J. Šimon

Opérations dérivées des treillis orthomodulaire (Part 1)

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 22 (1981), No. 2, 7--14

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142469`

1981 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE - MATHEMATICA ET PHYSICA VOL. 22. NO. 2. Pag. 7—14

Opérations dérivées des treillis orthomodulaire (Part 1)

J. ŠIMON
Faculté pédagogique, Ostrava*)

Le 11 juillet 1980

L'auteur étudie quelques propriétés de l'algèbre libre $\mathscr{A}_2 = (A, \diagdown, \diagup, ', 0, 1)$ ayant deux générateurs x, y dont les opérations $\diagdown$ et $\diagup$ sont dérivées des éléments du treillis orthomodulaire libre $\mathscr{T}_2 = (T, \vee, \wedge, ', 0, 1)$, qui est engendré par x, y.

Автор занимается некоторыми свойствами свободной алгебры $\mathscr{A}_2 = (A, \diagdown, \diagup, ', 0, 1)$, порожденной элементами x, y, операции $(\diagdown, \diagup)$ которой выведены из элементов свободной ортомодулярной структуры $\mathscr{T}_2 = (T, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ с образующими x, y.

Autor vyšetřuje některé vlastnosti volné algebry $\mathscr{A}_2 = (A, \diagdown, \diagup, ', 0, 1)$, generované prvky x, y, jejíž operace $\diagdown$ a $\diagup$ jsou odvozeny z prvků volného ortomodulárního svazu $\mathscr{T}_2 = (T, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ s generátory x, y.

Dans cet article on va désigner $\mathscr{T}_2 = (T, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ un treillis orthomodulaire libre ayant deux générateurs x, y. Si (a, b) est un couple d'éléments de $\mathscr{T}_2$ tel que $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b')$, on dit que a commute avec b et on écrit aCb (cf. [1]). Voici les propriétés de la rélation C:

Lemme 1. Pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de $\mathscr{T}_2$, les propositions suivantes sont vraies:

(i) $aCb \Rightarrow bCa$
(ii) $aCb \Rightarrow a'Cb$
(iii) $aCb \Rightarrow a'Cb'$
(iv) aCa'
(v) $aCb, aCc \Rightarrow b \vee cCa$
(vi) $aCb, aCc \Rightarrow b \wedge cCa$
(vii) $a \leqq b' \Rightarrow aCb$.

Rappelons encore le théorème de Foulis-Holland: les éléments $a, b, c \in \mathscr{T}_2$ constituent un triplet distributif, si l'un de ces éléments commute avec les deux restants. (Voir [2].)

1. Opérations $\diagdown$, $\diagup$

Définissons deux opérations sur le treillis $\mathscr{T}_2$ par les formules suivantes:

(1) $$a \diagdown b = (a \vee b) \wedge (a \vee b') \wedge (a' \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge b'))$$

(2) $$a \diagup b = (a \vee b) \wedge (a' \vee b) \wedge (b' \vee (a \wedge b) \vee (a' \wedge b)).$$

*) 701 03 Ostrava, Reální 5, Czechoslovakia.

Les propriétés de ces opérations qui résultent immédiatement de (1) et de (2), sont données par le

Lemme 2. Soient $a, b \in \mathscr{T}_2$. Alors

(i) les opérations $\diagdown$, $\diagup$ sont idempotents
(ii) $a \diagdown b = b \diagup a$
(iii) $a \diagdown b = a \diagdown b'$, $a \diagup b = a' \diagup b$
(iv) $(a \diagdown b)' = a' \diagdown b'$, $(a \diagup b)' = a' \diagup b'$
(v) $0 \diagdown a = a \diagup 0 = 0$, $a \diagdown 0 = 0 \diagup a = a$
(vi) $1 \diagdown a = a \diagup 1 = 1$, $a \diagdown 1 = 1 \diagup a = a$.

