Hans Koeppler

Das jährliche mathematische Risiko der Versicherungen, bei welchen zwei von einander verschiedene Ereignisse die vorzeitige Auflösung herbeiführen können

Aktuárské vědy, Vol. 2 (1931), No. 2, 84–92

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144541

By an easy calculation we obtain the required coefficients

$$a_\lambda = \frac{(n+m)(s+1) - 2(\lambda+1)(n+m+\lambda)}{2(n+m+2\lambda)(n+m+2\lambda+2)} \cdot (n-m)\,\omega =$$

$$= \frac{(n+m)(s-2\lambda-1) - 2\lambda(\lambda+1)}{2(n+m+2\lambda)(n+m+2\lambda+2)}(n-m)\,\omega$$

$$a_{\lambda-1} = -\frac{(s+m+n+\lambda)(m+\lambda)\lambda(s-\lambda)}{2(n+m+2\lambda)(n+m+2\lambda+1)}\,\omega^2$$

(To be continued.)

Das jährliche mathematische Risiko der Versicherungen, bei welchen zwei von einander verschiedene Ereignisse die vorzeitige Auflösung herbeiführen können.

Von *Hans Koeppler*, Berlin.

Unterliegen die drei Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 der Bedingung

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

und sind eine große Zahl s Beobachtungen angestellt worden, so besteht nach dem Satze von Bernoulli die Wahrscheinlichkeit

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s^2 p_1 p_2 p_3}}\, e^{-\frac{1}{2s p_1 p_2 p_3}\left\{p_2(1-p_2)\sigma_1^2 + p_1(1-p_1)\sigma_2^2 + 2p_1 p_2 \sigma_1 \sigma_2\right\}},$$

daß die Abweichung $\pm\,\sigma_1$ von der wahrscheinlichen Ereignißzahl sp_1 und die Abweichung $\pm\,\sigma_2$ von der wahrscheinlichen Ereignißzahl sp_2 stattfinden wird. Setzen wir

$$\frac{1-p_2}{2sp_1p_3} = a_{11}, \quad \frac{1-p_1}{2sp_2p_3} = a_{22} \quad \text{und} \quad \frac{1}{sp_3} = 2a_{12},$$

sowie

$$\frac{1}{4s^2p_1p_2p_3} = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{4s^2p_1p_2p_3^2} - \frac{1}{4s^2p_3^2} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \Delta,$$

so können wir der Wahrscheinlichkeit auch die bekannte allgemeine Form geben:

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\sqrt{A}}{\pi} e^{-(a_{11}\sigma_1^2 + a_{22}\sigma_2^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2)}.$$

Wir betrachten die beiden Versicherungsarten, deren aufgezinste Risikoprämien nach den Formeln

$$\Pi = p_1 (K - V) - p_2 V \qquad \text{(Form I)}$$

und

$$\Pi' = p_1(K_1 - V) + p_2(K_2 - V) \qquad \text{(Form II)}$$

berechnet werden. In diesen bedeuten K, K_1, K_2 die während des betrachteten Versicherungsjahrs versicherten Leistungen und V das am Ende des Versicherungsjahrs vorhandene Deckungskapital. Bei Auftreten der Abweichungen σ_1 und σ_2 von den wahrscheinlichen Ereignißzahlen sp_1 und sp_2 ist in der Voraussetzung s gleichartiger Verträge der Gewinn oder Verlust

a) für die Versicherungsform I:

$$\begin{aligned} N(\sigma_1, \sigma_2) &= (sp_1 + \sigma_1) K - (sp_2 + \sigma_2) V - s\Pi \\ &= \sigma_1(K - V) - \sigma_2 V = c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2 \end{aligned}$$

b) für die Versicherungsform II:

$$\begin{aligned} N'(\sigma_1, \sigma_2) &= (sp_1 + \sigma_1)(K_1 - V) + (sp_2 + \sigma_2)(K_2 - V) - s\Pi \\ &= \sigma_1(K_1 - V) + \sigma_2(K_2 - V) = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2. \end{aligned}$$

Ein Verlust liegt vor, wenn $c_1\sigma_1 \mp c_2\sigma_2 > 0$, dagegen ist ein Gewinn vorhanden, wenn $c_1\sigma_1 \mp c_2\sigma_2 < 0$.

Im ersten Falle hat die Summe der aufgezinsten Risikoprämien zur Deckung der Leistungen nicht ausgereicht, im zweiten Falle dagegen bleibt ein Teil der Summe der aufgezinsten Risikoprämien übrig.

