P-Hypergroupes

TH. VOUGIOUKLIS AND L. KONGUETSOF

Section de Mathématiques, Université Démocrite de Thrace, Xanthi, Greece

Received 17 April 1986

We study some P-hypergroups which are constructed from a semigroup H by using a subset P of H.

Studujeme některé P-hypergrupy, které jsou konstruovány z pologrupy H užitím podmnožiny P množiny H.

Изучаются те Р-гипергруппы, конструкция которых основана на некотором подмножестве Р множества Н.

A. Introduction

Si on se donne un demi-groupe et un de ses sous-ensemblers P alors on peut construire d'une manière concrète une hyperopération associative qui est appelée P-hyperopération. Cette hyperopération est $|P|$-dimensionnelle et pour $|P|$ fini nous avons certaines conclusions anciennes (voir [7]). Aussi, dans certains travaux, comme par exemple dans [1], nous trouvons certaines conclusions pour des hyperstructures du même type mais d'une forme modifiée. Il est remarquable que les hyperstructures avec des sousensembles différents d'un ensemble sont partiellement ordonnées.

Le but de ce travail est l'étude des P-hypergroupes principalement par rapport à la cyclicité. Aussi de formuler certaines conclusions antérieures. En fin de donner un nombre des problèmes ouverts qui montrent l'étendue du domaine de la recherche qui se présente.

B. Préliminaires

Les hypergroupes que nous considérons dans ce travail sont des hypergroupes de Marty [4]. Un hypergroupe $\langle H, \cdot \rangle$ s'appelle cyclique [7] s'il existe un élément h

The results of the paper were presented at Charles University during authors' stay in Prague, Spring 1986.

de H, qui s'appelle générateur, tel que $H = h^1 \cup h^2 \cup \ldots \cup h^n \cup \ldots$. Le plus petit nombre naturel n tel que

$$H = h^1 \cup h^2 \cup \ldots \cup h^n$$

s'appelle la période de h. Si tous les générateurs ont la même période, alors H s'appelle *cyclique avec période* [5]. L'hypergroupe H s'appelle *hypergroupe cyclique monopuissant* [5] de période finie s'il existe $h \in H$ et un naturel n tel que $H = h^n$. Le plus petit naturel n tel que $H = h^n$ s'appelle la période de h de l'hypergroupe cyclique monopuissant H. Des définitions analogues se donnent aussi pour la période infinie. Évidemment, l'hypergroupe cyclique monopuissant est un cas particulier de l'hypergroupe cyclique.

On appelle hyperhomomorphisme entre deux hypergroupes $\langle H_1, \cdot \rangle$ et $\langle H_2, \circ \rangle$ toute application f: $H_1 \to H_2$ telle que

$$f(x \,.\, y) \subseteq f(x) \circ f(y) \,, \quad \forall x, y \in H_1 \,.$$

Dans le cas d'égalité nous avons l'hyperhomomorphisme fort [2].

Formulons maintenant les définitions essentielles qui s'introduisent dans [6].

Soit $(G, \cdot)$ un demi-groupe et $P \subset G$, $P \neq \emptyset$.

On appelle P-hyperopération dans G l'hyperopération $*^P$ definie de la façon suivante:

$$*^P \colon G \times G \to \mathscr{P}(G) \,; \quad (x, y) \mapsto xPy \,;$$

cette hyperopération est associative puisqu'on a

$$x *^P (y *^P z) = xPyPz = (x *^P y) *^P z \,, \quad \forall x, y, z \in G \,.$$

Si en plus nous avons aussi l'axiome de la réproduction, alors $\langle G, *^P \rangle$ s'appelle *P-hypergroupe*. Évidemment, si $(G, \cdot)$ est un groupe, alors $\langle G, *^P \rangle$ est un P-hypergroupe. Dans ce travail nous étudions des hypergroupes de ce type.

Cette hyperopération est une généralisation de l'hyperopération qui a été introduite dans [5]. Il suffit de remarquer que cette hyperopération là utilise l'ensemble $\{e\} \cup P$ au lieu de P, où e est l'élément neutre du groupe $(G, \cdot)$.

Si $|P| = 1$, alors l'hyperopération $*^P$ se dégénére à une opération univoque dans G. Un sous-ensemble H de G s'appelle sous-P-hypergroupe de $\langle G, *^P \rangle$ si $P \subset H \subset G$ et $\langle H, *^P \rangle$ est un hypergroupe.

Proposition. Soient $(G_1, \cdot)$, $(G_2, \circ)$ deux groupes, $f \in \operatorname{Hom}(G_1, G_2)$ et $P \subset G_1$. Alors l'homomorphisme f est un hyperhomomorphisme fort entre les P-hypergroupes $\langle G_1, *^P \rangle$ et $\langle G_2, *^{f(p)} \rangle$.

Démonstration. Nous avons $\forall x, y \in G_1$

$$f(x *^P y) = f(xPy) = f(x) \circ f(P) \circ f(y) = f(x) *^{f(P)} f(y) \,,$$

c.q.f.d.