Maintenant, nous allons démontrer la condition nécessaire et suffisante pour que aCb.

Théorème 3. Soient a, b deux éléments d'un treillis orthomodulaire. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(A) aCb
(B) $a \diagdown b = a$
(C) $a \diagup b = b$.

Démonstration.

(A) $\Rightarrow$ (B), $(A) \Rightarrow$ (C): Soit aCb; parce que $a \vee bCb'$, $a \vee bCa$, $a'Ca$, bCb', $aCa \wedge b$, les triplets $(a \vee b, a, b')$, $(a', a, a \wedge b)$, (a, b, b') sont les triplets distributifs d'aprés le théorème de Foulis-Holland. Nous obtenons par le calcul direct

$$\begin{aligned} a \diagdown b &= (a \vee b) \wedge (a \vee b') \wedge (a' \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge b')) = \\ &= (((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge b')) \wedge (((a' \vee a) \wedge (a' \vee b)) \vee (a \wedge b')) = \\ &= (a \vee (a \wedge b') \vee (b \wedge b')) \wedge ((a' \vee b) \vee (a' \vee b)') = a\,, \\ a \diagup b &= (a \vee b) \wedge (a' \vee b) \wedge (b' \vee (a \wedge b) \vee (a' \wedge b)) = \\ &= (((a \vee b) \wedge a') \vee b) \wedge (((b' \vee a) \wedge (b' \vee b)) \vee (a' \wedge b)) = \\ &= ((a \wedge a') \vee (b \wedge a') \vee b) \wedge ((b' \vee a) \vee (b' \vee a)') = b\,. \end{aligned}$$

(B) $\Rightarrow$ (A): Supposons que $a \diagdown b = a$, puis

$$a \vee (a \diagdown b) = a \vee ((a \vee b) \wedge (a \vee b') \wedge (a' \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge b'))) = a\,.$$

Comme $aC(a \vee b) \wedge (a \vee b')$, $aCa' \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge b')$, nous pouvons mettre la dernière relation sur la forme

$$(a \vee ((a \vee b) \wedge (a \vee b'))) \wedge (a \vee a' \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge b')) = a$$

$$(a \vee b) \wedge (a \vee b') = a\,;$$

si nous passons ici aux orthocompléments, on reçoit

$$a' = (a' \wedge b) \vee (a' \wedge b')\,.$$

Donc $a'Cb$ et aussi aCb.

(C) $\Rightarrow$ (A): Si $a \diagup b = b$, nous obtenons succesivement

$$b \vee (a \diagup b) = b \vee ((a \vee b) \wedge (a' \vee b) \wedge (b' \vee (a \wedge b) \vee (a' \wedge b))) = b$$
$$(a \vee b) \wedge (a' \vee b) = b$$
$$(b' \wedge a) \vee (b' \wedge a') = b',$$

ce qui implique aCb.

2. Algèbre $\mathscr{A}_2 = (A, \diagdown, \diagup, ', O, I)$

Considérons les opérations $'$, 0, 1 du treillis $\mathscr{T}_2$ et ajoutons-y les opérations $\diagdown$ et $\diagup$; l'algèbre libre $\mathscr{A}_2$ $(A, \diagdown, \diagup, ', 0, 1)$ ayant les générateurs x, y ne contiendra pas tout les éléments de $\mathscr{T}_2$. Il est clair, que à $\mathscr{A}_2$ appartiennent 0, 1, x, y, x', y' et aussi

$$\begin{aligned}
t &= x \diagup y = x' \diagup y = (x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y) \vee (x' \wedge y)),\\
u &= x \diagdown y = x \diagdown y' = (x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge y')),\\
t' &= (x \diagup y)' = x' \diagup y' = x \diagup y' = (x' \vee y') \wedge (x \vee y') \wedge (y \vee (x' \wedge y') \vee (x \wedge y')),\\
u' &= (x \diagdown y)' = x' \diagdown y' = x' \diagdown y = (x' \vee y') \wedge (x' \vee y) \wedge (x \vee (x' \wedge y') \vee (x' \wedge y)).
\end{aligned}$$