Überträgt man die von Hattendorf[1]) und Wittstein[2]) gegebene Berechnung des mathematischen Risikos auf diese schwierigeren Fälle, so wird man als mathematisches Risiko des betrachteten Versicherungsjahrs die Integralausdrücke

$$R = \frac{\sqrt{A}}{\pi} \left[c_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_2 \int_{\frac{c_1}{c_2}\sigma_2}^{\infty} e^{-(a_{11}\sigma_1^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_{22}\sigma_2^2)} \sigma_1 \, d\sigma_1 - \right.$$

$$\left. c_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_1 \int_{-\infty}^{\frac{c_1}{c_2}\sigma_1} e^{-(a_{11}\sigma_1^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_{22}\sigma_2^2)} \sigma_2 \, d\sigma_2 \right] \qquad \text{(I)}$$

---

[1]) Über die Berechnung der Reserven und des Risico bei der Lebensversicherung, Rundschau der Versicherungen von Dr. E. A. Masins, Leipzig 1868.

[2]) Das mathematische Risiko der Versicherungsgesellschaften, Hannover 1885.

und

$$R' = \frac{\sqrt{A}}{\pi}\left[c_1\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma_2 \int\limits_{-\frac{c_2}{c_1}\sigma_2}^{\infty} e^{-(a_{11}\sigma_1^2+2a_{12}\sigma_1\sigma_2+a_{22}\sigma_2^2)}\sigma_1\,d\sigma_1 + \right.$$

$$\left. c_2\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma_1 \int\limits_{-\frac{c_1}{c_2}\sigma_1}^{\infty} e^{-(a_{11}\sigma_1^2+2a_{12}\sigma_1\sigma_2+a_{22})\,\sigma_2^2}\,\sigma_2\,d\sigma_2\right] \qquad \text{(II)}$$

ansehen können, die dem Zweck dienen, die Hoffnungswerte aller Gebahrungen zu berechnen, welche den Ungleichungen

$$\infty \geqq c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2 \geqq o \qquad (A)$$

und

$$\infty \geqq c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 \geqq o \qquad (B)$$

genügen. Diese Ausdrücke hatte der Verfasser bereits in seinen beiden Arbeiten „Risikoberechnungen bei mehr als zwei Ereignissen ein und desselben Zeitraums“[3]) und „Die Berechnung des jährlichen Risikos schwierigerer Versicherungsarten“[4]) dargestellt und ausgewertet. Einer späteren Untersuchung war die Erkenntniß vorbehalten, daß sich das mathematische Risiko unter Einhaltung der Ungleichungen (A) und (B) auch durch die einfacheren Ausdrücke

$$R = \frac{\sqrt{A}}{\pi}\left[c_1\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma_2 \int\limits_{\frac{c_2}{c_1}\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,\sigma_1\,d\sigma_1 - c_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_2 d\sigma_2\int\limits_{\frac{c_2}{c_1}\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,d\sigma_1\right] \qquad (1a)$$

oder

$$R = \frac{\sqrt{A}}{\pi}\left[c_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_1\,d\sigma_1\int\limits_{-\infty}^{\frac{c_1}{c_2}\sigma_1} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,d\sigma_2 - c_2\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma_1\int\limits_{-\infty}^{\frac{c_1}{c_2}\sigma_1} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,\sigma_2\,d\sigma_2\right], \qquad (1b)$$

sowie

$$R' = \frac{\sqrt{A}}{\pi}\left[c_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_1\,d\sigma_1\int\limits_{-\frac{c_1}{c_2}\sigma_1}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,d\sigma_2 + c_2\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma_1\int\limits_{-\frac{c_1}{c_2}\sigma_1}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,\sigma_2\,d\sigma_2\right], \qquad (2a)$$

oder

$$R' = \frac{\sqrt{A}}{\pi}\left[c_1\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma_2\int\limits_{-\frac{c_2}{c_1}\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\sigma_1\,d\sigma_1 + c_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_2\,d\sigma_2\int\limits_{-\frac{c_2}{c_1}\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,d\sigma_1\right], \qquad (2b)$$

in denen

$$a_{11}\sigma_1^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_{22}\sigma_2^2 = f(\sigma_1, \sigma_2)$$

[3]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band 63, Heft 4, Leipzig 1915.

[4]) Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 11, Bern 1916.

zur Abkürzung gesetzt wurde, darstellen lasse. Wir haben nun eine Rei he von Integrationen zu erledigen.

