korigovaný objem $F(p) = \mathrm{vol}\big(V(p)\big) + f(p)$, kde $p \in C$, není menší než objem ν_{fcc} kosočtverečného dvanáctistěnu. Prostor shluků C je tak složitý, že F nemůžeme minimalizovat přímo. Přiřadíme každému shluku $p \in C$ rovinný graf, jenž vyjadřuje jeho nejvýznačnější geometrické vlastnosti. Dále stanovíme spodní

[14]) V tomto přístupu se pro ořezávání používá jiná konstanta.

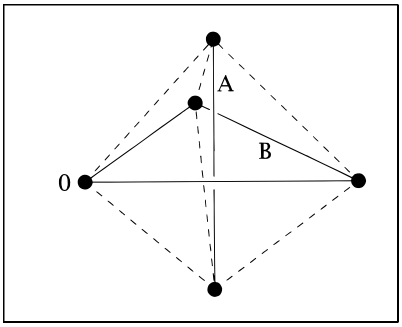
mez pro hodnotu $F(p)$, která závisí jen na kombinatorické struktuře tohoto rovinného grafu. Ve většině případů je kombinatorická spodní mez větší než ν_{fcc}, což je žádoucí. Kombinatorická aproximace $F(p)$ je poměrně hrubá a občas nedává takovou spodní mez, jakou chceme. Pomocí počítače můžeme generovat všechny rovinné grafy, pro něž je kombinatorická spodní mez pro $F(p)$ menší než ν_{fcc}. Jestliže nastane $F(p) < \nu_{\mathrm{fcc}}$, pak se rovinný graf příslušný p musí objevit na počítačem generovaném seznamu možností. Seznam obsahuje asi 5000 rovinných grafů.

Příslušný rovinný graf lze pro shluk p zkonstruovat snadno. Každá hrana grafu odpovídá dvojicím koulí, jež jsou těsně u koule v počátku a též blízko u sebe. Položme $\tau = 4\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 2{,}619$. Blízkost je určena parametrem[15]) $T \in (2, \tau)$. Jestliže středy dvou koulí jsou vzdáleny nejvýše T od počátku a jejich vzájemná vzdálenost je také nejvýše T, pak na jednotkové kouli se středem v počátku nakreslíme kruhový oblouk spojující dva jednotkové vektory směřující do středů oněch dvou koulí (obr. 6).



Obr. 6. Čtyřstěn vytíná na povrchu jednotkové koule sférický trojúhelník.

Tyto kruhové oblouky se navzájem neprotínají s výjimkou dotyku v koncových bodech. To je důsledek našeho požadavku $T < \tau$. Kdyby totiž bylo $T = \tau$, dostaneme takovou konfiguraci středů koulí, jakou ukazuje obr. 7. Všechny hrany mají délku 2



Obr. 7. Toto uspořádání je třeba vyloučit, protože jeho důsledkem jsou oblouky protínající se na jednotkové sféře.

[15]) Užíváme $T = 2{,}51$, ale na tom příliš nezáleží.

nebo τ, hrany délky τ jsou vyznačeny plnými čarami. Oblouky na kouli s počátkem v 0 zkonstruované pro hrany A a B se protínají. Pro žádné menší T se protnout nemohou.

Rovinný graf — nebo přesněji sférický graf — sdružený se shlukem p je tvořen systémem oblouků na jednotkové sféře. Například rovinný graf odpovídající kubickému plošně centrovanému uspořádání tvoří střídající se čtverce a rovnostranné trojúhelníky, přičemž v každém vrcholu se setkávají vždy dva trojúhelníky a dva čtverce. Shluku odvozenému z pravidelného pětiúhelníkového dvanáctistěnu odpovídá graf dvacetistěnu s dvaceti trojúhelníky uspořádanými tak, že se jich vždy pět stýká v jednom vrcholu.

V doplňku množiny oblouků na jednotkové sféře nazýváme uzávěr každé souvislé komponenty *standardní oblastí*. Standardní oblasti jsou v jednoduchých případech jen obyčejné sférické mnohoúhelníky na jednotkové sféře. Obecně však mohou být mnohem složitější. V důkazu Keplerovy domněnky jsou nejobtížnější ty odhady, které dokazují, že složité standardní oblasti nikdy nejsou optimální. Ukazuje se to prostřednictvím kombinatorické aproximace minimalizačního problému. Počítáme dolní mez $F(p)$, jež závisí pouze na kombinatorické struktuře rovinného grafu sdruženého s p.

