

Aktuárské vědy

Literatura

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 1, 38–42

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144651>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Ces valeurs sont tirées de la confrontation de James W. Glover.¹⁰⁾ Pour notre but il est légitime de prendre $l(\xi) = 0,28$. Alors les âges limites virtuels seront d'après (18) et (19) en première approximation

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 &= 74,2 + 18,63 \sqrt{\log 0,56D}, \\ \bar{\omega}_2 &= 38,5 + 50,49 \sqrt{\log 0,56D}.\end{aligned}$$

Ces valeurs sont portées dans le tableau II. Elle donne pour des valeurs choisies de $0,56D$ (colonne 1) les âges limites virtuels pour la table favorable (2) et défavorable (3).

II. Extrapolation de l'âge limite.

| $0,56D$ | $\bar{\omega}_1$ | $\bar{\omega}_2$ |
|-----------|------------------|------------------|
| 10^5 | 115,86 | 151,40 |
| 10^6 | 119,83 | 162,18 |
| 10^7 | 123,49 | 172,08 |
| 10^8 | 126,89 | 181,31 |
| 10^9 | 130,09 | 189,97 |
| 10^{10} | 133,11 | 198,16 |
| 10^{11} | 135,99 | 205,96 |
| 10^{12} | 138,74 | 213,40 |
| 10^{13} | 141,37 | 220,54 |
| 10^{14} | 143,91 | 227,41 |
| 10^{15} | 146,37 | 234,05 |

(La suite.)

LITERATURA.

Polská sociální pojišťovna. Zaklad ubezpieczeń społecznych we Varšavě, vydala v roce 1935 u příležitosti výpočtu pojistně-matematické bilance ke dni 31. 12. 1932, tabulky pojistně matematických hodnot a základních čísel polského povinného invalidního a starobního pojištění duševních pracovníků. Toto pojištění bylo na celé území Polska rozšířeno dnem 1. 1. 1928; před tím existovalo jen v těch částech Polska, které byly dříve pruské a rakouské.

V předmluvě tabulkové části jsou uvedeny důvody, proč bylo kterých základních čísel použito a také tu je namnoze srovnání zjevů nastalých

¹⁰⁾ United States Life Tables 1890, 1901, 1910, 1901/10. Washington Government Printing Office 1921.

se zjevy očekávanými podle početních podkladů. Zvláště tu je zajímavé vyjádření roční invalidisace u úřadovny Lvovské v procentech invalidisace očekávané; je tu (s výjimkou roku 1927) stoupání od r. 1926 do r. 1933 z 68% na 252% u mužů a z 225% na 481% u žen. Tam, kde se odůvodňuje použití 4,5% úrokové míry pro výpočet základních čísel jest poukazováno se zadostičinněm na to, že zákonodárci se nedali vést úrokovým výnosem, jaký se v době tvoření zákona projevoval na kapitálovém trhu; byl na př. v roce 1927 12% u hypotekárních zápůjček a 6% z vkladů u polské poštovní spořitelny.

Základních čísel z vlastních polských zkušeností bylo použito jen pro stanovení některých hodnot pro vdovský důchod, totiž čísel q_y (pravděpod. úmrtí vdovy) a w_y (pravděpod. znovuprovdání vdovy, u nás značíme h_y^v) vypočtených z materiálu podle stavu v r. 1927 v západních polských okresech. Některé tyto hodnoty tu uvedu ve srovnání s čísly, jichž bylo použito v našem pojištění pensijním:

| y | q_y | | $w_y = h_y^v$ | |
|-----|---------|---------|---------------|---------|
| | naše | polské | naše | polské |
| 20 | 0,00666 | 0,00400 | 0,1480 | 0,02920 |
| 35 | 0,00889 | 0,00600 | 0,0519 | 0,02094 |
| 50 | 0,01336 | 0,00745 | 0,0116 | 0,— |
| 65 | 0,04592 | 0,02440 | 0,0009 | 0,— |

Ostatní hlavní pravděpodobnosti a průměrné hodnoty jsou vzaty z materiálu cizího. Tak na př. čísla i_x a q_x^{aa} jsou čísla Zimmermannova z pozorování v letech 1868—1884. Tu jest třeba připomenout, že za invaliditu se v podstatě považuje ztráta 50% výdělečné schopnosti. Čísla q_x^i jsou Riedlova čísla z pozorování v letech 1868—1889, čísla y_x (průměrné stáří manželky x -letého pojištěnce) jsou vzata z údajů o soukromých zaměstnancích německých v roce 1903.