Für das Integral des Ausdrucks (1a)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma_2 \int\limits_{\frac{c_2}{c_1}\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,\sigma_1\,d\sigma_1$$

setzen wir, zur Abkürzung $c_2/c_1 = \alpha$ schreibend,

$$\int\limits_0^{\infty} d\sigma_2 \int\limits_{\alpha\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,\sigma_1\,d\sigma_1 + \int\limits_{-\infty}^{0} d\sigma_2 \int\limits_{\alpha\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,\sigma_1\,d\sigma_1 =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} d\sigma_2 \int\limits_{\alpha\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma,\sigma_2)}\,\sigma_1 d\sigma_1 + \int\limits_0^{\infty} d\sigma_2 \int\limits_{-\alpha\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,-\sigma_2)}\,\sigma_1\,d\sigma_1.$$

Wenden wir darauf die Substitution

$$\sigma_1 = t\,.\,\sigma_2,\quad d\sigma_1 = \sigma_2\,dt$$

an, so folgt ferner

$$\int\limits_0^{\infty} \sigma_2^2\,d\sigma_2 \left[\int\limits_{\alpha}^{\infty} e^{-(a_{11}t^2+2a_{12}t+a_{22})\,\sigma_2^2} t\,dt + \int\limits_{-\alpha}^{\infty} e^{-(a_{11}t^2-2a_{12}t+a_{22})\,\sigma_2^2}\,t\,dt = \right.$$

$$= \left[\int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{t\,dt}{(a_{11}t^2+2a_{12}t+a_{22})^{3/2}} + \int\limits_{-\alpha}^{\infty} \frac{t\,dt}{(a_{11}t^2-2a_{12}t+a_{22})^{3/2}}\right] \int\limits_0^{\infty} e^{-u^2}\,u^2\,du.$$

Die beiden in den Klammern stehenden Integrale ermitteln wir durch Anwendung des leicht berechenbaren allgemeinen Integrals

$$\int \frac{t\,dt}{(a_{11}t^2 \pm 2a_{12}t + a_{22})^{3/2}} = -\frac{a_{22} \pm a_{12}t}{A\sqrt{a_{11}t^2 \pm 2a_{12}t + a_{22}}} + C.$$

Um den Wert für $t = \infty$ festzustellen, dividieren wir Zählen und Nenner des Ergebnisses durch t und setzen darauf $t = \infty$. Wir erhalten so

$$\mp \frac{a_{12}}{A\sqrt{a_{11}}}.$$

Für die unteren Grenzen α und $-\alpha$ ergibt sich bei beiden Integralen der gleiche Wert

$$-\frac{a_{22} + a_{12}\alpha}{A\sqrt{a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha + a_{12}}}.$$

Da $\int\limits_0^{\infty} e^{-u^2}u^2\,du = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$ ist, so erhält man, wenn man noch c_2/c_1 für α setzt,

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{a_{22}c_1+a_{12}c_2}{A\sqrt{a_{11}c_2^2+2a_{12}c_1c_2+a_{22}c_1^2}}. \tag{3}$$

Das zweite Integral des Ausdrucks ($1a$)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_2\,d\sigma_2\int_{\frac{c_2}{c_1}\sigma_2}^{\infty}e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,d\sigma_1$$

formen wir um in

$$\int_{0}^{\infty}\sigma_2\,d\sigma_2\int_{\frac{c_2}{c_1}\sigma_2}^{\infty}e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,d\sigma_1+\int_{-\infty}^{0}\sigma_2 d\sigma_2\int_{\frac{c_2}{c_1}\sigma_2}^{\infty}e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,d\sigma_1=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\sigma_2 d\sigma_2\int_{\alpha\sigma_2}^{\infty}e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,d\sigma_1-\int_{0}^{\infty}\sigma_2 d\sigma_2\int_{-\alpha\sigma_2}^{\infty}e^{-f(\sigma_1,-\sigma_2)}\,d\sigma_1$$

und wenden wieder die Substitution $\sigma_1=t\sigma_2$ an.