Si nous cherchons d'autres éléments de $\mathscr{A}_2$, nous voyons que $\mathscr{A}_2$ est stable pour les deux opérations $\diagdown$ et $\diagup$, ce qui résulte de

Lemme 4. Pour $x, y, t, u \in \mathscr{A}_2$ est

(i)	$x \diagdown t = u$	(vi)	$u \diagup t = y$
(ii)	$x \diagup t = y$	(vii)	$x \diagdown u = x$
(iii)	$y \diagdown t = y$	(viii)	$x \diagup u = u$
(iv)	$y \diagup t = t$	(ix)	$y \diagdown u = t$
(v)	$u \diagdown t = t$	(x)	$y \diagup u = x$.

Démonstration.

Nous allons démontrer (i), les démonstrations (ii)–(x) sont analogiques.

$$\begin{aligned}
x \diagdown t &= x \diagdown (x \diagup y) = x \diagdown ((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y) \vee (x' \wedge y))) =\\
&= (x \vee ((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y) \vee (x' \wedge y)))) \wedge\\
&\wedge (x \vee (x' \wedge y') \vee (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y') \wedge (x \vee y'))) \wedge\\
&\wedge (x' \vee (x \wedge (x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y) \vee (x' \wedge y))) \vee\\
&\vee (x \wedge ((x' \wedge y') \vee (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y') \wedge (x \vee y'))))) =\\
&= ((x \vee ((x \vee y) \wedge (x' \vee y))) \wedge (x \vee y' \vee (x \wedge y) \vee (x' \wedge y))) \wedge\\
&\wedge ((x' \wedge y') \vee ((x \vee y) \wedge (x \vee ((x' \vee y') \wedge (x \vee y'))))) \wedge\\
&\wedge (x' \vee ((x' \vee y) \wedge ((x \wedge y') \vee (x \wedge ((x \wedge y) \vee (x' \wedge y))))) \vee\\
&\vee (x \wedge ((x' \wedge y') \vee (x \wedge y'))) \vee (x \wedge y \wedge (x' \vee y') \wedge (x \vee y'))) =\\
&= (x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge y')) = x \diagdown y = u
\end{aligned}$$

d'aprés le théorème de Foulis-Holland.

Nous pouvons tirer avantage des propositions du Lemme 4 à determiner tout les éléments d'algèbre $\mathscr{A}_2$. Considérant toutes les possibilités, nous aboutirons au résultat: l'algèbre $\mathscr{A}_2$ a dix éléments $0, 1, x, y, x', y', t, u, t'. u'$. Voici les tables d'opérations pour $\diagdown$ et $\diagup$:

Table 1.

$\diagdown$	0	1	x	y	x'	y'	t	u	t'	u'
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x	x	x	x	u	x	u	u	x	u	x
y	y	y	t	y	t	y	y	t	y	t
x'	x'	x'	x'	u'	x'	u'	u'	x'	u'	x'
y'	y'	y'	t'	y'	t'	y'	y'	t'	y'	t'
t	t	t	y	t	y	t	t	y	t	y
u	u	u	u	x	u	x	x	u	x	u
t'	t'	t'	y'	t'	y'	t'	t'	y'	t'	y'
u'	u'	u'	u'	x'	u'	x'	x'	u'	x'	u'

Table 2.

