Jan Brandts; Michal Křížek

Třicet let od objevu superkonvergence metody konečných prvků

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 48 (2003), No. 4, 288--293

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141190

Třicet let od objevu superkonvergence metody konečných prvků

Jan Brandts, Amsterdam, a Michal Křížek, Praha

1. Úvod

Metoda konečných prvků je považována za jednu z nejefektivnějších numerických metod pro řešení různých technických úloh, především pak úloh matematické fyziky, jako jsou např. Maxwellovy rovnice, Navierovy-Stokesovy rovnice proudění, rovnice pružnosti či vedení tepla. Byla vynalezena Richardem Courantem zhruba před 60 lety (srov. přehledový článek [8]). Důkaz její konvergence podal v roce 1968 brněnský profesor Miloš Zlámal (viz [15]). Během rozvoje metody konečných prvků bylo objeveno, že ve speciálních bodech vyšetřované oblasti je řád rychlosti konvergence vyšší než optimální globální řád. Tento pozoruhodný jev byl nazván *superkonvergence*.

Systematické studium superkonvergenčních jevů začalo počátkem sedmdesátých let. Postupně byla dokázána superkonvergence metody konečných prvků pro speciální rovnice v uzlových bodech, Gaussových-Legendrových bodech, Jacobiho bodech a Lobattových bodech. Naším cílem bude přiblížit základní poznatky o tomto jevu.

2. Jednoduchý příklad

Pojem superkonvergence se poprvé objevil právě před třiceti lety v článku [5] J. Douglase a T. Duponta. Tito autoři vyšetřovali eliptickou okrajovou úlohu 2. řádu

$$-(au')' + cu = f, \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{2}$$

kde $a > 0$, $c > 0$ a f jsou hladké reálné funkce na intervalu [0,1]. Řešení u budeme aproximovat pomocí spojitých a po částech polynomiálních funkcí. Pro libovolné

Dr. Jan Brandts (1968), Korteweg-de Vries Institute, Faculty of Science, University of Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam, Nizozemí, e-mail: `brandts@science.uva.nl`, `http://www.science.uva.nl/~brandts`

Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc. (1952), Matematický ústav Akademie věd ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `krizek@math.cas.cz`, `http://www.math.cas.cz/~krizek`

Práce byla podpořena the Dutch Science Foundation NWO a grantem A 1019201 GA AV ČR.

přirozené číslo n položme $h = (n+1)^{-1}$, $x_i = ih$ pro $i = 0, \dots, n+1$, $K_i = [x_{i-1}, x_i]$ pro $i = 1, \dots, n+1$ a

$$V_h = \{v \in C[0,1]\colon\ v(0) = v(1) = 0,\quad v|_{K_i} \in P_k(K_i),\quad i = 1, \dots, n+1\}, \tag{3}$$

kde $P_k(K)$ je prostor polynomů stupně nejvýše k na prvku K a kde V_h se nazývá *prostor konečných prvků.*

Metoda konečných prvků spočívá v nalezení přibližného řešení $u_h \in V_h$, pro něž platí

$$(au_h', v_h')_0 + (cu_h, v_h)_0 = (f, v_h)_0 \quad \forall v_h \in V_h,$$

kde $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_0$ je skalární součin v prostoru $L^2(0,1)$. Tato rovnice formálně vznikne tak, že obě strany vztahu (1) vynásobíme libovolnou testovací funkcí $v_h \in V_h$, zintegrujeme přes interval $[0,1]$, provedeme integraci per partes a zaměníme u za u_h. Ze známé Rieszovy věty (viz např. [13, s. 233]) pak plyne existence právě jednoho takového řešení $u_h \in V_h$.