Wir erhalten dadurch

$$\int_{0}^{\infty}\sigma_2^2\,d\sigma_2\left[\int_{\alpha}^{\infty}e^{-(a_{11}t^2+2a_{12}t+a_{22})\sigma_2^2}\,dt-\int_{-\alpha}^{\infty}e^{-(a_{11}t^2-2a_{12}t+a_{22})\sigma_2^2}\,dt\right]=$$

$$=\left[\int_{\alpha}^{\infty}\frac{dt}{(a_{11}t^2+2a_{12}t+a_{22})^{3/2}}-\int_{-\alpha}^{\infty}\frac{dt}{(a_{11}t^2-2a_{12}t+a_{22})^{3/2}}\right]\int_{0}^{\infty}e^{-u^2}u^2\,du.$$

Mit Hilfe des allgemeinen Integrals

$$\int\frac{dt}{(a_{11}t^2\pm 2a_{12}t+a_{11})^{3/2}}=\frac{\pm a_{12}+a_{11}t}{A\sqrt{a_{11}t^2\pm 2a_{12}t+a_{22}}}+C$$

finden wir nach Division des Zählers und Nenners des Ergebnisses durch t, daß letzteres für $t=\infty$ den Wert

$$\frac{\sqrt{a_{11}}}{A}$$

annimmt. Für die untere Grenze α des ersten Integrals folgt

$$\frac{a_{12}+a_{11}\alpha}{A\sqrt{a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha+a_{22}}};$$

für die untere Grenze $-\alpha$ des zweiten Integrals ergibt sich

$$-\frac{a_{12}+a_{11}\alpha}{A\sqrt{a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha+a_{22}}}.$$

Ersetzt man noch α durch seinen Wert c_2/c_1, so erhält man für das ganze Integral

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{12}c_1+a_{11}c_2}{A\sqrt{a_{11}c_2^2+2a_{12}c_1c_2+a_{22}c_1^2}}. \tag{4}$$

Führen wir nun die Werte (3) und (4) in den Ausdruck ($1a$) ein, so erhalten wir nach einfacher Umformung für das mathematische Risiko

$$R=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{a_{11}c_2^2+2a_{12}c_1c_2+a_{22}c_1^2}{A}}. \tag{I}$$

Mit Rücksicht auf die Beschränkung des zur Verfügung stehenden Raumes wollen wir uns im Folgenden auf die notwendigsten Angaben beschränken.

Durch entsprechende Berechnungen finden wir bei Anwendung der Substitution $\sigma_2=t\,.\,\sigma_1$, $d\sigma_2=\sigma_1 dt$ für das erste Integral des Ausdrucks ($1b$)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_1 d\sigma_1\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{c_2}\sigma_1}e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}d\sigma_2=\int\limits_{0}^{\infty}\sigma_1 d\sigma_1\int\limits_{-\infty}^{a\sigma_1}e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}d\sigma_2-\int\limits_{0}^{\infty}\sigma_1 d\sigma_1\int\limits_{-\infty}^{-a\sigma_1}e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}d\sigma_2=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\sigma_1^2 d\sigma_1\left[\int\limits_{-\infty}^{a}e^{-(a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2)\sigma_1^2}dt-\int\limits_{-\infty}^{-a}e^{-(a_{11}-2a_{12}t+a_{22}t^2)\sigma_1^2}dt\right]=$$

$$=\left[\int\limits_{-\infty}^{a}\frac{dt}{(a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2)^{3/2}}-\int\limits_{-\infty}^{-a}\frac{dt}{(a_{11}-2a_{12}t+a_{22}t^2)^{3/2}}\right]\int\limits_{0}^{\infty}e^{-u^2}u^2\,du=$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{12}+a_{22}a}{A\sqrt{a_{11}+2a_{12}a+a_{22}a^2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{12}c_2+a_{22}c_1}{A\sqrt{a_{11}c_2^2+2a_{12}c_1c_2+a_{22}c_1^2}}. \tag{5}$$

Für das zweite Integral des Ausdrucks ($1b$) folgt analog

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\sigma_1\int\limits_{-\infty}^{a\sigma_1}e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\sigma_2\,d\sigma_2=\int\limits_{0}^{\infty}d\sigma_1\int\limits_{-\infty}^{a\sigma_1}e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\sigma_2\,d\sigma_2+\int\limits_{0}^{\infty}d\sigma_1\int\limits_{-\infty}^{-a\sigma_1}e^{-f(-\sigma_1,\sigma_2)}\sigma_2\,d\sigma_2=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\sigma_1^2\,d\sigma_1\left[\int\limits_{-\infty}^{a}e^{-(a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2)\sigma_1^2}t\,dt+\int\limits_{-\infty}^{-a}e^{-(a_{11}-2a_{12}t+a_{22}t^2)\sigma_1^2}t\,dt\right]=$$

$$=\left[\int\limits_{-\infty}^{a}\frac{t\,dt}{(a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2)^{3/2}}+\int\limits_{-\infty}^{-a}\frac{t\,dt}{(a_{11}-2a_{12}t+a_{22}t^2)^{3/2}}\right]\int\limits_{0}^{\infty}e^{-u^2}u^2\,du=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{11}+a_{12}a}{A\sqrt{a_{11}+2a_{12}a+a_{22}a^2}}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{11}c_2+a_{12}c_1}{A\sqrt{a_{11}c_2^2+2a_{12}c_1c_2+a_{22}c_1^2}}. \tag{6}$$