Většinu času mezi lety 1995 a 1998 jsem trávil nad důkazy těchto kombinatorických dolních mezí. Již v roce 1994 jsem věděl, jaké by měly být, ale důkazy mi chyběly. Obtíže vznikaly především u standardních oblastí s velkým počtem stran. Jak rostl počet stran, stávala se dimenze příliš velkou na to, abych si s ní poradil.

Konečný důkaz byl podmíněn schopnostmi počítačů. Kdyby počítače byly výkonnější, důkaz mohl být daleko kratší. Kdyby byly méně výkonné, ještě stále bych pracoval na řešení. Díky rozvoji počítačů bude za padesát let důkaz Keplerovy domněnky pravděpodobně zcela odlišný od toho dnešního.

Jednoduchá heuristická úvaha mi řekla, co bych měl od počítače dostat. Můj počítač byl schopen dokázat tvrzení týkající se jednoho čtyřstěnu, ale nedokázal nic zjistit o složitějších geometrických objektech. Jinými slovy, můj počítač mi mohl něco říci o šestirozměrném prostoru parametrizujícím délky hran čtyřstěnu, avšak byl příliš pomalý na to, aby zvládl sedm dimenzí. Vzhledem k tomu, že Keplerova domněnka je optimalizační problém se zhruba sedmdesáti proměnnými, mě toto omezení znechutilo. Uvažovaný problém mě vyzýval k tomu, abych přešel k důkladnému šestirozměrnému porozumění sedmdesátirozměrnému prostoru.

5000 případů[16])

V některých případech nebyly hrubé kombinatorické meze dost dobré. Jeden případ se nakonec ukázal být zdaleka nejspletitější a stal se předmětem Fergusonovy disertace. Těch zbývajících 4999 (či tak nějak) rovinných grafů bylo analyzováno individuálně. Pro každý z nich je třeba vyřešit rozsáhlý nelineární optimalizační problém, totiž minimalizovat $F(p)$ s omezující podmínkou, že shluk je sdružen s daným rovinným

[16]) *Pozn. překladatelů:* Pro srovnání, v původním důkazu věty o obarvení mapy čtyřmi barvami bylo na počítači prověřeno přibližně 1900 případů a používala se celočíselná aritmetika.

grafem. Vyřešit dostatečně přesně nelineární problémy této velikosti může být beznadějně obtížné. Snadno se může stát, že dospějeme blízko k řešení, ale pak jsou naše pokusy dosáhnout cíle zmařeny nelinearitami. Nový postřeh nám však ukáže východisko: makrostruktura problému je vlastně lineární, takže si při jeho řešení můžeme pomoci metodami lineárního programování.[17])

Lineárním rysům problému nejlépe porozumíme, když se vrátíme k úloze, kterou řešil McLaughlin, tj. k minimalizaci objemu oříznuté Voronoiovy buňky. Není zde žádný korekční člen, tedy $f = 0$. Abychom výklad dále zjednodušili, předpokládejme, že nedošlo k ořezávání, takže celá Voronoiova buňka leží uvnitř koule o poloměru $\sqrt{2}$ a se středem v počátku. Tuto buňku rozdělíme vhodným způsobem na čtyřstěny. Pro představu uveďme jednu možnost. Spusťme z každé stěny (z bodu, který nazveme v) kolmici do středu Voronoiovy buňky. Spusťme z každé hrany (z bodu, který nazveme w) kolmici do v. Vrcholy čtyřstěnu jsou střed buňky, bod v na stěně, bod w na hraně stěny a kterýkoli z konců této hrany. Tyto čtyřstěny tvoří rozklad Voronoiovy buňky.

Místo přímé minimalizace objemu Voronoiovy buňky můžeme zavést proměnné x_i představující objemy jednotlivých čtyřstěnů. Minimalizujeme součet proměnných x_i (jenž je jistě lineární v x_i) za omezující podmínky, že se jednotlivé části k sobě hodí. Podmínky skládání jsou všechny lineární. Některé mají tvar $z = z'$ (lineární v z i z'), kde z je délka hrany čtyřstěnu a z' je délka společné hrany sousedního čtyřstěnu. Jiné podmínky mají tvar $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 2\pi$ (lineární v α_i) a zajišťují, že součet úhlů mezi stěnami čtyřstěnů protínajícími se ve společně sdílené vnitřní hraně musí být 2π. Podobné jsou i lineární podmínky pro hrany ležící na stěně Voronoiovy buňky. Původní problém se tak stává rozsáhlou úlohou lineárního programování.