V roce 1973 Douglas a Dupont dokázali, že pro $h \to 0$

$$\max_i |u(x_i) - u_h(x_i)| = \mathcal{O}(h^{2k}),$$

je-li $u \in C^{k+1}[0,1]$, zatímco

$$\max_{x \in [0,1]} |u(x) - u_h(x)| = \mathcal{O}(h^{k+1}) \tag{4}$$

je optimální globální odhad, který nelze obecně zlepšit.[1]) Pro $k \geqq 2$ je tedy rychlost konvergence v uzlových bodech x_i mnohem větší než na celém intervalu [0,1]. Tento jev se nazývá *superkonvergence* (obecná definice je zavedena v [9]). Pro $k = 1$, $a = 1$ a $c = 0$ dokonce platí, že $u(x_i) = u_h(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, tj. v uzlových bodech x_i není žádná chyba.

Později M. Bakker (viz [2]) objevil další superkonvergenční jev. Zjistil totiž, že pro $k \geqq 2$ uvnitř každého intervalu K_i existuje $k-1$ bodů (tzv. Lobattových bodů), kde rozdíl $u - u_h$ je řádu $\mathcal{O}(h^{k+2})$, tj. rychlost konvergence metody konečných prvků je v těchto bodech o jeden řád vyšší, než je optimální globální řád (4).

V roce 1979 Lesaint se Zlámalem [11] dokázali, že v k Gaussových bodech[2]) každého intervalu K_i derivace u_h' konvergují k přesnému řešení rychlostí $\mathcal{O}(h^{k+1})$, zatímco $\mathcal{O}(h^k)$ je optimální globální rychlost. V tomto případě hovoříme o *superkonvergenci derivací.*

V monografii Babuška, Práger, Vitásek [1, s. 145] z roku 1966 se rovnice (1) s obecnými Newtonovými okrajovými podmínkami diskretizuje pomocí metody konečných diferencí. K aproximaci součinu $a(x)u'$ se používají Marčukovy identity. Vzniklá soustava lineárních algebraických rovnic je třídiagonální (podobně jako při použití lineárních konečných prvků, které mají optimální rychlost konvergence $\mathcal{O}(h^2)$). Autoři

---

[1]) Říkáme, že $q(h)$ je řádu $\mathcal{O}(p(h))$ pro $h \to 0$, jestliže existuje $h_0 > 0$ tak, že pro všechna $h \in (0, h_0)$ je výraz $|q(h)/p(h)|$ ohraničený.

[2]) Gaussovy body jsou kořeny Legendrových polynomů, které jsou ortogonální v $L^2(K_i)$. V Lobattových bodech nabývají tyto polynomy lokálních minim a maxim.

však dokazují konvergenci řádu $\mathcal{O}(h^6)$ v uzlových bodech, což lze též označit jako superkonvergenční výsledek, i když termín superkonvergence tehdy ještě nebyl znám.

3. Superkonvergenční jevy v rovině a v prostoru

Klíčové předpoklady u většiny superkonvergenčních jevů jsou hladkost řešení a jistá pravidelná struktura triangulací použitých pro metodu konečných prvků. Ukažme to opět na jednoduchém příkladu.

Předpokládejme, že $\Omega \subset R^d$, $d = 2, 3$, je ohraničená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$, a uvažujme Poissonovu rovnici s Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $f \in L^2(\Omega)$.

Nechť nejprve $d = 2$. Uvažujme triangulace T_h uzávěru oblasti $\overline{\Omega}$, které jsou tvořeny pouze rovnostrannými trojúhelníky s délkou strany h. Jejich vrcholy označme x_i, $i = 1, 2, \ldots, n(h)$. V prostoru lineárních konečných prvků