Durch Einsetzung der Werte (5) und (6) in den Ausdruck (1b) ergibt sich für das mathematische Risiko wiederum

$$R = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{a_{11}c_2^2 + 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_1^2}{A}}. \tag{I}$$

Das in (2a) auftretende Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_1 d\sigma_1 \int_{\frac{c_1}{c_2}\sigma_1}^{\infty} e^{-f(\sigma_2,\sigma_2)}\, d\sigma_2$$

berechnen wir mit Anwendung der Substitution $\sigma_2 = t\sigma_1$, $d\sigma_2 = \sigma_1\, dt$ auf folgende Weise:

$$\int_0^{\infty}\sigma_1 d\sigma_1 \int_{-a\sigma_1}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\, d\sigma_2 - \int_0^{\infty}\sigma_1 d\sigma_1 \int_{a\sigma_1}^{\infty} e^{-f(-\sigma_1,\sigma_2)}\, d\sigma_2 =$$

$$= \int_0^{\infty}\sigma_1^2 d\sigma_1 \left[\int_{-a}^{\infty} e^{-(a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2)\sigma_1^2}\, dt - \int_a^{\infty} e^{-(a_{11}-2a_{12}t+a_{22}t^2)\sigma_1^2}\, dt\right] =$$

$$= \left[\int_{-a}^{\infty}\frac{dt}{(a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2)^{3/2}} - \int_a^{\infty}\frac{dt}{(a_{11}-2a_{12}t+a_{22}t^2)^{3/2}}\right]\int_0^{\infty} e^{-u^2}u^2\, du =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{22}a - a_{12}}{A\sqrt{a_{11}-2a_{12}a+a_{22}a^2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{22}c_1 - a_{12}c_2}{A\sqrt{a_{11}c_2^2 - 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_1^2}}. \tag{7}$$

Für das andere in (2a) vorkommende Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_1 \int_{-a\sigma_1}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,\sigma_2\, d\sigma_2$$

erhalten wir durch entsprechende Berechnungen

$$\int_0^{\infty} d\sigma_1 \int_{-a\sigma_1}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,\sigma_2\, d\sigma_2 + \int_0^{\infty} d\sigma_1 \int_{a\sigma_1}^{\infty} e^{-f(-\sigma_1,\sigma_2)}\,\sigma_2\, d\sigma_2 =$$

$$= \int_0^{\infty}\sigma_1^2 d\sigma_1 \left[\int_{-a}^{\infty} e^{-(a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2)\sigma_1^2}\, t\, dt + \int_a^{\infty} e^{-(a_{11}-2a_{12}t+a_{22}t^2)\sigma_1^2}\, t\, dt\right] =$$

$$= \left[\int_{-a}^{\infty}\frac{t\, dt}{(a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2)^{3/2}} + \int_a^{\infty}\frac{t\, dt}{(a_{11}-2a_{12}t+a_{22}t^2)^{3/2}}\right]\int_0^{\infty} e^{-u^2}u^2\, du =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{11} - a_{12}\alpha}{A\sqrt{a_{22}\alpha^2 - 2a_{12}\alpha + a_{11}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{11}c_2 - a_{12}c_1}{A\sqrt{a_{22}c_1{}^2 - 2a_{12}c_1c_2 + a_{11}c_2{}^2}}. \quad (8)$$

Durch Einführung der Werte (7) und (8) in den Ausdruck ($2a$) finden wir für diesen

$$R' = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{a_{22}c_1{}^2 - 2a_{12}c_1c_2 + a_{11}c_2{}^2}{A}}. \quad (\mathrm{II})$$

