Alena Šolcová

Několik cest k minimalizaci výrokových forem

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 59 (2014), No. 3, 246--250

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144029`

Několik cest k minimalizaci výrokových forem

Tento příspěvek věnuji především Vítu Salákovi a Matěji Šolcovi, aby složité problémy v budoucnosti řešili jednoduše a s nadhledem.

Alena Šolcová, Praha

1. Úvod

Řešení matematických problémů je spojeno s abstrahováním a formalizací úloh, které jsou vyjádřeny v přirozeném jazyce. Už ve středověku byly ke zjednodušení těchto formálních vyjádření používány diagramové a mechanické metody. Ve druhé polovině 20. století se minimalizační metody staly velmi potřebnými a důležitými v rozvíjející se informatice.

V příspěvku zmíníme především metodu Maurice Karnaugha, který použil k minimalizaci výrokových forem nový způsob zobrazení tabulky pravdivostních hodnot výrokové formy. Uveřejnil ji v článku nazvaném *The map method for synthesis of combinational logic circuits* [2] v roce 1953. Karnaughovy mapy se dnes široce užívají k minimalizaci forem nejen ve výrokové logice a v Booleově algebře, ale i v dalších aplikacích.

2. Metody minimalizace

Výrokové formule (logické funkce) můžeme vyjádřit různými způsoby, např.

- tabulkou pravdivostních hodnot
- výrazem, kde jsou symboly pro výrokové proměnné spojeny symboly logických operací
- přirozenými čísly, např. v desítkové nebo dvojkové soustavě
- mapami (Svobodova nebo Karnaughova mapa)

Doc. RNDr. Alena Šolcová, Ph.D., Katedra aplikované matematiky, Fakulta informačních technologií, České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 9, 160 00 Praha 6, e-mail: alena.solcova@fit.cvut.cz

2.1. Tabulky pravdivostních hodnot

Tabulky pravdivostních hodnot můžeme použít k zápisu formule dané v libovolném tvaru, v němž je užito operací klasické výrokové logiky. Po analýze tabulky můžeme výrokovou formuli zapsat **v úplném disjunktivním normálním tvaru**. Formule je v **disjunktivním normálním tvaru**, když je disjunkcí mintermů, kde minterm ve výrokové logice znamená konjunkci literálů (a je-li x výroková proměnná, tak jí určené literály jsou právě x a její negace). Disjunktivní normální tvar je úplný, jestliže se v každém mintermu vyskytují všechny proměnné formule.

2.2. Úpravy výrazů

K úpravám směřujícím ke zjednodušování formulí se ve výrokové logice a booleovské algebře užívají především tato tvrzení: Věta o disjunkci $(A \vee \neg A)$ a její duální tvar, distributivní zákony a de Morganovy zákony. Znak $\neg$ je operátor negace a $\vee$ je operátor disjunkce. Disjunkce $(A \vee \neg A)$ má vždy pravdivostní hodnotu 1. De Morganovy zákony jsou pravidla, která lze vyjádřit v přirozeném jazyce takto: Negaci konjunkce několika výroků lze vyjádřit jako disjunkci negací jednotlivých výroků. Negace disjunkce několika výroků je konjunkce negací jednotlivých výroků. Pro dva výroky P a Q mohou být pravidla formálně zapsána takto: $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$, $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$, kde $\wedge$ je operátor konjunkce.

Znak $\Leftrightarrow$ je metalogický symbol vyjadřující, že jednu formuli lze nahradit druhou a její pravdivostní ohodnocení se nezmění. De Morganovy zákony jsou příkladem obecnější vlastnosti výrokových formulí – duality. Společně s ostatními větami dovolují zjednodušovat výrokové formule v programech a při navrhování elektrických obvodů a sítí.

2.3. Vyjádření formule ve dvojkové nebo desítkové soustavě

Disjunktivní normální tvar formule lze vyjádřit booleovsky pomocí pravdivostních hodnot z tabulky, viz [1]. Pokud v tabulce pravdivostních hodnot má formule $X(A,B,C)$ ohodnocení 1 pro prvotní ohodnocení: 000, 010, 111, pak zapíšeme $X(A,B,C) = \Sigma(000, 010, 111)$ nebo v desítkové soustavě $X(A,B,C) = \Sigma(0,2,7)$.