$\diagup$	0	1	x	y	x'	y'	t	u	t'	u'
0	0	1	x	y	x'	y'	t	u	t'	u'
1	0	1	x	y	x'	y'	t	u	t'	u'
x	0	1	x	t	x'	t'	y	u	y'	u'
y	0	1	u	y	u'	y'	t	x	t'	x'
x'	0	1	x	t	x'	t'	y	u	y'	u'
y'	0	1	u	y	u'	y'	t	x	t'	x'
t	0	1	u	y	u'	y'	t	x	t'	x'
u	0	1	x	t	x'	t'	y	u	y'	u'
t'	0	1	u	y	u'	y'	t	x	t'	x'
u'	0	1	x	t	x'	t'	y	u	y'	u'

Aucune des opérations $\diagdown$, $\diagup$ n'est pas associative, néanmoins, elles satisfont aux certaines modifications de al loi associative.

Théorème 5. Pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de $\mathscr{A}_2$ est

(3) $$a \diagup (b \diagup c) = b \diagup (a \diagup c) .$$

Démonstration.

Il est clair, que (3) est vérifieé pour $c = 0, 1$. Notons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= \{0, 1, x, x', u, u'\} \\ \boldsymbol{L} &= \{y, y', t, t'\} \\ \boldsymbol{M} &= \{0, 1, y, y', t, t'\} \\ \boldsymbol{N} &= \{x, x', u, u'\} \end{aligned}$$

et choisissons successivement $c = x, x', y, y', t, t', u, u'$.

I. $c = x$: comme nous voyons de Table 2, les expressions $a \diagup c, b \diagup c$ égalent x ou u pour tout $a, b \in \mathscr{A}_2$; avec cela

$$a \diagup c = b \diagup c = x \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{K}$$
$$a \diagup c = b \diagup c = u \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{L}\,.$$

Considerons quatre cas possibles:

1. $a \diagup c = b \diagup c = x \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup x = x = b \diagup x = b \diagup (a \diagup c)$
2. $a \diagup c = x,\ b \diagup c = u \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup u = u = b \diagup x = b \diagup (a \diagup c)$
3. $a \diagup c = u,\ b \diagup c = x \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup x = u = b \diagup u = b \diagup (a \diagup c)$
4. $a \diagup c = b \diagup c = u \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup u = x = b \diagup u = b \diagup (a \diagup c)\,.$

Évidemment, en tout cas (3) est verifiée.

II. $c = y$:

$$a \diagup c = b \diagup c = y \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{M}$$
$$a \diagup c = b \diagup c = t \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{N}$$

1. $a \diagup c = b \diagup c = y \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup y = y = b \diagup y = b \diagup (a \diagup c)$
2. $a \diagup c = y,\ b \diagup c = t \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup t = t = b \diagup y = b \diagup (a \diagup c)$
3. $a \diagup c = t,\ b \diagup c = y \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup y = t = b \diagup t = b \diagup (a \diagup c)$
4. $a \diagup c = b \diagup c = t \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup t = y = b \diagup t = b \diagup (a \diagup c)$

III. $c = x'$:

$$a \diagup c = b \diagup c = x' \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{K}$$
$$a \diagup c = b \diagup c = u' \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{L}$$

1. $a \diagup c = b \diagup c = x' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup x' = x' = b \diagup x' = b \diagup (a \diagup c)$
2. $a \diagup c = x',\ b \diagup c = u' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup u' = u' = b \diagup x' = b \diagup (a \diagup c)$
3. $a \diagup c = u',\ b \diagup c = x' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup x' = u' = b \diagup u' = b \diagup (a \diagup c)$
4. $a \diagup c = b \diagup c = u' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup u' = x' = b \diagup u' = b \diagup (a \diagup c)$

IV. $c = y'$:

$$a \diagup c = b \diagup c = y' \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{M}$$
$$a \diagup c = b \diagup c = t' \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{N}$$

1. $a \diagup c = b \diagup c = y' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup y' = y' = b \diagup y' = b \diagup (a \diagup c)$
2. $a \diagup c = y',\ b \diagup c = t' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup t' = t' = b \diagup y' = b \diagup (a \diagup c)$
3. $a \diagup c = t',\ b \diagup c = y' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup y' = t' = b \diagup t' = \diagup (a \diagup c)$
4. $a \diagup c = b \diagup c = t' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup t' = y' = b \diagup t' = b \diagup (a \diagup c)$