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) \colon\ v = 0 \text{ na } \partial\Omega,\ \ v|_K \in P_1(K) \text{ pro } K \in T_h\}$$

hledejme Galerkinovo řešení $u_h \in V_h$ definované vztahem

$$(\nabla u_h, \nabla v_h)_0 = (f, v_h)_0 \quad \forall v_h \in V_h,$$

kde ∇ je gradient. Pak platí (viz [3])

$$\max_i |u(x_i) - u_h(x_i)| = \mathcal{O}(h^4), \tag{5}$$

je-li $u \in C^4(\overline{\Omega})$, zatímco

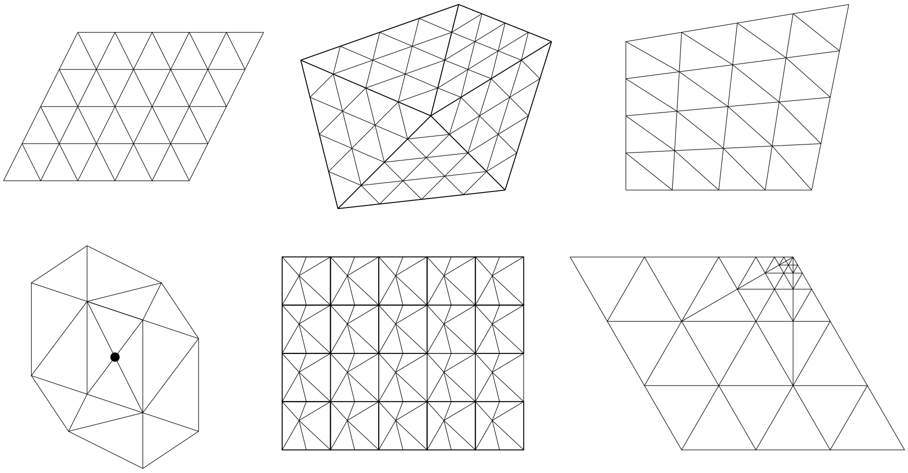
$$\max_{x\in\Omega} |u(x) - u_h(x)| = \mathcal{O}(h^2)$$

je optimální globální odhad, který nelze obecně zlepšit. Vysoký řád konvergence ve vztahu (5) je způsoben tím, že na pravidelné trojúhelníkové síti se několik prvních členů v asymptotickém rozvoji chyby anuluje.

Bohužel superkonvergenční odhad vysokého řádu (5) nelze zobecnit na případ $d = 3$, protože prostor nelze vykrýt pravidelnými čtyřstěny. Aristoteles sice kdysi tvrdil[3]), že to lze a že kolem každé hrany je „navinuto“ 5 čtyřstěnů. To by odpovídalo situaci, že úhel α mezi dvěma stěnami pravidelného čtyřstěnu je 72°. Aristoteles byl ovšem tak významnou osobností, že o jeho (nepravdivém) tvrzení nikdo nepochyboval. Teprve v 16. století se zjistilo, že tento úhel α je 71° (zaokrouhleno na celé stupně[4])).

[3]) Viz Aristoteles: *O nebi. O vzniku a zániku.* Pravda, Bratislava 1985, str. 146.

[4]) Přesná hodnota je $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$.



Obr. 1. Různé typy triangulací, na nichž lze dosáhnout superkonvergence; po řadě: uniformní, po částech uniformní, kvaziuniformní, lokálně bodově symetrická, lokálně periodická a sobě podobná.

Další teoretické potíže se superkonvergencí v trojrozměrném prostoru jsou popsány v přehledném článku [4].

V roce 1969 Oganesjan a Ruchovec [12] dokázali velice překvapivou vlastnost pro lineární konečné prvky na uniformních triangulacích (tj. triangulacích, v nichž každé dva sousední trojúhelníky tvoří rovnoběžník). Pro dostatečně hladké v definujme Lagrangeovu interpolaci $\pi_h v \in V_h$ vztahem

$$\pi_h v(x_i) = v(x_i)$$

pro všechny uzlové body x_i (vrcholy trojúhelníků). Označme $\|v\|_1 = \left(\|v\|_0^2 + \|\nabla v\|_0^2\right)^{1/2}$ Sobolevovu normu, kde $\|v\|_0$ je standardní L^2-norma. Pak platí (viz [12])

$$\|u_h - \pi_h u\|_1 = \mathcal{O}(h^2). \tag{6}$$

Na druhé straně není obecně možné zlepšit optimální odhady

$$\|u - \pi_h u\|_1 = \mathcal{O}(h) \quad \text{a} \quad \|u - u_h\|_1 = \mathcal{O}(h).$$