Das erste Integral des Ausdrucks ($2b$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_2 \int_{-\frac{c_2}{c_1}\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,\sigma_1\,d\sigma_1$$

lösen wir mit Anwendung der Substitution $\sigma_1 = t\sigma_2$, $d\sigma_1 = \sigma_2\,dt$. Die vornehmlichsten Stufen der Entwicklung sind

$$\int_0^{\infty} d\sigma_2 \int_{-\alpha\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,\sigma_1\,d\sigma_1 + \int_0^{\infty} d\sigma_2 \int_{\alpha\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\,-\sigma_2)}\,\sigma_1\,d\sigma_1 =$$

$$= \int_0^{\infty} \sigma_2{}^2\,d\sigma_2 \left[\int_{-\alpha}^{\infty} e^{-(a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22})\,\sigma_2{}^2}\,t\,dt + \int_{\alpha}^{\infty} e^{-(a_{11}t^2 - 2a_{12}t + a_{22})\,\sigma_2{}^2}\,t\,dt\right] =$$

$$= \left[\int_{-\alpha}^{\infty} \frac{t\,dt}{(a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22})^{3/2}} + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{t\,dt}{(a_{11}t^2 - 2a_{12}t + a_{22})^{3/2}}\right] \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,u^2\,du =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{22} - a_{12}\,\alpha}{A\sqrt{a_{11}\alpha^2 - 2a_{12}\alpha + a_{22}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{22}c_1 - a_{12}c_2}{A\sqrt{a_{11}c_2{}^2 - 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_1{}^2}}. \quad (9)$$

Das zweite Integral des Ausdrucks ($2b$) behandeln wir auf folgende Weise:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_2\,d\sigma_2 \int_{-\frac{c_2}{c_1}\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,d\sigma_1 =$$

$$= \int_0^{\infty} \sigma_2\,d\sigma_2 \int_{-\alpha\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\sigma_2)}\,d\sigma_1 - \int_0^{\infty} \sigma_2\,d\sigma_2 \int_{\alpha\sigma_2}^{\infty} e^{-f(\sigma_1,\,-\sigma_2)}\,d\sigma_1 =$$

$$= \int_0^{\infty} \sigma_2{}^2\,d\sigma_2 \left[\int_{-\alpha}^{\infty} e^{-(a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22})\,\sigma_2{}^2}\,dt - \int_{\alpha}^{\infty} e^{-(a_{11}t^2 - 2a_{12}t + a_{22})\,\sigma_2{}^2}\,dt\right] =$$

$$= \left[\int_{-\alpha}^{\infty} \frac{dt}{(a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22})^{3/2}} - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dt}{(a_{11}t^2 - 2a_{12}t + a_{22})^{3/2}}\right] \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,u^2\,du =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{11}\alpha - a_{12}}{A\sqrt{a_{11}\alpha^2 - 2a_{12}\alpha + a_{22}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{a_{11}c_2 - a_{12}c_1}{A\sqrt{a_{11}c_2^2 - 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_1^2}}. \tag{10}$$

Die Anwendung der Werte (9) und (10) auf den Ausdruck (2b) ergibt aber wiederum

$$R' = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{a_{11}c_2^2 - 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_1^2}{A}}. \tag{II}$$

Der geneigte Leser wird bemerken, daß die vorgelegten Darstellungen des mathematischen Risikos als recht einfach bezeichnet werden dürfen, wenn die verwendeten Integrale, deren Lösung die Hauptaufgabe dieser Arbeit bildet, einer Tafel bestimmter Integrale entnommen werden könnten.

Die einfachste Darstellung des mathematischen Risikos liefert aber die Formel von Wittstein

$$R = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-h^2u^2}\,u\,du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{h}.$$

Um diese auf die hier betrachteten Versicherungsarten anwenden zu können, hat man, wie der Verfasser schon in seinem ersten Aufsatz gezeigt hat, die Wahrscheinlichkeit der Funktion

$$u = c_1\sigma_1 \mp c_2\sigma_2$$

mittels der Wahrscheinlichkeit

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\sqrt{A}}{\pi}\,e^{-(a_{11}\sigma_1^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_{22}\sigma_2^2)}$$

zu ermitteln. Dies wird z. B. durch die Substitution

$$\sigma_1 = \frac{1}{c_1}(u \pm c_2\sigma_2), \quad d\sigma_1 = \frac{1}{c_1}\,du$$

und die Integration nach σ_2 zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ leicht erreicht. In der auf diese Weise entstehenden Wahrscheinlichkeit

$$P(u) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2u^2}$$

hat h den Wert

$$h = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{a_{22}c_1^2 \mp 2a_{12}c_1c_2 + a_{11}c_2^2}},$$

der die Zuverlässigkeit der Berechnungen bestätigt.