Tyto úvahy mají kaz: stále existují neodstranitelné nelineární omezující podmínky. Objemy x_i a úhly α_i mezi dvěma stěnami jsou *nelineární* funkce délek hran čtyřstěnu. Nicméně kostra celého velkého problému je lineární. Nelineární vztahy platí pro izolované čtyřstěny, zahrnují jen malé množství proměnných a mohou být řešeny počítačem ve shodě s výše vysloveným heuristickým principem, že totiž počítač nám řekne vše, co chceme vědět o jednom čtyřstěnu. Zejména ověřuje nerovnosti mezi objemy, úhly a délkami, jež mohou být použity jako lineární náhražky v nelineárních vztazích.

Jestliže se nyní vrátíme ke Keplerově domněnce s nenulovým korekčním členem f, kostra problému zůstane lineární. Skutečně, funkce f je geometricky definována jako lineární kombinace objemů. Když jsem poznal, že lineární programování bude podstatnou součástí důkazu, pečlivě jsem vybral vhodnou funkci f. Tím, že velký objekt rozdělíme na malé části, můžeme minimalizační problém vyjádřit prostřednictvím jednoduchých veličin, jako jsou plochy sférických trojúhelníků a objemy čtyřstěnů, podléhajících lineárním omezením odvozeným z podmínek skládání. Všechny nelinearity se tudíž týkají jen malého počtu proměnných.

[17]) *Pozn. překladatelů:* V neceločíselné aritmetice.

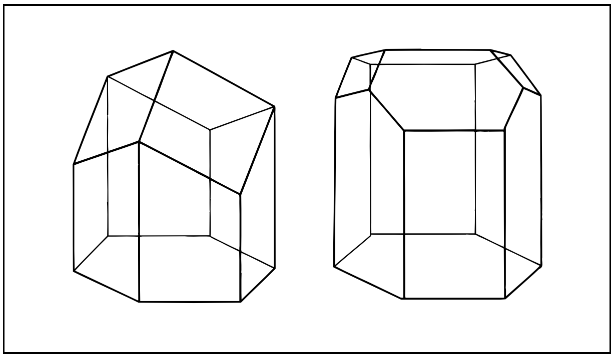
Lineární programování

Lineární část problému vyřešil software pro lineární programování. Typický lineární optimalizační problém má přibližně 200 proměnných a asi 2000 omezujících vazeb. Odhaduji, že jsme jako součást řešení celého problému vyřešili téměř 10^5 úloh lineárního programování této velikosti. To je celkem malý výpočet ve srovnání s průmyslovými aplikacemi lineárního programování.

Některé proměnné udávají vzdálenosti mezi koulemi v rozmanitých shlucích. Jiné proměnné představují úhly mezi hranami a stěnami, objemy a korigované objemy Voronoiových buněk. Některé vazby vyjadřují geometrické vztahy mezi proměnnými. Délky a úhly jsou omezeny a svázány tak, abychom dostali realizovatelné uspořádání koulí. V problémech lineárního programování se minimalizuje korigovaný objem vzhledem k těmto omezením. Keplerovu domněnku jsme dokázali tak, že jsme v každém případě ověřovali, zda je korigovaný objem větší než objem kosočtverečného dvanáctistěnu.

Včelí plásty

Když v Keplerově brožuře *Novoroční dárek aneb o šestiúhelníkovém sněhu* nalistujeme Keplerovu domněnku a otočíme stránku, najdeme tam diskusi o struktuře včelího plástu. Právě díky bedlivému pozorování včelí buňky Kepler objevil kosočtverečný dvanáctistěn. Buňku tvoří šestiboký hranol na jednom konci uzavřený třemi kosočtverci. Pokud opačný konec také ohraničíme třemi kosočtverci, buňka se nám přetvoří na kosočtverečný dvanáctistěn.



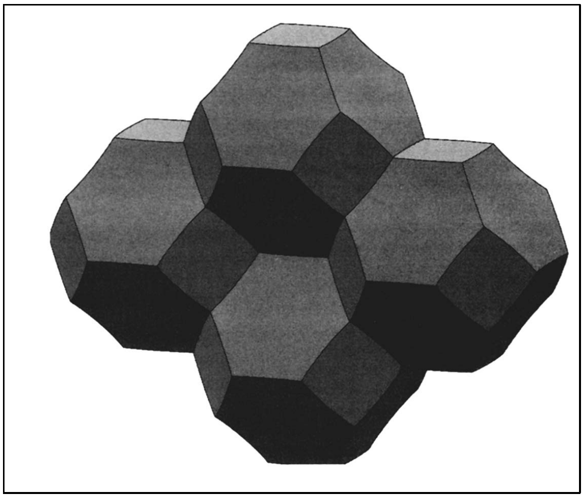
Obr. 8. V roce 1964 byla objevena buňka (vpravo), která má výhodnější tvar než buňka včelí (vlevo).