Vlastnost (6), která je základem většiny superkonvergenčních jevů, nám vlastně říká, že Lagrangeova interpolace a Galerkinovo řešení jsou si velice blízké. Oganesjan a Ruchovec [12] ji použili k důkazu konvergence metody konečných prvků pomocí trojúhelníkové nerovnosti

$$\|u - u_h\|_1 \leqq \|u - \pi_h u\|_1 + \|u_h - \pi_h u\|_1 = \mathcal{O}(h),$$

ale nevyužili ji k důkazu superkonvergence.

Na obrázku 1 vidíme různé typy pravidelných triangulací, na nichž byla dokázána celá řada nejrůznějších superkonvergenčních jevů (viz např. [9], [10], [14]).

4. Aposteriorní odhady chyby

Zatím jsme se nezmínili o konkrétních aplikacích superkonvergence. Pokud je rychlost konvergence v některých bodech vyšší než jinde, lze v nich očekávat i relativně malou diskretizační chybu. V dalším textu si ukážeme, jak můžeme z bodové superkonvergence vytěžit ještě něco navíc.

Vraťme se k jednorozměrné úloze (1)–(2). Předpokládejme, že k aproximaci řešení u použijeme spojité a po částech kvadratické funkce, tj. v (3) položíme $k = 2$. Odhad (4) nám pak říká, že globálně nemůžeme získat chybu obecně vyššího řádu než $\mathcal{O}(h^3)$, zatímco Bakkerův výsledek [2] tvrdí, že v Lobattových bodech dostáváme superkonvergenci řádu $\mathcal{O}(h^4)$. Pokud ale aproximujeme u_h kubickým interpolačním polynomem ve čtyřech sousedních Lobattových bodech, potom i v okolí těchto bodů můžeme očekávat chybu $\mathcal{O}(h^4)$ díky dobrým interpolačním vlastnostem kubických polynomů. Tato myšlenka nás přivádí k následujícímu algoritmu:

Pro každý prvek K_i, který obsahuje tři Lobattovy body (dva krajní body a těžiště K_i), vyberme čtvrtý Lobattův bod v jednom ze sousedních intervalů K_{i+1} nebo K_{i-1}. Dále vypočteme kubickou interpolaci u_h v těchto čtyřech bodech. Označíme-li $R_h u_h$ její restrikci na K_i, pak pomocí interpolačních vlastností Lagrangeových polynomů lze odvodit, že

$$\max_{x\in[0,1]} |u(x) - R_h u_h(x)| = \mathcal{O}(h^4). \tag{7}$$

Výše popsaná jednoduchá a výpočetně zcela nenáročná procedura (angl. post-processing) tak zlepšuje globální konvergenční řád na úroveň lokálního superkonvergenčního řádu v Lobattových bodech (viz kap. 2).

Nehledě na skutečnost, že vztah (7) je sám o sobě velice zajímavý, novou, lepší aproximaci $R_h u_h$ lze použít k odhadu chyby $u - u_h$. Tato chyba obecně není známa, protože přesné řešení u většinou neznáme. Funkce $R_h u_h$ je však asymptoticky mnohem blíže k u než u_h. Jestliže tedy zaměníme neznámou funkci u za $R_h u_h$, pak rozdíl

$$\varepsilon_h = R_h u_h - u_h,$$

který se nazývá *estimátor*, známe a ε_h dává dobrou aproximaci chyby $u - u_h$. Za poměrně slabých předpokladů lze totiž pro každé pevné x z intervalu $[0,1]$ dokázat, že

$$\frac{\varepsilon_h(x)}{u(x) - u_h(x)} \to 1 \quad \text{pro } h \to 0, \quad u(x) \neq u_h(x),$$

což nám říká, že estimátor ε_h je *asymptoticky přesný*. Podobné odhady mohou být dokázány i pro vícerozměrné problémy. Lze je použít i pro přesnější výpočet gradientu či na tzv. adaptivní zjemňování triangulací. Proto je otázkám superkonvergenčních jevů v metodě konečných prvků věnována velká pozornost. Rozsáhlá komentovaná bibliografie věnovaná superkonvergenci, která čítá 600 odkazů, je uvedena v [10].