Cette propriété entraîne que si f était un isomorphisme, alors aussi f serait un hyper-isomorphisme. Nous remarquons que tout $f \in \text{End } G$ d'un groupe $(G, \cdot)$ induit un hyperhomomorphisme fort sur les P-hypergroupes $\langle G, *^P \rangle$, $\langle G, *^{f(P)} \rangle$ pour tous les sous-ensembles $P \subset G$. De même, tout automorphisme donne un hyperisomorphisme. Dans le cas particulier où $f(P) = P$, nous avons respectivement un hyperenedomorphisme ou un hyperautomorphisme de $\langle G, *^P \rangle$. Comme un exemple du dernier cas nous avons le suivant: Si $P \subset G$, alors tout élément x du centralisateur de P donne un automorphisme intérieur $f_x: g \to x^{-1}gx$ qui est un hyper-automorphisme du P-hypergroupe $\langle G, *^P \rangle$.

C. Cyclité des P-hypergroupes

Dans ce qui suit nous noterons par h^ν la ν-ième puissance de l'élément h dans le groupe $(G, \cdot)$ et par $h^{[\nu]}$ la ν-ième puissance de h dans l'hypergroupe $\langle G, *^P \rangle$.

Dans les P-hypergroupes nous remarquons que

$$x^{[\nu]} = x(Px)^{\nu-1}\,, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}\,.$$

De même, si $Z(G)$ est le centre de G et $P \subset Z(G)$, alors $x^{[\nu]} = x^\nu P^{\nu-1}$.

Aussi, si $P \lhd G$, alors $x^{[\nu]} = x^{[\nu]}P$ (voir [6]).

Theorème 1. Soit G un groupe fini non abélien et $P \subset Z(G)$. Alors le P-hypergroupe $\langle G, *^P \rangle$ n'est par cyclique.

Démonstration Nous supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un générateur x de $\langle G, *^P \rangle$. Tout d'abord nous remarquons que $x \notin Z(G)$, puisque si $x \in Z(G)$ alors tout élément de l'ensemble $G \setminus Z(G)$ n'appartient pas aux puissances de x. Considérons un élément y de l'ensemble $G \setminus Z(G)$ tel que $yx \neq xy$. Alors $y \neq x^\nu, \forall \nu$ puisque s'il était $y = x^\nu$ pour un certain ν alors $yx = x^{\nu+1} = xy$ ce qui est contraire à notre hypothèse.

Nous supposons qu'il existe un nombre naturel k tel que

$$y \in x^{[k]} = x^k P^{k-1} \subset x^k\, Z(G)$$

par conséquent, il existe un élément q de $Z(G)$ tel que $y = x^k q$.

Or $xy = xx^k q = x^{k+1} q = x^k q x = yx$ c'est qui est absurde.

Théorème 2. Soit G un groupe non abélien et $P \lhd G$. Alors le P-hypergroupe $\langle G, *^P \rangle$ est cyclique si et seulement si le groupe G/P est cyclique.

Démonstration. Supposons que G/P soit cyclique avec générateur xP. Or pour un certain naturel k nous avons

$$\{xP, x^2P, \ldots, x^kP\} = G/P\,.$$

Par conséquent,

$$x^{[1]} \cup \ldots \cup x^{[k]} = \{x, \ldots, x^k\} P = G$$

donc l'hypergroupe $\langle G, *^P \rangle$ soit cyclique.

Supposons maintenant que G/P ne soit pas cyclique tandis que $\langle G, *^P \rangle$ soit cyclique. Alors il existe $x \in G$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$G = x^{[1]} \cup \ldots \cup x^{[k]} = (xP) \cup \ldots \cup (xP)^k$$

c'est-à-dire, l'élément xP de l'ensemble G/P est un générateur de G/P, ce qui est absurde.

Théorème 3. Soit G un groupe non abélien et $P \lhd G$ avec $P \subsetneqq G$. Alors le P-hypergroupe $\langle G, *^P \rangle$ n'est pas cyclique monopuissant.

Démonstration. Puisque $P \subsetneqq G$ on a $|G/P| > 1$. Pour tout élément x et pour toute puissance k, le $x^{[k]} = x^k P$ est seulement une et une seule classe dans G/P, ce qui entraîne qu'il ne soit pas possible d'être égal à G.

D. Une classe spéciale de P-hypergroupes cycliques

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et P un sous-ensemble non vide de G. Les plus petites, par rapport à la dimension, non triviales hyperopérations sont les 2-dimensionnelles, c'est-à-dire lorsque $|P| = 2$. Plus intéressante et plus simple est le cas où nous avons $P = \{e, p\}$, c'est-à-dire lorsque l'un parmi les deux éléments de P est l'élément neutre. Supposons que $(G, \cdot)$ est un groupe cyclique, alors $\langle G, *^P \rangle$ est un P-hypergroupe cyclique. Quelques théorèmes concernant ce cas peuvent être trouvés dans le travail [5]. Parmi ces théorèmes le plus essentiel est le suivant:

Théorème. Soit le P-hypergroupe cyclique $\langle G_n, *^P \rangle$ où $|G_n| = n$, $P = \{e, a^k\}$ et où l'élément a est un générateur de G_n. Alors l'élément a^λ est un générateur si et seulement si $(\lambda, k, n) = 1$.