Během osmnáctého století matematici provedli rozsáhlé studie vlastností povrchu buňky včelího plástu a věřili, že má nejlepší možný tvar. Například C. Maclaurin v roce 1743 při výzkumu kosočtverečných základen buňky usoudil: „Tím, že jsou buňky šestiúhelníkové, je podíl jejich objemu a povrchu největší mezi všemi pravidelnými tělesy, která vyplňují prostor bez mezer a zároveň mají nejlepší základnu.“ Avšak zdánlivě samozřejmá odpověď nabízená včelami se ukázala být nesprávná. Navzdory převládajícímu názoru objevil L. Fejes Tóth, že trojrozměrná buňka včelího plástu není nejekonomičtější (viz obr. 8). Nejekonomičtější tvar však nebyl nikdy určen.

Uspořádání dělových koulí vede až k buňkám včelího plástu. Má také vztah k obecnějším problémům mýdlové pěny. Příklad takové pěny dostaneme, když prostor vyplníme dutými kosočtverečnými dvanáctistěny a představíme si, že každá stěna je tvořena pružnou mýdlovou blankou.

Kelvin

Problém mýdlové pěny, jejž poprvé předložil lord Kelvin, se sice snadno formuluje, ale těžko řeší. Jak můžeme rozdělit prostor na dutiny stejného objemu tak, abychom minimalizovali velikost jejich povrchu?[18]) Příklad s kosočtverečným dvanáctistěnem není zdaleka optimální. Kelvin navrhl následující řešení. Zkosené osmistěny (angl. *truncated octahedra*) vyplňují prostor (viz obr. 9). Jejich[19]) průřez je pravidelný osmiúhelník, kterým je možno vyplnit rovinu až na čtvercové díry. Protože každý zkosený osmistěn obsahuje čtvercové stěny, lze čtvercové otvory v jedné vrstvě ucpat čtvercovými stěnami sousední vrstvy.

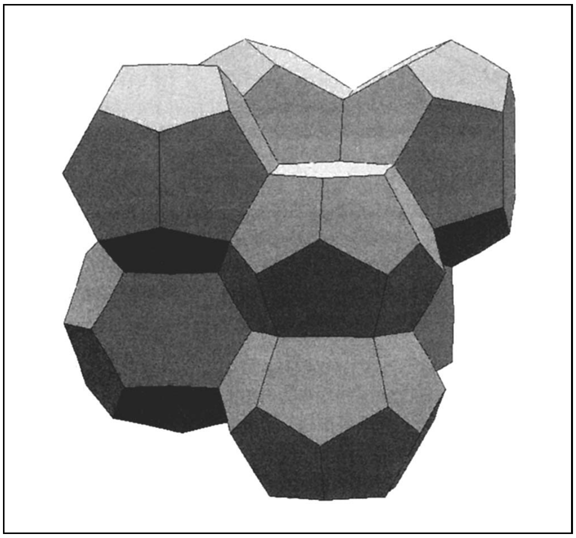


Obr. 9. Obr. 9. Kelvin vyslovil domněnku, že rozdělení prostoru na stejné objemy, které by bylo optimální vzhledem k minimaliaci povrchu, se dostane deformací komolých osmistěnů vyplňujících prostor.

Kelvin zjistil, že vhodnou nepatrnou deformací stěn zkoseného osmistěnu můžeme získat pěnu s menším povrchem, než mají buňky původního zkoseného osmistěnu. Toto Kelvinovo řešení splňuje podmínky, jež pro minimální mýdlové bubliny objevil Plateau. Zdálo se, že každý je spokojen s Kelvinovým řešením, i když důkaz optimality chyběl.