5. Závěr

Vyšší přesnost přibližného řešení při použití superkonvergenčních technik má celou řadu dalších praktických aplikací. Např. v knize [6] bylo pomocí průměrování gradientů lineárních prvků vypočteno dosti přesně mechanické napětí v tělese přehrady. Superkonvergence gradientu v těžišti bilineárních obdélníkových prvků, kterou objevil Zlámal [16], byla použita k přesnějšímu výpočtu magnetického pole ve vysokonapěťových transformátorech ČKD. Chyba gradientu bilineárních prvků se totiž globálně chová jako $\mathcal{O}(h)$, zatímco v těžištích jednotlivých prvků konverguje kvadraticky, tj. jako $\mathcal{O}(h^2)$. V článku [7] se používá superkonvergence při citlivostní analýze jisté úlohy tvarové optimalizace.

Poděkování. Autoři děkují Mgr. Karlu Kolmanovi za cenné připomínky.

L i t e r a t u r a

[1] Babuška, I., Práger, M., Vitásek, E.: *Numerical processes in differential equations.* John Wiley & Sons, New York 1966.

[2] Bakker, M.: *A note on C^0 Galerkin methods for two-point boundary problem.* Numer. Math. *38* (1981/82), 447–453.

[3] Blum, H., Lin, Q., Rannacher, R.: *Asymptotic error expansion and Richardson extrapolation for linear finite elements.* Numer. Math. *49* (1986), 11–38.

[4] Brandts, J., Křížek, M.: *History and future of superconvergence in three-dimensional finite element methods.* Proc. Conf. Finite Element Methods: Three-dimensional Problems, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., vol. 15, Gakkōtosho, Tokyo 2001, 22–33.

[5] Douglas, J., Dupont, T.: *Some superconvergence results for Galerkin methods for the approximate solution of two-point boundary value problems.* Topics in Numer. Anal. II, Acad. Press 1973, 89–113.

[6] Chen, C. M., Huang, Y. Q.: *High accuracy theory of finite element methods.* Hunan Science and Technology Press, Changsha 1995.

[7] Hlaváček, I., Chleboun, J.: *A recovered gradient method applied to smooth optimal shape problems.* Appl. Math. *41* (1996), 281–297.

[8] Křížek, M.: *Padesát let metody konečných prvků.* PMFA *37* (1992), 129–140.

[9] Křížek, M., Neittaanmäki, P.: *On superconvergence techniques.* Acta Appl. Math. *9* (1987), 175–198.

[10] Křížek, M., Neittaanmäki, P., Stenberg, R. (eds): *Finite Element Methods: Superconvergence, Postprocessing, and A Posteriori Estimates.* LN in Pure and Appl. Math., vol. 196, Marcel Dekker, New York 1998.

[11] Lesaint, P., Zlámal, M.: *Superconvergence of the gradient of finite element solutions.* RAIRO Anal. Numér. *13* (1979), 139–166.

[12] Oganesjan, L. A,. Ruchovec, L. A.: *An investigation of the rate of convergence of variational-difference schemes for second order elliptic equations in a two-dimensional region with smooth boundary.* Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. *9* (1969), 1102–1120.

[13] Taylor, A. E.: *Úvod do funkcionální analýzy.* Academia, Praha 1973.

[14] Wahlbin, L.: *Superconvergence in Galerkin finite element methods.* LN in Math., vol. 1605, Springer, Berlin 1995.

[15] Zlámal, M.: *On the finite element method.* Numer. Math. *12* (1968), 394–409.

[16] Zlámal, M.: *Superconvergence and reduced integration in the finite element method.* Math. Comp. *32* (1978), 663–685.