Je tudíž vidět, že pro určení hlavních hodnot pojištění, totiž pro hodnotu pojistného, invalidního důchodu a starobního důchodu bylo použito čísel značně starých, jímž se dnes vytýká, že k současným kolektivním zjevům již nepřiléhají. Zejména pak pro invalidisaci žen bylo použito týchž čísel, jako pro muže, ačkoliv, jak již bylo uvedeno, projevila se u nich podle vlastního polského materiálu nadinvalidisace značně vyšší. Poukazuje se na to, že nepřiléhavost některých základních čísel jest jen přechodná a jest způsobena hospodářskou krizí.

Pokud jde o konstrukci základních hodnot pojistně matematických, nebylo v polském pensijním pojištění použito metod odlišných od metod dosud používaných.

R. P.

Frisch Ragnar, New Methods of Measuring Marginal Utility. Beiträge zur Ökonomischen Theorie, Bd. 3. Verlag von J. C. B. Mohr, Tübingen 1932. Stran 142.

Frisch (profesor ekonomie na universitě v Oslo), vydal již v r. 1926 knížku o měření mezního užítku (Sur un Problème d'Economie Pure, Series Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Serie I., Nr. 16). V této nové práci shrnuje jednak výsledky první publikace, většinou jsou zde však nové

náměty a úvahy. Autor již nedefinuje mezní užitek pomocí vektorového počtu (jak to činil v první knize), ale vychází ze zcela jednoduchých a prostých úvah. To učinilo jeho práci přístupnou i nematematikům.

V I. kapitole autor zdůrazňuje rozdíl mezi svými úvahami a úvahami profesora Irvinga Fishera (*A Statistical Method for Measuring Marginal Utility*, 1927). Fisher uvažuje mezní užitek peněz závislý na důchodu a na cenách všech statků, které jsou na trhu. Frisch však předpokládá, že může shrnout všechny změny cen do „price of living“ (cenový index) pak je tedy mezní užitek peněz funkcí pouze dvou proměnných. Fisherův předpoklad je tedy mnohem obecnější, ale je nemožné získat potřebná data. Frischova metoda je po stránce praktické výhodnější, neboť je velmi snadné shrnout všechny změny cen do „price of living“ (cenový index), snadně získat materiál. Autor přísně rozlišuje pojmy „cost of living“ (životní náklady) a „price of living“ (index cen). Výraz „cost of l.“ je dvojsmyslný: jednak má význam „price of l.“ a jednak „expenditure for living“ (výdaj za živobytí). Pojem „expenditure for l.“ však sám závisí na „price of l.“ a na výši hladiny spotřeby.

V II. kapitole F. definuje užitek peněz a užitek zboží. Předpokládá, že mezní užitek zboží můžeme měřit dvěma způsoby: 1. fyzikálními jednotkami (vahou) a za 2. peněžními jednotkami (cenou). 1. $u = u(x)$, kde x je spotřeba v časové jednotce. Předpokládá tedy, že mezní užitek zboží nezávisí na ostatních statcích. 2. $\mu = \mu(\xi, p)$, kde $\xi = x \cdot p$ je vydání za zboží v čas. jednotce (p je cena tohoto zboží). Rozdíl mezi u a μ je ten, že μ je měřeno jednotkou, která je p -krát menší než jednotka, kterou je měřeno u . Platí vztah:

$$\mu(\xi, p) = \frac{1}{p} u \left(\frac{\xi}{p} \right).$$

Podobně definuje F. mezní užitek peněz: 1. měřený peněžní jednotkou, a za 2. měřený skutečnou kupní silou. 1. $\omega = \omega(q, P)$, kde q je nominální důchod, a P je index cen. Tento užitek nazýváme krátce nominální užitek peněz. 2. $w = w(r)$, kde $r = \frac{q}{P}$ je reálný důchod. Tento mezní užitek nazýváme reálný užitek peněz. w je měřeno jednotkou, která je P -krát větší než jednotka, kterou je měřeno ω . A platí opět vztah:

$$\omega(q, P) = \frac{1}{P} w \left(\frac{q}{P} \right).$$

Z těchto definic plynou zajímavé důsledky, kterých si autor nevšiml. Změní-li se cena zboží a jeho spotřeba zůstane stejná, tedy vydání za zboží se změní ve stejném poměru s cenou, pak mezní užitek zboží měřený vahou zůstane stejný, ale změní se jeho mezní užitek měřený cenou a sice v převratném poměru ku změně ceny. A podobně, změníme-li důchod a současně změníme ve stejném poměru všechny ceny (a tedy následkem toho i cenový index), nezmění se tedy reálný důchod, pak reálný užitek peněz se nezmění, ale nominální užitek peněz se změní a sice v převratném poměru se změnou důchodu a cen.