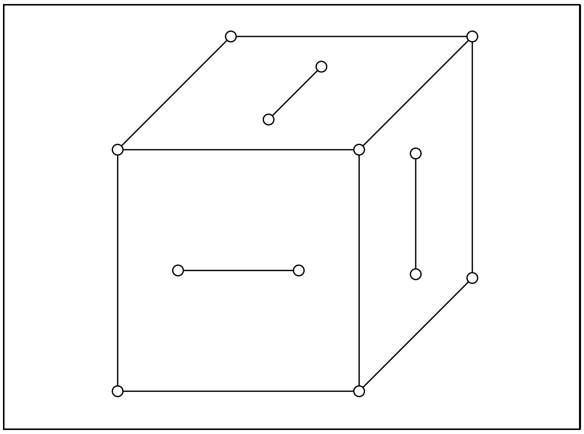
[18]) *Pozn. překladatelů:* Konvexní kompaktní množiny s neprázdným vnitřkem, které bez mezer vyplňují celý prostor, jsou konvexní mnohostěny — viz např. E. Schulte: *Tilings*, Handbook of Convex Geometry, Vol. B, North-Holland, Amsterdam, 1993, str. 902.

[19]) *Pozn. překladatelů:* … vhodně zvolený …



Obr. 10. R. Phelan a D. Weaire našli v roce 1994 protipříkad ke Kelvinově domněnce vyslovené v textu pod obr. 9.

Kelvin a jeho příznivci se však mýlili, což v roce 1994 ukázali fyzici D. Phelan a R. Weaire. Ti navrhli pěnu s dutinami se stejným objemem, ale značně menším povrchem, než má pěna Kelvinova. Jejich pěna obsahuje dva různé typy dutin. První se 14 stěnami a druhý s 12 stěnami (viz obr. 10). Představme si krychli s malou koulí v každém vrcholu a též ve středu. Přidejme ještě dvě koule ke každé stěně tak, jak je znázorněno na obr. 11. Jejich polohu lze zvolit tak, že Voronoiovy buňky vytvořené kolem každé koule budou mít stejný objem. Pokud stěny této sestavy nepatrně zdeformujeme, získáme Phelanův-Weaireův protipříklad ke Kelvinově domněnce.



Obr. 11. Středy Phelanových-Weaireových buněk jsou umístěny ve vrcholech krychle, ve vyznačených bodech na jejích stěnách a v jejím středu.

Jednodušší verze problému by mohla být snadněji zvládnutelná. Jaký tvar minimalizuje velikost povrchu, jestliže pěna obsahuje pouze konečný počet bublin stejného objemu? Pro jednu bublinu jde o klasický izoperimetrický problém. Kulová sféra zřejmě minimalizuje povrch obklopující daný objem. Problém dvou bublin[20]) (angl. *double*

[20]) *Pozn. překladatelů:* Obsah vnitřní společné stěny se započítává jen jednou.

bubble conjecture) vyřešili teprve nedávno J. Hass, M. Hutchings a R. Schlafy[21]). Problém více než dvou bublin není stále vyřešen.

Keplerova domněnka a Kelvinův problém jsou speciálními případy obecnějších problémů s pěnou. Phelan a Weaire nás žádají, abychom si představili, že stěny mýdlových bublin mají měřitelnou tloušťku. Snažili jsme se interpolovat mezi Keplerovým a Kelvinovým problémem pomocí parametru w (určujícího vlhkost mýdlového filmu), jenž udává podíl prostoru, který zaujímají tlusté stěny, přičemž $1 - w$ je podíl vyplněný dutinami. Pokud je pěna dokonale suchá, pak $w = 0$ a stěny jsou dvojrozměrné plochy. Kelvinův problém vyžaduje najít nejlepší tvar. Když je však pěna dostatečně vlhká, pak w je blízko jedničce a jednotlivé dutiny v pěně lze tvarovat nezávisle. Izoperimetrická nerovnost předepisuje, že dutiny musí minimalizovat povrch, takže se zformují dokonalé kulové plochy.

R. Weaire právě psal knihu o uspořádání koulí, když jsem dokončil důkaz Keplerovy domněnky. Začali jsme si dopisovat. Pod jeho vlivem jsem obrátil svou pozornost k rovinné verzi úlohy s pěnou. Tento problém je starý dva tisíce let. Jaké je nejefektivnější dělení roviny na stejné části? Domněnka o včelích plástech říká, že je to plást složený z pravidelných šestiúhelníků.