2.4. Karnaughova mapa

Minimalizace pomocí Karnaughovy mapy
Upravujme formuli v disjunktivním normálním tvaru:

$$Q = (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z).$$

Tabulka pravdivostních hodnot pro Q má ve výsledném sloupci třikrát hodnotu 1:

x	y	z	Q
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Karnaughova mapa (K-mapa) pro Q:

$$Q_{\min} = Q_1 \vee Q_2$$
$$Q_1 = \neg y \wedge \neg z$$
$$Q_2 = \neg x \wedge \neg z$$

	$\neg \boldsymbol{y}$	$\neg \boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{y}$
	$\neg \boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{z}$	$\neg \boldsymbol{z}$
$\neg \boldsymbol{x}$	1	0	0	1
$\boldsymbol{x}$	1	0	0	0

Buňky v K-mapě označené 1 odpovídají těm řádkům v tabulce pravdivostních hodnot formule Q, v nichž ve výsledném sloupci Q rovněž hodnota 1. Pro minimalizaci spojujeme buňky po dvojicích, čtveřicích, po 2^n-ticích. Přitom se skupiny (2^n-tice) mohou překrývat. Připomeňme, že K-mapa není jen rovinná. Je to rovinné pokrytí toroidu. (*Toroid* je objekt, který v trojrozměrném prostoru vypadá jako „povrch pneumatiky“.) Buňky lze spojovat i přes okraj, jako by tabulka sousedila s vlastními kopiemi.

Mapa pro 3 proměnné:

$$\begin{aligned} V = {} & (\ \ A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee \\ & (\ \ A \wedge \neg B \wedge \ \ C) \vee \\ & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee \\ & (\neg A \wedge \ \ B \wedge \neg C) \vee \\ & (\neg A \wedge \neg B \wedge \ \ C) \vee \\ & (\neg A \wedge \ \ B \wedge \ \ C) \end{aligned}$$

$$V = \neg \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{B}$$

		$\boldsymbol{B}$			
	1	1	0	1	
$\boldsymbol{C}$	1	1	0	1	
			$\boldsymbol{A}$		

Karnaughovu mapu můžeme považovat za speciální uspořádání tabulky pravdivostních hodnot. V K-mapách se používají booleovské proměnné 0 a 1 a jsou převedeny obvykle z tabulky pravdivostních hodnot. Použití K-mapy je názorné. Při minimalizaci seskupujeme faktory se společnými členy a vylučujeme ty členy, které pravdivostní hodnotu výsledku neovlivňují. Je to grafická technika, která je vhodná nejvýše pro šest proměnných.

Umožňuje:

- Konstruovat Karnaughovy mapy pro minimalizaci logické funkce
- Určovat minimální logickou funkci z Karnaughovy mapy

Kdo metodu minimalizace výrokových forem pomocí Karnaughovy mapy objevil?

Metoda je pojmenována podle amerického fyzika Maurice Karnaugha. Byla však nezávisle objevena Edwardem W. Veitchem v roce 1952.

Maurice Karnaugh (*1924 v New Yorku) studoval v letech 1944–1948 matematiku a fyziku na City College v New Yorku. Odtud přešel na Yaleovu univerzitu, kde studium postupně dokončil. Bakalářem (BSc) se stal v roce 1949, Master of Science obhájil roku 1950 a doktorát (PhD) ve fyzice získal po obhajobě práce *The theory of magnetic resonance and lambda-type doubling in nitric-oxide* v roce 1952. Poté působil v Bellových laboratořích. „Karnaughovu mapu“ použil v roce 1953 ke zjednodušení digitálních elektronických obvodů.