V. $c = t$:

$$a \diagup c = b \diagup c = t \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{M}$$
$$a \diagup c = b \diagup c = y \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{N}$$

1. $a \diagup c = b \diagup c = t\ a \diagup (b \diagup c) = a \diagup t = t = b \diagup t = b \diagup (a \diagup c)$
2. $a \diagup c = t,\ b \diagup c = y \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup y = y = b \diagup t = b \diagup (a \diagup c)$

3. $a \diagup c = y,\ b \diagup c = t \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup t = y = b \diagup y = b \diagup (a \diagup c)$
4. $a \diagup c = b \diagup c = y \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup y = t = b \diagup y = b \diagup (a \diagup c)$

VI. $c = u$:

$$a \diagup c = b \diagup c = u \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{K}$$
$$a \diagup c = b \diagup c = x \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{L}$$

1. $a \diagup c = b \diagup c = u \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup u = u = b \diagup u = b \diagup (a \diagup c)$
2. $a \diagup c = u,\ b \diagup c = x \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup x = x = b \diagup u = b \diagup (a \diagup c)$
3. $a \diagup c = x,\ b \diagup c = u \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup u = x = b \diagup x = b \diagup (a \diagup c)$
4. $a \diagup c = b \diagup c = x \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup x = u = b \diagup x = b \diagup (a \diagup c)$

VII. $c = t'$:

$$a \diagup c = b \diagup c = t' \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{M}$$
$$a \diagup c = b \diagup c = y' \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{N}$$

1. $a \diagup c = b \diagup c = t' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup t' = t' = b \diagup t' = b \diagup (a \diagup c)$
2. $a \diagup c = t',\ b \diagup c = y' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup y' = y' = b \diagup t' = b \diagup (a \diagup c)$
3. $a \diagup c = y',\ b \diagup c = t' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup t' = y' = b \diagup y' = b \diagup (a \diagup c)$
4. $a \diagup c = b \diagup c = y' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup y' = t' = b \diagup y' = b \diagup (a \diagup c)$

VIII. $c = u'$:

$$a \diagup c = b \diagup c = u' \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{K}$$
$$a \diagup c = b \diagup c = x' \Leftrightarrow a, b \in \boldsymbol{L}$$

1. $a \diagup c = b \diagup c = u' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup u' = u' = b \diagup u' = b \diagup a \diagup c)$
2. $a \diagup c = u',\ b \diagup c = x' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup x' = x' = b \diagup u' = b \diagup (a \diagup c)$
3. $a \diagup c = x',\ b \diagup c = u' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup u' = x' = b \diagup x' = b \diagup (a \diagup c)$
4. $a \diagup c = b \diagup c = x' \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup x' = u' = b \diagup x' = b \diagup (a \diagup c)$

De cette manière, le théorème est démontré.

Voici une conséquence immédiate du Théorème 5 et du Lemme 2:

Corollaire 6. Pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathscr{A}_2$, les égalités suivantes sont vérifiées:

(4) $$(a \diagdown b) \diagdown c = (a \diagdown c) \diagdown b$$
(5) $$(a \diagdown b) \diagdown a = a \diagup (b \diagup a) = a \diagdown b\,.$$

Théorème 7. Les opérations $\diagdown$ et $\diagup$ de l'algèbre $\mathscr{A}_2$ sont autodistributives, c'est-à-dire que

(6) $$a \diagup (b \diagup c) = (a \diagup b) \diagup (a \diagup c)$$
(7) $$(b \diagup c) \diagup a = (b \diagup a) \diagup (c \diagup a)$$
(8) $$a \diagdown (b \diagdown c) = (a \diagdown b) \diagdown (a \diagdown c)$$
(9) $$(b \diagdown c) \diagdown a = (b \diagdown a) \diagdown (c \diagdown a)$$

pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de $\mathscr{A}_2$.