Dále autor zavádí důležitý pojem flexibility reálného užitku peněz, nebo krátce flexibilitu peněz: $w(r) = \frac{dw(r)}{dr} \cdot \frac{r}{w(r)}$. Zde však zapomněl F. zdůraznit, že předpokládáme o funkci užitku, že je derivace schopná. Vidíme, že jeho definice flexibility se úplně ztotožňuje s definicí elasticity známou u Bowleye a dnes všeobecně užívanou. Bylo by v zájmu jednotné terminologie, kdyby F. užíval též označení „elasticnost“.

III. kapitola je nejdůležitější. Autor definuje plochu spotřeby a na ní pak řeší všechny problémy. Podle teorie statické rovnováhy, osoba

rozděluje svá vydání v rovnovážném stavu tak, že pro jednotlivé zboží nominální užitek peněz násobený cenou toho zboží, je roven meznímu užítku zboží měřenému, fyzikálními jednotkami zboží: $\omega \cdot p = u$. Platí tedy: $w(r) = \alpha \cdot u(x)$, kde $\alpha = \frac{P}{p}$.

Tato rovnovážná rovnice definuje plochu v trojdimensionálním prostoru (α, x, r) , kterou F. nazývá plochou spotřeby. Tuto plochu protíná třemi systémy rovin, které jsou rovnoběžné s osami: 1. (α, x) , 2. (x, r) , 3. (α, r) . Tím dostává 3 druhy křivek: 1. křivky závislosti spotřebovaného množství na převratné relativní ceně zboží, když důchod zůstává konstantní. To jsou obyčejné křivky poptávky (pro převratnou cenu); 2. křivky závislosti spotřebovaného množství na důchodu, když cena zůstává konstantní. To jsou t. zv. křivky Englovy, křivky množství a důchodu; 3. křivky závislosti převratné ceny na důchodu, když spotřebované množství zůstává konstantní. Tyto křivky nazývá autor isoquanty, jsou to křivky mezního užítku peněz (pro další úvahy velmi důležité).

Ve IV. kapitole předvádí F. metodu isoquant, která je založena na sestrojení jedné z isoquant na ploše spotřeby. Autor počítá aplikaci z materiálu konsumního družstva v Paříži. Volí také pro výpočet mezního užítku analytický výraz: $w(r) = \frac{c}{\log r - \log a}$, kde c, a jsou konstanty, konstanta a značí minimum existence. Isoquanty určené touto analytickou formulí pro pařížský materiál se dobře shodují s isoquantami získanými časovou interpolací.

V. kapitola líčí metodu variací množství. Je založena na křivkách Englových, předpokládá, že cena je konstantní, a určuje vztah mezi množstvím a důchodem. Určíme dvě takové křivky pro dvě různé ceny. Z výsledků pak vypočteme průměrnou flexibilitu peněz a předpokládáme, že tato průměrná flexibilita je rovna přibližně flexibilitě pro důchod, který je geometrickým středem obou důchodů, pro které jsme vypočítali průměrnou flexibilitu peněz (za předpokladu, že důchodový interval není příliš velký). Z této flexibility pak určíme mezní užitek peněz.

V VI. a VII. kapitole popisuje F. metodu translací a aplikuje ji na americký materiál. Nemáme-li data o ceně a indexu cen, neznáme-li křivky množství (viz V. kap.), ale známe-li křivky výdajů, pak nám tyto umožňují učiniti jisté závěry o ceně a indexu cen, a tak odvoditi křivky mezního užítku peněz.

V VIII. kapitole se autor zabývá rovnicí flexibility. Metody variací množství a translací byly založeny na předpokladu, že dva pozorovací body na ploše spotřeby, které mají stejná množství a různé ceny, mohou být užity k získání jednoho pozorování peněžní flexibility. A nyní se F. ptá: máme-li pozorování, která neukazují přísně stejná množství, je pak možné odvodit přibližné výrazy pro peněžní flexibilitu užitím více než dvou pozorování? Při těchto úvahách vychází z obecné rovnice flexibility peněz, kterou definuje jako rozdíl dvou rovnovážných rovnic, pro dva dané body na ploše spotřeby. Vzorec pro průměrnou flexibilitu je speciálním případem této rovnice flexibility, jsou-li si množství rovna. Zde zavádí F. ještě pojem peněžního zrychlení. Pak uvažuje dva páry bodů a počítá pro ně průměrné flexibility a zrychlení. Z takto získaných rovnic můžeme pak za jistých předpokladů určit peněžní flexibilitu.