Pour les hypergroupes cycliques monopuissants de ce type il existe une réponse complète donnée par le théorème suivant:

Théorème. L'hypergroupe ci-dessus est cyclique monopuissant si et seulement si $(k, n) = 1$, et dans ce cas tout élément de G_n est un générateur de $\langle G_n, *^P \rangle$ de période n.

Pour la vérification des résultats connus et pour la recherche des nouveaux problèmes, nous avons élaboré un programme (voir [3]) à l'ordinateur à l'aide duquel on a obtenu des tableaux comme le suivant:

	20		20				20		20		20		20				20		20
20	11	8	8	8	8	8	8	8	11	11	8	8	8	8	8	8	8	11	20
	8		8		8		8		11		8		8		8		8		11
20	8	8	11	8	8	8	11	8	8	11	8	8	8	11	8	8	20	8	8
	8		8		8		8		8		8		8		8		8		8
	8	8	8	8		8	8	8	8		8	8	8	8		8	8	8	8
	8		8		8		11		8		8		8		8		11		8
20	8	8	11	8	8	11	11	8	8	11	8	8	20	8	8	8	8	8	8
	8		8		8		8		8		8		8		8		8		8
20	11	11	8	8	8	8	8	8	11	11	20	8	8	8	8	8	8	8	8
	11		11				11		11		11		11				11		11
20	8	8	8	8	8	8	8		20	11	11	8	8	8	8	8	8	11	11
	8		8		8		8		8		8		8		8		8		8
20	8	8	8	8	8	8	20	8	8	11	8	8	11	11	8	8	11	8	8
	8		11		8		8		8		8		11		8		8		8
	8	8	8			8	8	8	8		8	8	8	8		8	8	8	8
	8		8				8		8		8		8		8		8		8
20	8	8	20	8	8	11	8	8	8	11	8	8	11	8	8	8	11	8	8
	11		8		8		8		8		11		8		8		8		8
20	20	11	8	8	8	8	8	8	8	11	11	8	8	8	8	8	8	8	11

Tableau G_{20}

Ce tableau se rapporte aux P-hypergroupes $\langle G_{20}, *^P\rangle$ où $(G_{20}, \cdot)$ est le groupe cyclique d'ordre 20 avec pour élément neutre e, générateur a et $P = \{e, a^k\}$. Nous avons ici $k = 0, 1, 2, \ldots, 19$ c'est-à-dire nous comprenons aussi le cas trivial où $P = \{e\}$. Dans la colonne $k + 1$ se présentent consécutivement les périodes des éléments $e, a, \ldots, a^{19}$ du P-hypergroupe cyclique $\langle G_{20}, *^P\rangle$, $P = \{e, a^k\}$. Si l'élément correspondant n'est pas un générateur, alors ce tableau a un intervalle vide.

Nous terminons ce travail en suggérant quelques questions ouvertes sur les P-hypergroupes cycliques ci-dessus:

a) Si l'élément a^λ est un générateur de période μ de l'hypergroupe $\langle G_n, *^P\rangle$, $P = \{e, a^k\}$, alors l'élément a^k est-il un générateur de même période μ de l'hypergroupe $\langle G_n, *^P\rangle$, $P = \{e, a^\lambda\}$?

b) Sous quelles conditions le P-hypergroupe $\langle G_n, *^P\rangle$, $P = \{e, a^k\}$ est-il cyclique avec période? Dans ce cas, quelle est sa période? (Note: à cette question les auteurs ont déjà donné une réponse, pour un grand nombre de P-hypergroupes).

c) Pour tous les P-hypergroupes cycliques $\langle G_n, *^P\rangle$, $P = \{e, a^k\}$, $k = 0, \ldots, n$: où obtient on la période minimale? Quelle est cette période? Nous notons que cette période ϱ doit satisfaire la condition $\varrho(\varrho + 1) \geqq 2n$.

References

[1] Corsini, P.: Sur les homomorphismes d'hypergroupes, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. *52*, p. 117—140 (1974).

[2] Konguetsof, L.: Sur les hypermonoïdes, Bull. Soc. Math. Belgique, t. XXV, p. 211—224 (1973).

[3] Konguetsof, L. - Vougiouklis, Th.: Structures algébriques à opérations multiformes, Gr. Sch. of Ind. St. Piraeus (en Grec) p. 77—91, (1982).
[4] Marty, F.: Sur une généralisation de la notion de groupe, VIII[e] Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm, p. 45—49 (1934).
[5] Vougiouklis, Th.: Cyclicity in a Special Class of Hypergroups, Acta Un. Car.-Math. et Ph., V. *22*, No 1, p. 3—6 (1981).
[6] Vougiouklis, Th.: Generalization of *P*-hypergroups, preprint (1985), Abstracts Amer. Math. Soc., March 1985, 37, V. *6*, N 2, 85T-20-63, p. 234.
[7] Wall, H. S.: Hypergroups, Amer. J. of Math., Vol. *59*, p.77--98 (1937).