Démonstration.

D'aprés le Lemme 2, (6) et (9) sont équivalentes de même que (7) et (8). Alors, if suffit de démontrer (6) et (8).

L'égalité (6) est vraie pour $c = 0, 1$; pour $c \in \mathscr{A}_2$ restants nous la prouvons de la même manière comme (3).

Soit $c = x$. Alors $a \diagup c = x$ ou $a \diagup c = u$ pour tout $a \in \mathscr{A}_2$. En tout cas possible l'égalité (6) est verifiée. En effet, si $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ sont les ensembles de la démonstration du Théorème 5, nous obtenons:

1. $a \diagup c = b \diagup c = x \Rightarrow a, b \in \boldsymbol{K}, a \diagup b \in \boldsymbol{K} \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup x = x = (a \diagup b) \diagup x = (a \diagup b) \diagup (a \diagup c)$,
2. $a \diagup c = x, b \diagup c = u \Rightarrow a \in \boldsymbol{K}, b \in \boldsymbol{L}, a \diagup b \in \boldsymbol{L} \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup u = u = (a \diagup b) \diagup x = (a \diagup b) \diagup (a \diagup c)$,
3. $a \diagup c = u, b \diagup c = x \Rightarrow a \in \boldsymbol{L}, b \in \boldsymbol{K}, a \diagup b \in \boldsymbol{K} \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup x = u = (a \diagup b) \diagup u = (a \diagup b) \diagup (a \diagup c)$,
4. $a \diagup c = b \diagup c = u \Rightarrow a, b \in \boldsymbol{L}, a \diagup b \in \boldsymbol{L} \Rightarrow a \diagup (b \diagup c) = a \diagup u = x = (a \diagup b) \diagup u = (a \diagup b) \diagup (a \diagup c)$.

Par analogie, on démontre (6) pour $c = y, x', y', t, u, t', u'$ et (8) pour tout $c \in \mathscr{A}_2$.

Corollaire 8. Les opérations $\diagdown$ et $\diagup$ de l'algèbre $\mathscr{A}_2$ sont réciproquement distributives, c'est-à-dire que

$(\mathrm{D}_{\mathrm{L}}^{\diagup})$ $a \diagup (b \diagdown c) = (a \diagup b) \diagdown (a \diagup c)$
$(\mathrm{D}_{\mathrm{L}}^{\diagdown})$ $a \diagdown (b \diagup c) = (a \diagdown b) \diagup (a \diagdown c)$
$(\mathrm{D}_{\mathrm{P}}^{\diagup})$ $(b \diagdown c) \diagup a = (b \diagup a) \diagdown (c \diagup a)$
$(\mathrm{D}_{\mathrm{P}}^{\diagdown})$ $(b \diagup c) \diagdown a = (b \diagdown a) \diagup (c \diagdown a)$

pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de $\mathscr{A}_2$.

Démonstration.

Il est clair, que

$$a \diagup (b \diagdown c) = (b \diagdown c) \diagdown a = (b \diagdown a) \diagdown (c \diagdown a) = (a \diagup b) \diagdown (a \diagup c)$$

d'aprés (9). Analogiquement aussi $(\mathrm{D}_{\mathrm{L}}^{\diagdown})$, $(\mathrm{D}_{\mathrm{P}}^{\diagup})$, $(\mathrm{D}_{\mathrm{P}}^{\diagdown})$ découle de (7), (8), (6), respectivement.