Škola v New Yorku byla pro talentované studenty tradičně vhodné motivující prostředí. Na City College studovali fyziku např. také tři nositelé Nobelovy ceny: Robert Hofstadter v roce 1961, Arno Penzias v roce 1978 a Leon Lederman v roce 1988. Albert Einstein zde měl v roce 1921 první z řady přednášek ve Spojených státech. Prostředí Bellových laboratoří (Bell Labs) v New Yersey, kde Karnaugh působil po studiu, bylo rovněž tvůrčí a inspirující v mnoha oblastech. Výzkumníci se zde věnovali radiové astronomii, vývoji tranzistorů, laserům, snímačům CCD, teoretické informatice, vývoji operačního systému UNIX, programovacímu jazyku C a C++. Za práce v Bellových laboratořích bylo uděleno sedm Nobelových cen a dvě Turingovy ceny. A právě v Bellových laboratořích pracoval Karnaugh 4 roky v letech 1952–56. Poté přešel do IBM, kde zůstal do roku 1989. Zabýval se zde sítěmi. V roce 1976 byl Karnaugh zvolen IEEE Fellow a nakonec v letech 1980–1999 působil na newyorské polytechnice ve Westchesteru.

Edward W. Veitch (*1924) je americký počítačový odborník. Do roku 1949 studoval fyziku na Harvardově univerzitě. V roce 1952 v článku *A chart method for simplifying truth functions* popisuje Veitch grafický postup k optimalizaci logických obvodů [4]. O rok později (1953) tuto metodu použil a popsal Maurice Karnaugh, a tak se metoda ve spojení s jeho jménem rozšířila.

Původní Veitchův diagram vychází ze známého předpokladu, že logickou funkci lze vyjádřit pomocí bodů ve vrcholech n-dimenzionální krychle, kde každá proměnná je vyjádřena jinou dimenzí krychle. Tři proměnné mohou být vyjádřeny pomocí trojdimenzionální krychle s osmi vrcholy. Pak se porovnávají čtveřice na protilehlých stranách krychle. Pro čtyři, pět nebo šest proměnných je zobrazení složitější, viz [5].

2.5. Svobodova mapa

Antonín Svoboda navrhl a používal jiné, zdánlivě podobné, zobrazení tabulky pravdivostních hodnot. Svobodova mapa je ale indexována binárně, proto se sousední pole nemusí lišit pouze v jedné proměnné (jako je tomu u Kaurnaughovy mapy). Mapa v této podobě není vhodná pro minimalizaci funkce. Hodí se však pro snadné nalezení inverzní funkce, kterou dostaneme rotací mapy o 180°.

Antonín Svoboda – tvůrce prvního
československého počítače SAPO

	$\neg C$	C	$\neg C$	C
	$\neg B$	$\neg B$	B	B
$\neg A$	000	001	010	011
A	100	101	110	111

3. Závěr

Karnaughovým mapám předcházely Eulerovy a Vennovy diagramy [6], Marquandovy pravoúhelníkové logické diagramy [3] a známé diagramy Lewise Carrolla. Diagramatické a mechanické metody k minimalizaci výrazů byly užívány jistě od středověku (např. Raymundus Lullus na přelomu 13. a 14. století navrhl mechanický přístroj k řešení logických problémů). Moderní systematické metody se rozvíjely až od počátku padesátých let 20. století, ale skutečně v praxi byla např. Karnaughova mapa užívána později, v osmdesátých letech. Ve druhé polovině sedmdesátých let vznikaly pro minimalizaci forem počítačové programy, nejznámější z nich je minimizer Espresso. Jiná minimalizační alternativa je použití metody Quina-McCluskeyho, která je založena na opakovaném uplatňování věty $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$.

L i t e r a t u r a

[1] Hoernes, G. E., Heilweil, M. E.: *Úvod do Booleovy algebry a navrhování logických obvodů.* SNTL, Praha, 1969, 121–235. (Přeložil J. Petrželka.)

[2] Karnaugh, M.: *The map method for synthesis of combinational logic circuits.* AIEE Committee on Technical Operations for Presentation at the AIEE Summer General Meeting, Atlantic City, NJ, June 15–19, 1953, 593–599.

[3] Shannon, C. E.: *A symbolic analysis of relay and switching circuits.* Trans. Amer. Inst. Electr. Engrg. (1938), 471–495.

[4] Veitch, E. W.: *A chart method for simplifying truth functions.* Transactions of the 1952 ACM Annual Meeting, ACM Annual Conference/Annual Meeting, Pittsburgh, ACM, New York, 1952, 127–133.

[5] Veitch, E. W.: *A proof concerning infinite nets of logic elements without feedback.* FOCS (1965), 162–167.

[6] Venn, J.: *Symbolic logic.* MacMillan, London, 1881.