V IX. kapitole studuje F. problém indexních čísel ve spojení s funkcí užítku. Můžeme, pomocí pojmu peněžního užítku definovaného kvantitativně, sestrojiti definici pojmu cenového indexního čísla, která by byla lepší, než obvyklá jeho definice? Pojem index cen neuvazuje již jako číslo,

ale jako funkci důchodu. Tato úvaha má lepší smysl, když místo časového srovnání uvažujeme srovnávání geografické. F. dochází k výsledku, že peněžní flexibilita je parametrem, který umožňuje vytvoření vhodného spojení mezi dvěma důchody ve dvou bodech. Pokouší se tuto analýsu ještě zevšeobecnit. Vyjadřuje asociaci mezi dvěma důchody pomocí plochy indiference. Vidíme, že jeho postup je úplnou analogií Paretových indiferentních čar.

V X. kapitole probírá F. křivku nabídky práce a její souvislost s užitektem peněz. Křivka nabídky práce může být definována předběžně, jako křivka ukazující, jak počet pracovních hodin za den závisí na velikosti mzdy za hodinu. Ovšem pracovní výkonnost se měří také různou pracovní intenzitou — pak máme místo pracovních hodin počet vyrobených kusů. Se vzrůstem počtu pracovních hodin v daném dni, vzrůstá mezní strast (marginal disutility) práce. Existuje jisté minimum denní práce, kde mezní strast je rovna nule, je to práce, kterou osoba koná právě pro radost z práce samé. Pracuje-li osoba méně, než činí toto pracovní minimum, pak strast z práce je negativní, t. j. pracovní výkon je doprovázen pozitivním užitektem. Neuvažujeme však jednotlivý den izolovaně, nýbrž pozorujeme osobu v průběhu více dní a odvodíme průměrné hodnoty.

XI. kapitola je věnována úvaze o dani důchodové. Má být daň progresivní? A když ano, jak velká má být progresse? F. předpokládá, že index cen je konstantní, takže nominální a reálný důchod jsou si rovny. Zavádí pojem „tax progressivities“ a to není opět nic jiného, než elasticnost daně vzhledem k důchodu. Zde rozšiřuje autor své počáteční úvahy: zavádí pojem celkového užitku peněz, který je roven integrálu funkce mezního užitku (reálného). Protože mezní užitek peněz roste do nekonečna s důchodem, blížeím se minimu existence, budeme předpokládati, že dolní mez integrálu je větší než minimum existence. F. si dělí celý daňový problém na 6 případů, které pak jednotlivě studuje: 1. princip stejné oběti (zabýval se jím Sax); 2. princip proporcionální oběti (holandská škola); 3. princip mezní difference; 4. princip mezního poměru (Schönheyder, Meyer); 5. princip minimální oběti (Edgeworth, Carver) a 6. všeobecný mezní princip.

Ve XII. kapitole uvádí F. další problémy, na př. problém strukturalních změn. Nominální užitek peněz neuvažujeme pouze jako funkci skutečného důchodu a skutečného indexu cen, nýbrž také jako funkci obvyklého důchodu a obvyklého indexu. Obvyklým důchodem myslí autor průměrný důchod, který měla osoba za poslední roky. Podobně do mezního užitku zboží můžeme zavést obvyklou spotřebu. F. navrhuje zavedení skupinových užitků A , B , C . Do skupiny A patří běžná vydání za potravu, oděv, byt a pod. Do skupiny B patří všechna vydání skupiny A a vydání neběžného druhu, která jsou důležitá pro střední vrstvy, zvláště jejich intelektuální část. Do skupiny C patří všechna vydání skupin A a B a vydání, která vůbec nemají určitého vztahu ke skutečné spotřebě osob. Specialisací, rozdělením na menší skupiny, dojdeme konečně k užitku zboží měřenému cenou, jak jsme jej definovali v II. kapitole.

Celkem můžeme říci o Frischově knížce, že je jednou z nejlepších prací, které vůbec byly z oboru matematické ekonomie vydány. Předvádí teorii, ale tuto teorii také ihned aplikuje. To je její velikou předností a proto zaujme i národohospodáře nematematika. Všechny problémy, kterými se F. zabýval v posledních kapitolách vyplývají přímo z otázek a obtíží, na které narazil při aplikaci svých metod, zvláště za svého pobytu v USA.

Knihy je velmi svědomitě a pečlivě zpracována, je psána jasně a srozumitelně a ukazuje, že zavádění matematických metod do národního hospodářství není hračkářstvím, nýbrž, že pomocí těchto metod můžeme získati výsledky a poznatky, kterých bychom bez matematiky nedosáhli.

Jindřich Bělina.