Pappus

Kolem roku 36 př. n. l. římský učenec Marcus Terentius Varro napsal knihu o zemědělství, v níž diskutoval šestiúhelníkový tvar buněk včelího plástu. Tuto šestiúhelníkovou strukturu tehdy vysvětlovaly dvě konkurenční teorie. Jedna tvrdila, že šestiúhelníky jsou lépe přizpůsobeny šesti včelím nohám. Druhá teorie, podporovaná tehdejšími matematiky, vysvětlovala strukturu pomocí izoperimetrických vlastností šestiúhelníkových buněk. Varro o tom píše: „Nemá snad komůrka uvnitř plástu šest úhlů… Geometři dokázali, že tento šestiúhelník vepsaný do kruhu ohraničuje největší část prostoru.“

Starověký důkaz byl ztracen, pokud to ovšem nebyl důkaz předkládaný o několik století později Pappem z Alexandrie v předmluvě k jeho páté knize. Pappova argumentace však není úplná. Ve skutečnosti neobsahuje nic víc než srovnání tří sugestivních případů. Již pythagorejci věděli, že jediné tři pravidelné mnohoúhelníky vyplňující rovinu jsou trojúhelník, čtverec a šestiúhelník. Pappus tvrdil, že při stejném množství materiálu použitém pro konstrukci těchto tvarů může šestiúhelník pojmout nejvíce medu. Pappovy důvody k tomu, že omezil svou pozornost jen na tři pravidelné mnohoúhelníky, nebyly matematické (včely se vyhýbají nepodobným tvarům). Rovněž vyloučil mezery mezi buňkami bez jakéhokoliv matematického zdůvodnění. Jestliže by buňky nebyly těsně u sebe, „mohla by cizí látka vniknout do skulin mezi nimi a znehodnotit tak čistotu jejich produktu.“[22])

---

[21]) *The double bubble conjecture*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. *1* (1995), No. 3, 98–102.

[22]) T. Heath: *A History of Greek Mathematics*, Vol. II, Oxford, 1921, str. 390.

V roce 1943 L. Fejes Tóth podal důkaz domněnky o včelím plástu za předpokladu, že všechny jeho buňky jsou konvexní mnohoúhelníky. Prohlásil, že obecná domněnka „odolala všem pokusům ji dokázat“. V roce 1999 jsem nalezl její první obecný důkaz.

Věta (Domněnka o včelím plástu)**.** *Libovolné dělení roviny na oblasti se stejným obsahem má obvod*[23]) *alespoň takový jako pravidelný šestiúhelníkový včelí plást.*

Hlavní součástí důkazu je nová izoperimetrická nerovnost, jejímž jediným minimem je pravidelný šestiúhelník.

Moje očekávání matematických obtíží byla utvářena Keplerovou domněnkou. Čekal jsem, že každá věta bude vyžadovat obrovské úsilí. Nebyl jsem psychologicky připraven na jasný dvacetistránkový důkaz domněnky o včelím plástu. V podstatě nevyužívá počítače a jeho dokončení trvalo šest měsíců. Na rozdíl od let usilovné práce, která přinesla důkaz Keplerovy domněnky, jsem se cítil, jako bych vyhrál v loterii.

Úloha o včelím plástu je přípravou na skutečnou výzvu — Kelvinův problém. Jaké je nejefektivnější rozdělení prostoru na části se stejným objemem? Je to Phelanova-Weaireova pěna?

V roce 2000, kdy se oživil zájem o Hilbertovy problémy, mnoho matematiků předložilo nové seznamy úloh. Můj příspěvek k Hilbertovu seznamu pro nové tisíciletí je Kelvinův problém. Má bohatou historii. Jeho řešení si vyžádá nové myšlenky z geometrické teorie míry. Frank Morgan předpovídá, že řešení Kelvinova problému může trvat jedno století. Na závěr otázka pro začátečníky: Existuje vůbec optimální řešení?

L i t e r a t u r a

[1] Ferguson, S. P., Hales, T. C.: *A formulation of the Kepler conjecture.* LANL e-print Archive math. MG/9811072; `http://xxx.lanl.gov/`

[2] Hales, T. C.: *An overview of the Kepler conjecture.* LANL e-print Archive math. MG/9811071; `http://xxx.lanl.gov/`

[3] Hales, T. C.: *The honeycomb conjecture.* LANL e-print Archive math. MG/9906042; `http://xxx.lanl.gov/`

[4] Hales, T. C., McLaughlin, S.: *A proof of the dodecahedral conjecture.* LANL e-print Archive math. MG/9811079; `http://xxx.lanl.gov/`

[23]) *Pozn. překladatelů:* Podle osobního sdělení autora se obvod uvažuje ve smyslu geometrické teorie míry, tj. jednodimenzionální Hausdorffovy míry hranic oblastí. Podrobnosti na str. 4 autorova článku *The honeycomb conjecture* (`http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/countdown/honey/`).