Étudions maintenant les formes des lois „d'absorption" dans $\mathscr{A}_2$. (Voir [3].) Comme les opérations $\diagdown$ et $\diagup$ ne sont pas commutatives, il faut prendre en considération les expressions $a \diagup (a \diagdown b)$, $a \diagup (b \diagdown a)$, $(a \diagdown b) \diagup a$, $(b \diagdown a) \diagup a$, $a \diagdown (a \diagup b)$ $a \diagdown (b \diagup a)$, $(a \diagup b) \diagdown a$, $(b \diagup a) \diagdown a$. Si nous utilisons (ii) du Lemme 2, nous obtenons

$$\begin{aligned} &a \diagup (a \diagdown b) = a \diagdown (a \diagup b) = (b \diagup a) \diagdown a = (b \diagdown a) \diagup a \\ &a \diagdown (b \diagup a) = (a \diagdown b) \diagup a \\ &a \diagup (b \diagdown a) = (a \diagup b) \diagdown a\,. \end{aligned}$$

Pour ces trois expressions du type „d'absorption“ est verifié le

Théorème 9. Pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathscr{A}_2$ les conditions suivantes sont satisfaites:

(A_1) $a \diagup (a \diagdown b) = a \diagdown b$
(A_2) $(a \diagdown b) \diagup a = a$
(A_3) $(a \diagup b) \diagdown a = b.$

Démonstration.

Ad (A_1): Ici $a \diagup (a \diagdown b) = a \diagup (b \diagup a) = b \diagup (a \diagup a) = b \diagup a = a \diagdown b$ d'aprés (3).
Ad (A_2), (A_3): En utilisant le théorème de Foulis-Holland, nous obtenons:

$$\begin{aligned}(a \diagdown b) \diagup a = a \diagdown (a \diagdown b) &= (a \vee ((a \vee b) \wedge (a \vee b') \wedge (a' \vee (a \wedge b) \vee \\ &\vee (a \wedge b')))) \wedge \\ &\wedge (a \vee ((a' \vee b') \wedge (a' \vee b) \wedge (a \vee (a' \wedge b') \vee (a' \wedge b)))) \wedge \\ &\wedge (a' \vee (a \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee b') \wedge (a' \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge b'))) \vee \\ &\vee (a \wedge (a' \vee b') \wedge (a' \vee b) \wedge (a \vee (a' \wedge b') \vee (a' \wedge b)))) = \\ &= ((a \vee b) \wedge (a \vee b')) \wedge (a \vee (a' \wedge b') \vee (a' \wedge b)) \wedge \\ &\wedge (a' \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge b') \vee (a \wedge (a' \vee b) \wedge (a' \vee b'))) = \\ &= a \wedge 1 = a\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a \diagup b) \diagdown a = a \diagup (a \diagup b) &= (a \vee ((a \vee b) \wedge (a' \vee b) \wedge (b' \vee (a \wedge b) \vee \\ &\vee (a' \wedge b)))) \wedge \\ &\wedge (a' \vee ((a \vee b) \wedge (a' \vee b) \wedge (b' \vee (a \wedge b) \vee (a' \wedge b)))) \wedge \\ &\wedge (((a' \vee b') \wedge (a \vee b') \wedge (b \vee (a' \wedge b') \vee (a \wedge b'))) \vee \\ &\vee (a \wedge (a \vee b) \wedge (a' \vee b) \wedge (b' \vee (a \wedge b) \vee (a' \wedge b))) \vee \\ &\vee (a' \wedge (a \vee b) \wedge (a' \vee b) \wedge (b' \vee (a \wedge b) \vee (a' \wedge b)))) = \\ &= (a \vee b) \wedge (a' \vee b) \wedge ((a' \wedge b') \vee (a \wedge b') \vee b) = b\,.\end{aligned}$$

Références

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. Troisième édition, New York, Publ. AMS 1967.
[2] HOLLAND, S. S.: Distributivity and perspectivity in orthomodular lattices. Trans. Amer. Math. Soc., *108* (1963), 66—87.
[3] KRÖGER, H.: Zwerch-Assoziativität und verbandsähnliche Algebren. Bayer. Akademie d. Wiss., mathem. nat. Klasse, Sitzungsberichte (1973), 23—48.